دانشگاه شیراز
انتشارات دانشگاه شیراز
۴۵۱

روش های تحلیل چند متغیری

در روانشناسی، علوم اجتماعی و تربیتی

نویسنده:
ژاک تاک

برگردان:
دکتر محمود بحرانی
استادیار پژوهشکده
علوم اجتماعی دانشگاه شیراز

از مسأله
تا تحلیل

فهرست

عنوان		صفحه

عنوان		صفحه
۳-۱-۱۲	آیا افراد بیکار از لحاظ اجتماعی در انزوا هستند؟	۸۹
۳-۱-۱۳	سطح پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان خارجی	۹۱
۳-۱-۱۴	خستگی ذهنی بیماران دچار حملات قلبی	۹۳
۳-۲	نظریه وابستگی: دستکاری‌های محققان	۹۴
۳-۲-۱	یک تحلیل علّی	۹۶
۳-۲-۲	مدل‌های اندازه‌گیری	۹۶
۳-۲-۳	تحلیل علّی بدون مراحل تسلسلی	۹۷
۳-۲-۴	درجه رشد به عنوان یک متغیر سه بخشی	۹۸
۳-۲-۵	درجه رشد و توسعه به شکل «کم» و «زیاد»	۹۹
۳-۲-۶	مدلی با چند متغیر وابسته	۱۰۰
۳-۲-۷	یک مجموعه وابستگی و یک مجموعه توسعه	۱۰۰
بخش II	**از روش شناسی به تحلیل**	**۱۰۲**
فصل ۴	**طرح آزمایشی: تأثیر شوخی و مزاح بر امتیاز تجاری**	**۱۰۹**
۴-۱	آزمایش معیار	۱۰۹
۴-۲	نشانگان oxo	۱۰۹
۴-۳	تحلیل چند متغیری تلویحی	۱۱۰
۴-۴	بررسی مقدماتی	۱۱۰
۴-۵	همبستگی دو متغیری	۱۱۱
۴-۶	ماتریس داده‌ها	۱۱۲
۴-۷	نمودار علّی	۱۱۲
۴-۸	آزمون t برای تفاوت میانگین‌ها	۱۱۲
۴-۹	طرح آزمایشی پژوهش عملی	۱۱۵
۴-۱۰	برون‌داد نرم افزار spss for windows از آزمون t استودنت	۱۱۶
فصل ۵	**تحلیل رگرسیون چندگانه: علل بی‌فرزندی**	**۱۲۰**
۵-۱	مسأله تحقیق و نمودار علّی	۱۲۰
۵-۲	ماتریس داده‌ها	۱۲۰
۵-۳	تحلیل رگرسیون دو متغیری:تأثیر شاغل بودن روی بی‌فرزندی	۱۲۱

عنوان **صفحه**

1. Simon278-Blalock

عنوان		صفحه

عنوان		صفحه

عنوان		صفحه
فصل ۱۰	**تحلیل همبستگی کانونی: مطالعه برابری اقتصادی و عدم ثبات سیاسی**	۳۹۵
۱-۱۰	مسأله تحقیق و طرح علّی	۳۹۵
۲-۱۰	ماتریس داده‌ها	۳۹۶
۳-۱۰	مدل تحلیل همبستگی کانونی	۳۹۸
۴-۱۰	سه نوع همبستگی	۳۹۹
۵-۱۰	نگرش هندسی	۴۰۰
۶-۱۰	اهداف شیوه تحلیل همبستگی کانونی	۴۰۲
۷-۱۰	آزمون ساختار ویژه ماتریس $\mathbf{R}_{yy}^{-1}\mathbf{R}'_{xy}\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy}$	۴۰۵
۸-۱۰	آزمون ساختار ویژه‌ی داده‌های راسِت	۴۰۹
۹-۱۰	ماتریس‌های A و B وزن‌های کانونی	۴۱۱
۱۰-۱۰	متغیرهای کانونی x^* و y^*	۴۱۳
۱۱-۱۰	یک رویکرد علّی به تحلیل همبستگی کانونی	۴۱۵
۱۲-۱۰	آزمون‌های معناداری	۴۱۶
۱۳-۱۰	برون‌داد SPSS تحت ویندوزبرای تحلیل همبستگی متعارف	۴۱۷
فصل ۱۱	**شیوه‌های آماری مربوط به متغیرهای وابسته چندگانه**	**۴۲۲**
۱-۱۱	تحلیل واریانس چند متغیره: بهترین جا برای زندگی روی زمین کجاست؟	۴۲۳
۱-۱-۱۱	مسأله تحقیق و طرح علی مربوط به آن	۴۲۳
۲-۱-۱۱	ماتریس داده‌ها	۴۲۵
۳-۱-۱۱	اهداف این شیوه آماری	۴۲۶
۴-۱-۱۱	t استودنت، F فیشر، T هاتلینگ و لامبدای ویلکز	۴۲۶
۵-۱-۱۱	محاسبات مقدماتی : ماتریس W، B، و T	۴۲۷
۶-۱-۱۱	آزمون لامبدای ویلکز	۴۳۰
۷-۱-۱۱	جایگزین‌های دیگری برای آزمون لامبدای ویلکز : تحلیل واریانس چند متغیره به عنوان معکوس تحلیل افتراقی	۴۳۱

عنوان		صفحه
	۱۱-۱-۸ تحلیل واریانس چند متغیره ، یک دنیای کامل	۴۳۳
	۱۱-۱-۹ مفرضات	۴۳۴
	۱۱-۱-۱۰ نتایج تحلیل واریانس چند متغیره حاصل از نرم افزار SPSS ویندوز	۴۳۵
۱۱-۲	تحلیل متمایزکننده چندگانه: نواحی[1] کوبایی نشین میامی: مدل نیروی کار سه‌گانه	۴۳۷
	۱۱-۲-۱ مسأله تحقیق و طرح علّی	۴۳۷
	۱۱-۲-۳ ماتریس داده‌ها	۴۳۹
	۱۱-۲-۲ آزمون لامبدای ویلکز	۴۴۰
	۱۱-۲-۴ لامبدای ویلکز بعنوان نسبت $\lvert\mathbf{W}\rvert/\lvert\mathbf{T}\rvert$	۴۴۱
	۱۱-۲-۵ آزمون لامبدای ویلکز با استفاده از ساختار ویژه $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{B}$	۴۴۲
	۱۱-۲-۶ طبقه بندی	۴۴۴
	۱۱-۲-۷ هم‌واریانسی	۴۴۴
۱۱-۳	تحلیل متمایزکننده چندگانه به عنوان تحلیل همبستگی کانونی	۴۴۴
	۱۱-۳-۱ نتایج تحلیل افتراقی چندگانه حاصل از نرم افزار SPSS ویندوز	۴۴۷
	۱۱-۳-۲ نتایج SPSS ویندوز پیرامون تحلیل افتراقی چندگانه به عنوان تحلیل همبستگی کانونی	۴۵۰
پیوست: اطلاعات ریاضیات و آماری مورد نیاز		۴۵۳
جدول‌های آماری		۴۹۰
کتابشناسی		۴۹۴

1. enclaves

مقدمه مؤلف

بســـیاری از کتاب های آماری به محتوای کار پژوهش توجهی ندارند. آنها بر روی تحلیل‌های آماری متمرکز شـــده و به صـــورت موردی مثال‌هایی ســـاختگی را به آنها ربط داده‌اند. این کتاب اگر چیز جدیدی دربر داشته باشد، که امیدواریم چنین باشد، این است که چنین کمبودی را جبران کند. ما با جوجه‌ها و سکه‌ها سروکار نداریم، بلکه سروکار ما با تحقیقات واقعی در حوزه علوم اجتماعی خواهد بود. صدها مثال از تحقیقات واقعی با انتخاب مناسب ارائه خواهد شد تا نشان دهیم چگونه یک مسئله تحقیقاتی در حوزه علوم اجتماعی به انتخاب یک شـــیوه خاص تحلیل چند متغییری منجر می‌شـــود. این موضوع انتخاب مناسب، در بخش اول کتاب (از نظریه تا روش شناسی) بحث خواهد شد، بطوری که خواننده با انواع مختلفی از مسائل تحقیقی و تحلیل‌های چند متغیری آ شنا می شود. این بخش را می‌توان به طور جداگانه خواند، و برای ارائه در ســطوح آموزش متوســطه و ســال‌های اول دانشــگاه منا سب ا ست. همچنین می‌تواند کمک بزرگی برای پژوه شگرانی با شد که در مواجهه با یک م سئله تحقیق، می‌خواهند از بین شیوه‌های کلی د ست به انتخاب بزنند و مسیر خود را معین کنند. سروکار ما با مثال‌هایی از روان‌شناسی، جامعه‌شناسی، اقتصاد، علوم سیاسی، تحقیقات مقایسه‌ای بین‌المللی و امثال آن خواهد بود.

بخش دوم فصـل‌های ۴ تا ۱۱، بیشـتر جنبه فنی دارد تعدادی از روش‌های تحلیل چند متغیری همراه با محاسبات تفضیلی آن شرح داده می‌شوند. اما در آنجا نیز ما با مسئله تحقیقاتی به دو صورت در ارتباط هســتیم. اولا مثال‌های بخش اول، نقطه آغازی برای اجرای شــیوه‌های آماری می‌باشــند. با اســتفاده از یک مثال تحقیقاتی، مانند مطالعه شــهروندان فقیر و غنی، مجموعه کوچکی از داده‌ها ت شکیل داده‌ایم که به نتایجی شبیه آنچه در تحقیق ا صلی یافت شده ا ست می‌انجامد. بدین منظور تحلیل کلی این مجموعه کوچک داده‌ها با د ست محا سبه شده تا خواننده نسبت به کوچکترین اجزاء شیوه آماری، بینش پیدا کند. همچنین نتایج محاسبات کامپیوتری نیز ارائه می‌شود تا نشان دهیم که تفاوتی با محاســبات دســتی ندارد. ثانیاً، ارتباط محتوای مســأله علوم اجتماعی نیز از تشــریح نتایج تحلیل رو شن می شود، در اینجا هم ادبیات آماری ب سیار ضعیف ا ست. گفتگو با آمارادانانی که توجه آنها بیشتر معطوف به جنبه‌های ریاضی است، برای ما آ شکار نموده که برای تو ضیح نتایج محا سبات پیچیده در قالب کلمات، تا چه حد با مشــکل مواجه هســتند. یک آماردان در انجام محاســبه دقیق شــاخص 'جینی'[1] برای یک کشــور، مشــکلی ندارد، اما در تفســیر آن از لحاظ نابرابری درآمدها دچار مشــکل می‌شــود. ما از طریق دقت در تفســیر کلامی نتایج و بازخورد نظری مســئله تحقیق در علوم اجتماعی، بر این مشکل فائق می‌آییم.

روش هایی که به تفصـــیل مورد بحث قرار گرفته‌اند عبارتند از: آزمون تی اســـتودنت در طرح آزمایشـــی، تحلیل رگرســـیون چندگانه، همبســـتگی تفکیکی و تحلیل مســـیر، تحلیل واریانس و

1-Gini Index 2-Canonical Correlation Analysis

کوواریانس، تحلیل افتراقی دو گروهی، تحلیل عوامل، تحلیل همبستگی متعارف[۲]، و تحلیل واریانس و کوواریانس چند متغیری. هر یک از این شـیوه‌ها در قالب طرح مشـابهی دنبال می‌شـوند که شـامل: مسئله تحقیق در مقدمه، دیاگرام پیکانی، ترسیم هندسی در یک نظام مختصات دکارتی، شرح مفصّل محاسبات، تفسیر کلامی نتایج و بازخورد نظری و در آخر، نتایج کامپیوتری است.

مطالعه بخش دوم کتاب بر این پیش‌فرض اسـتوار اسـت که خواننده، آمار مقدماتی را می‌داند. دربخش ضـمیمه کتاب، خلاصـه کوتاهی از بعضـی نکات مهم در این باره و مقدمه‌ای در باره جبر ماتریس‌ها آمده است. برای مطالعه بخش‌های تکنیکی این کتاب اینها باید کافی باشد. درفصل‌های ۴، ۵ و۶ بعضـی شـیوه‌های مقدماتی (آزمون t اسـتودنت، تحلیل رگرسـیون، تحلیل واریانس) را مرور می‌کنیم، و در توضیح شیوه‌های پیشرفته نیز یک روش مناسب را برای خواننده درنظرگرفته‌ایم.

لازم ا ست از همه ک سانی‌که در تدوین این کتاب همکاری دا شته‌اند ت شکر کنم. از آنجا که این شامل افراد زیادی در سال‌های متمادی می شود، ما سعی نکردیم ا سامی را ذکر کنیم زیرا م سلماً بعضـی فراموش شـده‌اند. همکاران دانشـگاهی که درباره بخش‌های معینی از متن کتاب نظرداده‌اند، تعدادی از د ستیاران دان‌شجویی که کار تحقیق را به عهده دا شته‌اند، دان‌شکده علوم اجتماعی که آنها را هدایت کرده ا ست، من شی‌های محترم، همگی نقش به سزایی در این کار دا شته‌اند. بدین ترتیب مراتب قدردانی خود را از دانشگاه ارازموس روتردام اعلام می‌دارم.

بخش ۱

از نظریه تا روش‌شناسی

در بخش اول کتاب توجه خود را به رابطه‌ی نظریه و روش شـــناســـی معطوف خواهیم کرد. با ارائه مثال های متعددی از تحقیقات علوم اجتماعی به این ســـؤال که کدام تحلیل چند متغیری برای چه نوع سؤال تحقیقاتی مناسب است، پاسخ خواهیم داد.

روی این موضوع انتخاب مناسب، در سه فصل کار خواهیم کرد: در یکی با مثال‌های تحقیقاتی، در دیگری با شـــیوه‌های آماری، و در پایان هم با ارتباطی که بین مســـأله تحقیق و شـــیوه آماری برقرار می‌کنیم.

در فصل اول، پس از بیان چند نکته مقدماتی، شماری از مسائل تحقیقاتی موثق از علوم اجتماعی را بحث می‌کنیم. همه این مسائل ساختاری اختصاصی دارند که آن را قالب‌بندی[1] (فرمت) اساسی نامیده و به شکل نمودار پیکانی ترسیم خواهیم کرد.

در فصل دوم مروری بر تحلیل‌های چند متغیری خواهد شد و همچنین، قالب‌بندی‌های اساسی به‌وســیله نمودارهای پیکانی ترســیم می‌شــوند. برای این کار تعداد زیادی طبقه‌بندی‌های فرعی می سازیم. ادبیات موجود در این زمینه بسیار محدود است، زیرا اغلب کتاب‌ها فقط سه ملاک طبقه‌بندی را بکار گرفته‌اند: سطح سنجش متغیرها (فاصله‌ای، ترتیبی، اسمی)، ویژگی علّی تداعی‌ها (وابسته، مستقل) و ماهیت پدیده مورد بررسی (متغیرها، اشیاء). در روش ما بیست ملاک برای طبقه‌بندی بکار رفته است، که به محقق کمک می‌کند تا راه خود را در بین شیوه‌های مختلف پیدا کند.

در فصــل ســوم بین مســائل تحقیقاتی و شــیوه‌های تحلیل چند متغیری ارتباط برقرار می‌کنیم. مثال‌های تحقیقاتی متعدد دیگری نیز مورد بحث قرار می‌گیرند که تمرینی جهت اســـتفاده از ملاک طبقه‌بندی برای انتخاب شیوه آماری مناسب خواهد بود. سپس، همه اینها به صورت مجسم نمایش داده می شوند، به گونه‌ای که معلوم می شود ایده خوب دست به انتخاب مناسب زدن، یک امر نسبی است. ابتدا با نظریه وابستگی در تحقیقات مقایسه‌ای بین فرهنگی شروع می‌کنیم، و نشان خواهیم داد که پژوهشــگران چگونه به کمک دســتکاری‌های ابتدائی م
مسأله درحوزه تحقیقات علوم اجتماعی و مسائل مشابه، پیدا کنند.

1. Format

فصل اوّل

انواع مسائل تحقیق و موقعیت‌های پژوهشی

تحقیقات موفق تحقیقاتی هستند که برنامه‌ریزی شده‌اند. بسیاری طرح‌های تحقیقاتی به این دلیل بی‌نتیجه می‌مانند که محقق بی‌پروا خود را به ورطه تحقیق می‌اندازد- به کتابخانه می‌رود، یادداشت بر می‌دارد، واژه‌ها را جمع‌آوری می‌کند، تحلیل‌های رایانه‌ای انجام می‌دهد- در حالی که فاقد یک طرح سنجیده و نتیجه بخش است. وجه اشتراک طرح‌های تحقیقاتی و طرح‌های معماری این است که قبل از هر چیز، هر دو نیازمند یک تجسم همه جانبه از موضوع هستند. همچنان که هر عمارت نیازمند طرح و نقشه‌هایی است که از قبل به روشنی طراحی شده و به صورت تجربی ادراک شده باشند، یک طرح تحقیقاتی هم نباید از لحاظ پیش‌نگری و دقت در جزئیات نقصی داشته باشد، تا سرانجام آن موفقیت‌آمیز باشد.

تمرکز این فصل بر مفهوم‌سازی تحقیقات علوم اجتماعی است. از نظر ما هر عبارت ساده درباره واقعیت‌های اجتماعی، بازگو کننده یک ساختار رسمی است که به طرح تحقیق جهت می‌دهد. به عنوان مثال جمله‌ای از رابرت میچل[1] نقل می‌کنیم که گفته است: کاغذبازی اداری (بروکراسی) به سلطه اغنیا منجر می‌شود. این عبارت مبین ساختار $\Delta B \rightarrow \Delta O$ است، که در اینجا B میزان کاغذ بازی، O میزان سلطه اغنیا، Δ (دلتا) تغییرات و علامت پیکان ($\rightarrow$) نیز رابطه علّی را بیان می‌کند؛ در حالی‌که واحدهای مرجع عبارت فوق (مثلاً مؤسسات) نامشخص بوده و نحوه اندازه‌گیری B، O و Δ معین نشده است.

قصد ما ارائه شمار قابل ملاحظه‌ای از عبارات علوم اجتماعی و بیان ساختار تفصیلی‌ای است که آن‌ها نشان می‌دهند، درست مثل آنچه که درباره رابطه $\Delta B \rightarrow \Delta O$ گفته شد. ما بر این باوریم، هر عبارتی که بر اساس شواهد تحقیقاتی توسط پژوهشگر علوم اجتماعی بیان می‌شود چنین ساختاری را بازگو می‌کند، که آن را قالب‌بندی می‌نامیم. همچنین معتقدیم اگر این قالب‌بندی مشخص شود می‌تواند طرح‌ریزی تحقیق را آسان کند و امیدواریم که با انجام این کار، بین نظریه اجتماعی و روش‌شناسی پیوند برقرار کنیم.

1. Michels

۱-۱-نکات مقدماتی

۱-۱-۱ واحدها و خصیصه‌ها

نقطه شروع ما این است که هر عبارتی متشکل از **واحدها**[1] و **خصیصه‌هایی**[2] است؛ هر خصیصه چند (حداقل دو) **ویژگی مختلف**[3] و هر ویژگی نیز می‌تواند چند **جزء**[4] را شامل شود. مثلاً، این عبارت را در نظر بگیرید: «در کشــور ما ســهم مردان در مشــاغل پردرآمد بیش از زنان اســت». واحدهای این عبارت را کارکنان کشور تشکیل می‌دهند. خصیصه‌ها شامل جنسیت و درآمد شغلی هستند. اجزاء جنسیت: زن و مرد، و اجزاء درآمد: شامل بالا و پایین هستند. مثالی از نحوه توزیع واحدها در سطح خصیصه‌های مورد نظر در شکل ۱-۱ نشان داده شده است.

	مرد	زن	
بالا	۳۲۰	۸۰	۴۰۰
درآمد	۴۸۰	۷۲۰	۱۲۰۰
پایین	۸۰۰	۸۰۰	۱۶۰۰

÷شکل ۱-۱ توزیع واحدها روی دو خصیصه

فرض کنید نمونه شامل ۱۶۰۰ نفر از کارکنان با نسبت مساوی زن و مرد با شد (هر یک ۸۰۰ نفر). آنگاه نخســت مشــخص می‌شــود که فراوانی مشــاغل پردرآمد (۴۰۰ مورد، معادل ۲۵ درصــد از ۱۶۰۰ مورد) بســیار کمتر از فراوانی مشــاغل پایین (۱۲۰۰ مورد، معادل ۷۵ درصــد از ۱۶۰۰ مورد) می‌باشد. همچنین مشاهده می‌شود که در گروه افراد پردرآمد نسبت مردان ۴ برابر نسبت زنان است. بنابراین با توجه به جمع کل می‌بینیم که واحدها در اجزاء خصــیصــه‌ها به نحوی توزیع شــده‌اند که فراوانی افراد با درآمد بالا شامل تعداد زیاد مردان و تعداد کم زنان می‌شود.

از نظر ما، هر عبارتی را می‌توان از طریق بیان واحدها، خصیصه‌ها، ابعاد و اجزاء آن شرح داد. مثال دیگری می‌زنیم: «خدا بی‌نهایت خوب اســت» مادامی‌که واحدها مورد توجه باشــند، در این جا با یک حالت کرانه‌ای مواجه هســـتیم و تنها یک واحد وجود دارد: خدا. همچنین فقط یک ویژگی وجود دارد:خوب بودن.[5] ابعاد این ویژگی از بی‌نهایت بد تا بی‌نهایت خوب متغیر اســـت. پراکندگی در این مثال صفر است، زیرا واحدها (در اینجا فقط یک واحد) در یک انتها قرار دارند، بی نهایت خوب.

خلاصه: هر عبارتی (مسأله تحقیق، فرضیه، سؤال تحقیق) از لحاظ صرف و نحو متشکل از واحدها، خصیصه‌ها، ابعاد و پراکندگی است.

---

1. units
2. characteristics
3. distinction
4. dispersion
5. Goodness

۲-۱-۱ واحدهای سطوح مختلف

در عبارت: «در کشور ما سهم مردان در مشاغل پردرآمد بیش از زنان است» واحدها معرف کارکنان هستند. از سوی دیگر در سخن روبرت میچل، که «کاغذبازی اداری موجب حکومت اغنیا است»، واحدهای مرجع از یک سطح بالاتر یعنی سازمان‌ها هستند. بسیار حائز اهمیت است که محقق دیدگاه درستی از واحدهای مرجع عبارات (فرضیه‌ها و سؤال‌های تحقیق) خود داشته باشد. او باید نسبت به این واقعیت آگاه باشد که بسیاری اشکال نامشخص در اینجا مخاطره‌انگیز هستند. مثلاً مفهوم (کاغذبازی) را در نظر بگیرید. این مفهوم نه تنها به مؤسسات اشاره دارد، بلکه به کارکنان این مؤسسات، نوشته‌های آن‌ها، نظم و ترتیب نوشته‌ها و غیر آن نیز بر می‌گردد. این گستردگی مفهومی و تفسیرپذیری موضوع به محقق آزادی عمل می‌دهد تا برای مطالعه کاغذبازی دست به انتخاب بزند. او می‌تواند مثلاً شخص را به عنوان واحد مورد مشاهده خود در نظر بگیرد. پست سازمانی هر فرد را برایش کد کند و تعداد و پست‌های اداری هر مؤسسه را شمارش نماید. بنابراین واحد تحلیل، مؤسسه خواهد بود، اما واحد مشاهده، فرد است. بدین ترتیب مفهوم کاغذبازی که براساس تعداد پست‌های اداری اندازه‌گیری شده است یک خصیصه کلی از مؤسسه خواهد بود. همین محقق می‌تواند متون نوشتاری مؤسسه را به عنوان واحد مورد مشاهده یا تحلیل درنظر بگیرد. او همچنین می‌تواند راهکار سؤال از بعضی کارکنان خبره را درباره روال اداری این نوشتجات دنبال کند. هر یک از این دیدگاه‌ها، بر یک مؤلفه خاص از مفهوم کاغذبازی تأکید دارد که با دیگری متفاوت است.

البته اهمیت تئوریکی در انتخاب صحیح واحدهای تحقیق را هم نباید از نظر دور داشت.

۳-۱-۱ ویژگی‌های سطوح مختلف اندازه‌گیری

با توجه به اینکه دانشمندان علوم اجتماعی را به معمار تشبیه کردیم، نوعی رابطه عدم اطمینان بین تصور کلی طراح و واقعیت خارجی ساختمان وجود دارد. موانعی از قبیل کمبود بودجه، خواسته‌های متعارض مالک آینده و موانع دیگر باعث می شوند که اجرای یک طرح در یک موقعیت، هرگز مطلوب نباشد. محقق وقتی که سعی دارد فکر و ایده خود را در عمل به شکل مناسبی پیاده کند به‌ویژه زمانی‌که سطح اندازه‌گیری مقیاس‌ها را تعیین می‌کند، با شرایطی مواجه می شود که باید دست به انتخاب بزند. معمولاً سه سطح اندازه‌گیری وجود دارد. خصیصه‌هایی مثل سن براساس یک مقیاس **کمّی** اندازه‌گیری می‌شوند. خصیصه‌هایی مثل موقعیت اجتماعی براساس یک مقیاس **رتبه‌ای** و بعضی مثل ملّیت نیز روی یک مقیاس **اسمی** اندازه‌گیری می‌شوند. در مقیاس اسمی برای ابعاد مربوط به یک خصیصه، ترتیبی در نظر گرفته نمی‌شود (مثلاً برای یک بلژیکی رتبه‌ای بالاتر از یک سوئیسی یا هلندی در نظر گرفته نمی‌شود). درحالی‌که در مقیاس رتبه‌ای چنین ترتیبی مد نظر است (مثلاً وضعیت اجتماعی بالا، متوسط و پایین در رتبه‌بندی منظور می‌گردد). در مقیاس کمّی علاوه بر

این‌که ترتیب منظور می‌گردد، این خاصـــیت وجود دارد که فاصـــله بین ابعاد مختلف را نیز می‌توان تعیین کرد (جرج ۶ ساله، ۴ سال بزرگتر از جانای ۲ ساله است). همچنین می‌توان نسبت‌ها را تعیین کرد (جرج سه برابر جانا سن دارد) وقتی شرایط اخیر احراز می‌شود مقیاس را مقیاس نسبی گویند و اگر چنین نباشد فقط یک مقیاس فاصله‌ای داریم.

در علوم اجتماعی تمایز بین مقیاس نســـبی و فاصـــله‌ای چندان مورد توجه قرار نمی‌گیرد. مقیاس‌های سلسیوس و فارنهایت برای اندازه‌گیری درجه حرارت، مقیاس‌های فاصله‌ای هستند چون تعیین نســبت در آن‌ها امکان‌پذیر نیســت (درجه حرارت ۲۰ درجه ســانتی‌گراد دو برابر گرم‌تر از ۱۰ درجه سانتی‌گراد نیست). در اینجا صفر مطلق وجود ندارد، اما در درجه‌بندی کلوین صفر مطلق وجود دارد؛ در نتیجه درجه‌بندی کلوین یک مقیاس نســبی اســت (۲۰ درجه کلوین دو برابر ۱۰ درجه آن است). بعد از این ما تمایزی بین سطح اندازه‌گیری فاصله‌ای و نسبی قائل نمی‌شویم و با عنوان سطح اندازه‌گیری کمّی (متریک یا حداقل فاصله‌ای) از آن یاد می‌کنیم.

سطح اندازه‌گیری در طراحی و اجرای طرح تحقیق نقش بسیار مهمی دارد. رابطه عدم اطمینانی که در بالا به آن اشــاره شــد به شــرح زیر اســت. خصــایص معینی ممکن اســت ســطوح اندازه‌گیری مشخصی برای خود داشته باشند، ولی محقق تصمیم دیگری بگیرد. مثال معروف در این زمینه، نتایج امتحانات دانش‌آموزان مدارس اســت. مقیاس اندازه گیری ذاتاً رتبه‌ای اســت، زیرا هر معلمی‌تصــدیق می‌کند نمرات درحقیقت نسبی هستند، چنان‌که فاصله نمره ۵ و ۶ از ۱۰ معادل فاصله ۷و ۸ نیست؛ علاوه بر این نمره امتحانات، طبق یک سیستم مقایسه‌ای و با مقایسه‌ی عملکرد افراد با یکدیگر داده می شود. بنابراین، تحلیل نتایج امتحانات تلویحا جه شی از سطح اندازه‌گیری رتبه‌ای به کمی ا ست. برعکس آن هم زیاد پیش می آید. تعیین سن به صورت سه وجهی جوان، میان سال و م سن، یک تنزّل از سطح مقیاس کمّی به رتبه‌ای است.

بدین ترتیب پژوه شگر می‌تواند دو کار انجام دهد. به عنوان معمار اجتماعی او می‌تواند م صالح گران قیمت و باکیفیت را به‌کار گیرد درحالی‌که همان نتایج را با مواد ارزان‌تر هم ممکن است به‌دست آورد. از سوی دیگر می‌تواند مصالحی را در نظر بگیرد که بسیار ارزان بوده و بر استحکام ساختمان اثر می‌گذارند. در اینجا همچنین مفهوم نظری قابل دفاع باشد.

۴-۱-۱ پراکندگی واحدها

زمانی‌که ویژگی‌های مختلف خ صی صه‌ها در سطح واحدها پخش نبا شد، تحقیق مفهوم چندانی پیدا نمی‌کند. عبارت «خداوند بی نهایت خوب اســـت»، قابل تحقیق نیســـت، زیرا، هنگامی اعتبار پیدا می‌کند که خدایان بدی هم وجود داشــته باشــند تا با یکدیگر قابل مقایســه باشــند. هر خصــیصــه‌ای حداقل باید دو جزء داشته باشد (مثل جنسیت: زن و مرد) و واحدها در سطح آن‌ها پخش شده باشند. در طرح یک تحقیق باید مطمئن شویم که خصیصه‌ها دارای اجزاء کافی هستند. برر سی دیدگاه‌های

مربوط به سقط جنین وقتی معنا دارد که دیدگاه‌های مختلفی وجود داشته باشد، اگر نظرات همه یکسان باشند، بررسی مفهومی نخواهد داشت. پراکندگی نمرات در سی، توزیع درآمد و دسته‌بندی دیدگاه‌های سیاسی در بسیاری جوامع از اهمیت کافی برخوردارند. اما بسیاری پدیده‌های اجتماعی وجود دارند که در آن‌ها واحدها در یک سوی خصیصه‌ها جای گرفته‌اند مثلاً «سطح شغل پدر» کودکان مهاجر در کشور ما [هلند] غالباً در سطح «پایین» است، «خاستگاه اجتماعی» دانشجویان دختر عموماً «بالا» است. در این موارد که واحدها دارای پراکندگی کافی در سطح ویژگی‌های مختلف یک خصیصه نیستند، محقق ممکن است ناچار به حذف آن خصیصه از تحقیق شود. البته امکان دارد محقق راه حل دیگری پیدا کند، مثلاً تعداد واحدها را بیشتر کند. به‌طور مثال پسران را به فهرست دانشجویان اضافه کند تا طبقات اجتماعی از پراکندگی بیشتری برخوردار شوند. اما با این کار احتمال دارد که خود مسأله تحقیق عوض شود. در حالت اخیر بایستی رهنمود نهایی آشکارا باقی بماند.

۵-۱-۱ خصیصه‌های متعدد

قالب‌بندی یک عبارت که بیش از دو جمله داشته باشد، پیچیده‌تر می‌شود. مثال قبلی راجع به رابطه جنسیت و درآمد شغلی را به‌خاطر بیاورید و فرض کنید که این رابطه برای کارکنان حقوق‌بگیر صحت داشته باشد نه آنهایی که در مشاغل تجاری کوچک یا خود اشتغالی کار می‌کنند. در این صورت عبارت پیچیده‌تر خواهد شد، برای این‌که علاوه بر دو نوع جنس (زن و مرد) و دو سطح درآمد (بالا و پایین) خصیصه جدید دیگری هم وارد می‌شود، یعنی ماهیت شغلی (حقوق‌بگیری و خوداشتغالی). در بخش حقوق‌بگیران، نسبت مردان با درآمدهای بالا بیش از زنان است، اما در بخش خوداشتغالی چنین چیزی صدق نمی‌کند و یا حتی رابطه معکوسی وجود دارد. درنتیجه فرضیه تحقیق نیز در این حالت پیچیدگی بیشتری می یابد و شکل ۱-۱ اکنون به شکل ۲-۱ تبدیل می‌گردد.

مثال فوق تنها یکی از قالب‌های متعددی است که ممکن است در عبارتی با سه خصیصه، با آن مواجه شویم. نوع دیگری از آن را در مثال زیر می‌یابیم.

خودکشی در بین سرمایه‌گذاران ورشکسته شایع‌تر از گروه سرمایه‌گذاران درحال پیشرفت است. واحدها پایه‌گذاران شرکت‌ها هستند. دو خصیصه عبارتند از X: ورشکستگی (بلی، خیر) و Y: خودکشی (بلی، خیر). یک رابطه علّی $X \rightarrow Y$ مفروض است که اگر سن z (پیر، جوان) را در آن وارد کنیم این رابطه محو می‌شود. یعنی دیگر نه برای پایه‌گذاران جوان و نه پیر، ورشکستگی علت خودکشی محسوب نمی‌گردد. اما از سوی دیگر رابطه‌ای قوی بین z و x (پایه‌گذاران مسن‌تر بیشتر از افراد جوان دچار ورشکستگی می شوند) و z و y (پایه‌گذاران مسن‌تر بیش از افراد جوان‌تر دست به خودکشی می‌زنند) وجود دارد.

Z_1 : حقوق‌بگیری

درآمد (Y)	جنسیت (X): مرد	زن	
بالا	۲۶۰	۲۰	۲۸۰
پایین	۴۲۰	۶۶۰	۱۰۸۰
	۶۸۰	۳۸۰	۱۳۶۰

Z_2 : خود-اشتغالی

درآمد (Y)	جنسیت (X): مرد	زن	
بالا	۶۰	۶۰	۱۲۰
پایین	۶۰	۶۰	۱۲۰
	۱۲۰	۱۲۰	۲۴۰

شکل ۲-۱ توزیع واحدها روی سه خصیصه

قالب‌های بسیار دیگری از این نوع را هم می‌توان درنظر گرفت. وقتی‌که خصیصه‌ها به بیش از یک مورد افزایش یابند شرایط باز هم پیچیده‌تر می شود. قبل از آنکه به بسط سازه‌های مهم و اساسی عبارات بپردازیم، ابتدا باید این سوءتفاهم برطرف شود که این فصل محدود به نوعی منطق قضایای مورد تحلیل نیست. پژوهش طبعاً محدود به تعدادی عبارت نمی‌شود. یک معمار تنها به آجر و دیوارها توجه ندارد، بلکه وظیفه دارد یک ساختمان کامل را برپا کند. از این رو بسیار مهم است که از پیکربندی اصلی غافل نشوند.

۶-۱-۱ موقعیت‌های تحقیق و نظام‌های عبارتی

با در نظر گرفتن این واقعیت که تحقیق، صرفاً به آزمون یک یا چند فرضیه محدود نمی‌باشد، به سختی می‌توان از یک قالب‌بندی «خاص» سخن به میان آورد. مجموعه‌ای کلی از خصیصه‌ها و عبارات در یک طرح تحقیق با هم تلفیق پیدا می‌کنند. بعضی گروه‌های کوچک عبارات، نیازمند توجه جداگانه بوده و یک قالب‌بندی معین را نشان خواهند داد. بنابراین ساختارهای رسمی زیادی در یک مطالعه یا تحقیق علمی مشابه دیده خواهند شد. اما همچنان‌که یک معمار می‌خواهد به عمارت مورد نظر خود ویژگی خاصی ببخشد، محقق نیز یک قالب‌بندی اساسی را در ذهن دارد.

یک تحقیق درباره توزیع درآمد در جامعه، تحلیلی از پراکندگی است. یک مطالعه تاریخی در زمینه تأثیر فئودالیسم بر سرمایه‌داری، یک تحقیق علّی است. بررسی دیدگاه‌های یک جمعیت

پیرامون موضوع مرگ آسان[1]، یک تحلیل توصیفی از عوامل اولیه تلقی می‌گردد. مطالعه فرمانبرداری زنان در مقایسه با مردان در جامعه ما، یک تحلیل افتراقی است. این‌ها مثال‌هایی هستند که نشان می‌دهند یک تحقیق همواره با یک مسأله کلی آغاز می شود که یک قالب‌بندی اساسی با آن تلفیق یافته است. در نشانه شناسی ما، از ابتدا ما با این ساختار کلی مسأله هدایت می‌شویم. البته این خود گواهی است بر این‌که، یک ساختار اساسی با مجموعه کلی از فرض‌های فرعی‌تر درگیر است، به گونه‌ای که نظام پیچیده‌ای از عبارات پدید می‌آید، درست شبیه تصورکلی از ساختمانی که به اتاق‌های خواب، آشپزخانه، نشیمن، غذاخوری و باغچه تقسیم می شود. این تحلیل از نظام‌های فرعی بخشی از روش شناسی تحقیق است. اما هرگز نباید بینش اولیه را از دست داد. بدین ترتیب می‌توان محققین را در روش‌شناسی تحقیق همچون معمار تصور کرد، آن‌ها ابتدا یک طرح را ترسیم می‌کنند و در پی آن شرح بیشتر جزئیات می‌آید.

۱-۲ چند مثال تحقیقاتی و قالب‌بندی اصلی آن‌ها

۱-۲-۱ شوخی و مزاح به‌عنوان شیوه تأثیرگذاری اجتماعی

از هنری کسینجر نقل شده است که شوخی را به عنوان ابزار دیپلماسی به‌کار می‌برد. بنا به گفته والریانی (۱۹۷۹) شوخی کسینجر حالت مزاح را به دیگران القاء می‌نمود و معمولاً باعث ایجاد جوّ راحت‌تری در بحث‌های محرمانه، رسمی یا مذاکره با رهبران جهان می‌گردید. در سطح وسیع‌تری پژوهشگران رفتار اجتماعی، از مدت‌ها قبل بر این عقیده‌اند که مزاح و شوخی می‌تواند تأثیرات اجتماعی را تسهیل نماید.

اوکوین و آرونوف[2] (۱۹۸۱) تلاش کردند تا این فرضیه را به‌طور علمی بیازماید. آن‌ها آزمایشی ترتیب دادند که موضوع آن رسیدن به توافقی در زمینه قیمت یک تابلو نقاشی بود. از قبل طوری برنامه‌ریزی شده بود که موقعیت‌ها شامل دو حالت وجود و عدم وجود شوخی و مزاح در هنگام معامله و چانه زدن بود و میزان توافق نهایی، در هر موقعیت اندازه گیری می‌شد. زنان و مردان به تعداد مساوی در آزمایش شرکت داشتند. افرادی نیز به‌عنوان آزمایشگر، هماهنگ‌کننده یا مشاهده‌کننده آموزش داده شدند (باز هم به نسبت مساوی از زن و مرد). پیش از دستکاری موقعیت‌های آزمایش، شرایط متعددی شامل: مزاح یا عدم مزاح، دستیار زن یا مرد و تقاضاهای با ارزش مالی پایین، متوسط یا زیاد برای نقاشی در نظر گرفته شد. آزمودنی‌ها به طور تصادفی به موقعیت‌های مختلف تخصیص داده شدند (تقسیم تصادفی). با یک نقشه قبلی همیشه آزمودنی در موقعیت «خریدار» و دستیار آزمایشگر در موقعیت «فروشنده» قرار می‌گرفت. هر شرکت‌کننده «آموزش‌های مقدماتی» را فرا می‌گرفت. برگه‌های توافق‌نامه، حاوی متن برنامه‌ریزی شده‌ای بود که جزئیات هر پیشنهاد مزایده را

1. Euthanasia
2. O'Quin & Aronoff

نشان می‌داد و با ۷۰۰۰۰ دلار شروع می‌شد، علاوه براین صحبت‌های کوتاهی درمورد مزایده را شامل می‌شـــد. آزمایش‌های مقدماتی آزمودنی‌ها، به یک شـــروع مزایده ۲۵۰۰۰ دلاری اختصـــاص یافته و توضیح داده شد که بعد از نخستین پیشنهاد، میزان مبلغ پیشنهادی بعدی هر میزانی می‌تواند باشد. طی معامله و چانه زنی‌ها، آزمایشگر کنار یک قفسه چوبی می‌نشست. مشاهده‌گران در اتاق مخصـــوص پشـــت آینه‌های یک‌طرفه قرار می‌گرفتند و هر بار خنده یا لبخند آزمودنی را روی یک مقیاس رتبه‌بندی۴ درجه‌ای ثبت می‌کردند. آن‌ها صـــحبت‌های هریک از آزمودنی‌ها را نیز ضـــبط می‌کردند. وقتی که شـــرکت‌کننده‌ها حدود ۱۰۰۰۰ دلار با هم چانه می‌زدند، بخش آزاد چانه‌زنی آن جلسه پایان می‌یافت. آنگاه آزمایشگر بحث را قطع می‌کرد و اعلام می‌کرد که وقت رو به اتمام است و باید سریعاً به توافق برسند. پس از اخطار وقت، بلافاصله دستیار آزمایشگر دستکاری مستقل را وارد می‌کرد. در شرایط عدم مزاح، دستیار اعلام می‌کرد: خوب پیشنهاد نهایی من ... دلار است. در شرایط مزاح، او با لبخندی می‌گفت: خوب پیشنهاد نهایی من ... دلار است و قورباغه دست‌آموزم را انداختم. میزان تقاضا متغیر بود، به این ترتیب که از آزمودنی درخواست می‌شد مبلغ کم، متوسط یا زیادی را اضـــافه کند؛ ســـپس چانه‌زنی ادامه می‌یافت. دســـتیار هر بار ۲۰۰۰ دلار به مزایده می‌افزود تا توافق نهایی حاصل می‌شد. بلافاصله بعد از جلسه شرکت‌کنندگان یک پرسشنامه پس‌آزمایشی با ۳۰ سؤال در مقیاس لیکرت را پر می‌کردند که پیرامون میزان عصبی شدن، تمایل به مشارکت، تمایل به کار، برداشت آن‌ها از خنده‌دار بودن موقعیت و محدودیت آزادی در معامله و چانه‌زدن بود.

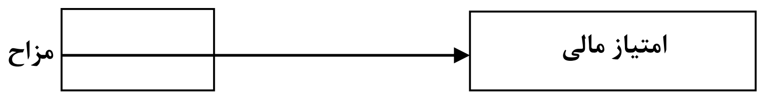
در تحلیل نتایج این آزمایش، محققان متغیر های زیادی را کنترل می‌کردند. نمونه‌ای از متغیرهای کنترل شامل جنسیت آزمایشگر و دستیار او، پایایی درونی کدگذاری خنده‌ها، متغیرهای مندرج در پرســـشـــنامه، میزان تعهد آزمودنی‌ها و عوامل دیگری که می‌توانســـت ایجاد اختلال کند، می‌شد هیچ کدام از این متغیرهای کنترلی تأثیر معنی‌داری بر مزایده نداشت.

مهم‌ترین نتیجه این تحقیق این بود که با کنترل این عوامل، آزمودنی‌ها در شرایط مزاح و شوخی نسبت به شرایطی که مزاح نبود مبالغ بیشتری را اضافه می‌کردند و دست و دلبازی بیشتری نشان می‌دادند. این تأثیر شـوخی برای شـرایط سـه‌گانه تقاضـا (کم، متوسـط و زیاد) و هر یک از گروه‌های جنســـی پایدار بود. البته خانم‌ها بیشـــتر می‌خندیدند یا لبخند می‌زدند و مردان دیرتر به توافق می‌رسیدند ولی در آخر هر دو به یک میزان افزایش مبلغ را نشان می‌دادند.

نتایج حاکی از آن است که مزاح و شوخی واقعاً می‌تواند باعث تأثیرگذاری بر دیگران شود. البته نباید چنین نتیجه‌گیری کنیم که رمز موفقیت در این است که هر تقاضایی را با یک جُک بیامیزیم تا کاملاً مورد قبول واقع شود، بلکه واضح است که باید زمینه‌ای را هم که در آن تلاش می‌شود در نظر گرفت. به هرحال در این تحقیق فرض تأثیر شـــوخی و مزاح بر پذیرش پیشـــنهاد، مورد تأیید قرار گرفت.

ما با این مثال تحقیقاتی شـروع کردیم، چون قالب‌بندی اصـلی تحقیق در اینجا **فقط** شـامل **دو خصیصه** است، مزاح و افزایش مبلغ در مزایده. یک رابطه علّی بین این دو خصیصه فرض شده است: استفاده از مزاح و شوخی باعث افزودن به مبلغ در مزایده می‌شود.

البته **خصـیصـه‌های دیگری** هم هسـتند که در این تحقیق نقش دارند؛ مانند جنسـیت، مبلغ چانه‌زنی، ۳۰ سؤال پرسشنامه و غیره. این خصیصه‌ها آشکارا در تحلیل مورد استفاده قرار می‌گیرند، اما در مسـأله اصـلی تحقیق فقط **به صورت ناآ شکار**، عمدتاً به‌عنوان عوامل کنترل وارد می‌شـوند. کنترل‌ها حتی از آنچه ذکر شـد نیز بیشـتر اسـت، زیرا توزیع تصـادفی آزمودنی‌ها به شـرایط مختلف آزمایشی (تخصیص تصادفی) تأثیر عوامل ناشناخته دیگر را تا حد تفاوت‌های شانسی کاهش می‌دهد. بنابراین، در واقع علاوه بر مهار عوامل‌های کنترلی (از طریق همتاسـازی) که آشـکارا در روند آزمایش طرح شده‌اند، عوامل ناشناخته‌ای هم هستند که بعداً از طریق تخصیص تصادفی خنثی می‌شوند. امّا ساختار اصلی مسأله تحقیق تنها یک عامل علّی و یک معلول را در برمی‌گیرد، چنان‌که در شکل ۳-۱ نشان داده شده است.



شکل ۳-۱ ساختار علّی دو متغیری

این تحقیق را می‌توان نمونه‌ای از یک آزمایش دقیق و کنترل شده بیان کرد که در واقع خارج از بحث این کتاب است. زیرا مسأله اساسی تحقیق تنها با دو خصیصه سر و کار دارد. در همه مثال‌هایی که بعد از این خواهد آمد، قالب‌بندی اصـلی متشـکل از سـه خصـیصـه یا بیشـتر خواهد بود و طبعاً تحلیل‌ها نیز مشـکل‌تر خواهند بود. لذا باید توجه داشـت که طرح این مثال تحقیقاتی اول، مبنایی خوبی است که همه طرح‌های بعدی از آن انشعاب پیدا می‌کنند.

۲-۲-۱ نداشتن فرزند

الگوی در حال تغییر باروری در ایالت متحده طی سال‌های گذشته و بعضی دلایل این تغییر در سطح وسیعی مورد بحث محافل جمعیت‌شناسی قرار گرفته است. یکی از دلایل این توجهات، گرایش رشد جمعیت به سـمت صـفر اسـت - میانگین خانواده‌های دو فرزندی در مقایسـه با میانگین خانواده‌های دارای سـه فرزند یک دهه قبل از آن. تغییر در **بی‌فرزندی** که جزئی از روند کلی‌تر باروری اسـت در تحلیل این روندهای باروری تقریباً نادیده گرفته شده است. گرچه در سال‌های اخیر این موضوع مورد توجه قرار گرفته اسـت که تعداد کمی از زنان، سـنین فرزندآوری خود را بدون تولد فرزندی سـپری

می‌کنند، روند بی‌فرزندی در سال‌های ۱۹۷۰ تا ۱۹۷۴ برای گروه‌های سنی مختلف فرق دارد. برای زنان ۳۰ ساله و بالاتر گرایش به کاهش فرزندآوری آشکار است، و تمرکز روی زنانی بوده که دوره بچه‌آوری شان را به پایان برده‌اند که باعث شده بعضی محققان بگویند، بی‌فرزندی داوطلبانه به‌زودی از بین می‌رود. اما برداشت عمومی این است که عدم تمایل به بچه‌داری در جامعه غرب در حال افزایش است، زیرا وضعیت و نقش زنان در حال تغییر بوده و شیوه‌های کنترل بارداری پیشرفت نموده است.

به نظر دو محقق به نام‌های جی. اف. یونگ و آر.آر. سِل رجوع می‌کنیم. از نظر ایشان ما با یک نوع تناقض و دوگانگی سر و کار داریم. به‌جای این‌که روال کار با ندا شتن بچه تنا سب دا شته با شد به‌نظر می‌رسد که در واقع عکس آن اتفاق می‌افتد. آن‌ها اضافه می‌کنند که این یک تناقض ظاهری است، زیرا در سیاهه‌های مربوط به آمار نفوس که شامل آمار زنان متأهل ۳۰ ساله و بالاتر در یک دوره زمانی طولانی مدت است، در واقع قالب‌بندی اعتباری نادرستی انتخاب شده است. به نظر می‌ر سد بخشی از تناقض نا شی از روندهای مختلف *ندا شتن فرزند* مادران در گروه‌های سنی مختلف با شد. زیرا در زنان گروه سنی ۳۰ ساله و بالاتر طی دوره ۱۹۴۰ تا ۱۹۷۴ در صد افراد ازدواج کرده‌ای که بی‌فرزند باقی‌مانده بودند تقریباً به‌طور مداوم کاهش یافته، اما در گروه‌های سنی جوان‌تر الگوی متفاوتی برقرار ا ست: تا ۱۹۶۰ این در صد کاهش یافته، امّا از آن به بعد رو به افزایش نهاده ا ست. این نتیجه باعث شد شماری از محققان در ایالات متحده شروع به مطالعه آمار نفوس و نمونه‌گیری‌های عمومی سال ۱۹۶۰ کنند و آن‌ها را با آمار ۱۹۷۰ مقایسه نمایند و تغییرات به‌وجود آمده (افزایش و کاهش) در درصد زنان بدون فرزند را به‌عنوان تابع تغییر در بعضی عوامل تبیین کننده به حساب آورند. یکی از این نوع تحقیقات در سال ۱۹۷۰ به‌وسیله دو محققی که قبلاً نام بردیم، یعنی جی .اف. یونگ و د، آر.آر سل انجام گرفته است. آن‌ها زنان ازدواج کرده‌ی سفیدپوست سنین ۱۸ تا ۴۰ سال را در دو نوبت یعنی سال‌های ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ مد نظر قرار دادند. واحد مورد برر سی یک ربع سال از سنین ۱۸/۰۰ تا ۴۰/۷۵ سالگی بود. به‌طوری که ۹۲ مقطع سنی از آن تفکیک گردید. برای این‌که خ صی صه‌ها، عملیاتی شود اختلاف مابین سال‌های ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ برای هر مقوله سنی اعمال شد. بدین معنی که یک خصیصه برحسب تغییرات آن طی یک دهه مورد محاسبه قرار گرفت. مثلاً خصیصه «تغییر در صد زنان بدون فرزند» دارای ۹۲ نمره ا ست که هر یک مربوط به یک مقوله سنی است و هر نمره تفاوت بین درصد زنان بدون فرزند در سال‌های ۱۹۷۰ و ۱۹۶۰ می‌باشد.

با توجه به مطالب فوق که بین واحدها، خصیصه‌ها، ویژگی‌های مختلف و اجزاء، تمایز قائل شدیم، در اینجا با یک مورد خاص سر و کار داریم، چون واحدها در این تحقیق در سطوح کلان واقع شده‌اند. واحدها افراد خاص نیستند بلکه ۹۲ گروه از افراد هستند. افراد هر گروه نیز دارای سن برابر در یک ربع سال می‌با شند. خ صی صه‌های واحدهای کلان به صورت تغییرات بین سال‌های ۱۹۶۰ و

۱۹۷۰ به شـــکل اختلاف میانگین‌ها و یا نســـبت‌ها اندازه‌گیری شـــده اســـت. این تفاوت‌ها اجزاء هر خصیصه هستند. براین اساس سطح اندازه‌گیری، کمّی می‌باشد.

چند عامل علّی را برای تبیین بی‌فرزندی انتخاب می‌کنیم:

X_1 = تغییرات درصد مشارکت نیروی کار طی یک دهه.

X_2 = تغییرات میانگین تعداد سال‌های تکمیل مدرسه در یک دهه.

X_3= تغییرات درصد ازدواج های از هم گسیخته در یک دهه.

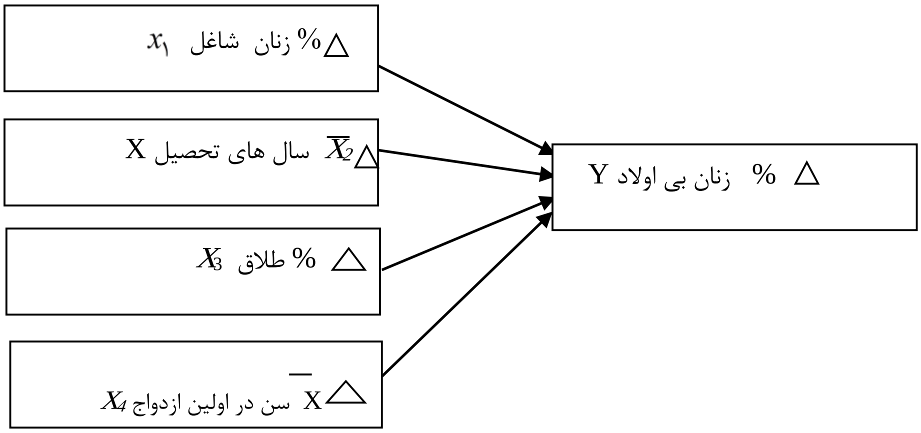
X_4= تغییرات میانگین سنی اولین ازدواج در یک دهه.

خصیصه بی‌فرزندی نیز عبارت است از:

Y= تغییرات درصد زنان بی اولاد در یک دهه

قالب‌بندی ا سا سی این تحقیق **ساختار علّی همگرا** ا ست، به صورتی که در شکل (۴-۱) نشان داده شده است. این ساختار را همگرا نامیده‌ایم، زیرا علت‌ها زیاد هستند و تنها یک معلول وجود دارد، طوری که همه پیکان‌ها به یک نقطه منتهی می شوند. این حالت برعکس و ضعیت واگرا ا ست که در آن یک علت و چندین اثر (معلول) وجود دارد. خصـــیصـــه‌ای که تبیین می‌شـــود Y یعنی تغییر در بی‌فرزندی اســـت. عامل‌های تبیین کننده، خصـــیصـــه‌های $X_۱$ تا $X_۴$ هســـتند. پیکان‌ها روابط علت و معلولی را ن شان می‌دهند. عوامل علّی در ا صل م ستقل فرض می شوند، به این معنی که افزودن یک عامل جدید موجب تبیین بی شتر پدیده بی‌فرزندی خواهد شد. چون اگر فرض کنید متغیرهای $X_۲$ و $X_۴$ خیلی باهم همب سته‌اند، از آنجا که زنان ازدواج کرده در سنین پایین از سطح تح صیلات پایینی برخوردارند، در این صـــورت افزودن $X_۲$ به $X_۴$ به تبیین مســـأله بی‌فرزندی کمک قابل ملاحظه‌ای نخواهد کرد، چنان‌که بین عامل‌های علّی همپو شی وجود خواهد دا شت. به عبارت فنی‌تر، می‌گوییم **نباید هم‌خطی**[1] باشد.

1. Malticollinearity



شکل ۴-۱ ساختار علّی همگرا

همچنین نباید به گونه‌ای باشد که عوامل علّی تأثیرات خود را به صورت «ترکیبی» اجرا کنند. انتظار می‌رود که هر یک از این عوامل دارای قدرت تبیین کنندگی «مستقلی» باشد، به طوری که مجموعه‌ی عوامل، یک تبیین کلی از پدیده را ارائه کنند. یعنی مدل مفهومی مورد بحث یک مدل **افزایشی**[1] است.

این قالب‌بندی اساسی ساختار علّی همگرا، در علوم اجتماعی حاکم است. نه تنها افزایش بی‌فرزندی، بلکه تغییرات اجتماعی متعدد، مثل، افزایش جرم و جنایت، عدم تساوی درآمدها، آلودگی محیطی، خودکشی، بیکاری جوانان و غیره نیاز به تبیین علّی همگرا از نوع چند علّتی را نشان می‌دهند. این موقعیت اجتماعی جدید به عنوان یک وضعیت عدم تعادل تجربه می‌شود و شماری عوامل علّی در نظر گرفته می‌شوند تا تبیینی از این وضعیت نابسامان را فراهم آورند.

۳-۲-۱ عقاید مسیحیت و یهودستیزی

اصول اخلاقی مسیحیت، برادری انسان‌ها را تحت تأثیر قرار داده است. با این وجود، طبق تحقیقات پیش‌داوری (تعصب) در بین مسیحیان بسیار شایع است و حتی در بین اعضاء کلیسا بیش از سایرین وجود دارد. امروزه یک جنبه از ارتباط بین پیش‌داوری و مذهبی بودن، ناشی از اعتقادات مسیحیت در ایجاد یهودستیزی است.

تحقیقات گذشته به نتایجی چند در این زمینه نائل آمده‌اند، از جمله این‌که دو عامل توضیح دهنده: الهیات و تعالیم چیره هستند. عناصری که در الهیات مسیحیت وجود دارد و منجر به

1. Additive
2. spurious

یهودســـتیزی می‌گردد تصـــویر طرد کردن عیســـی توســـط یهودیان اســـت که در کتاب عهد جدید مسیحیان آمده است. زمینه‌های تاریخی این حالت یهودستیزی در تاریخ غرب به خوبی نشان می‌دهد که چگونه کتاب عهد جدید این موضـوع را ترویج داده اسـت. عناصـر یهودسـتیزی در تعالیم امروزی کلیسا هم به وضوح موجود است. تحلیل محتوای نشریه ساندی اسکول و دیگر نشریات کلیسا اعم از پروتستان و کاتولیک، دارای تصاویر بسیار منفی از یهودیان می‌باشد.

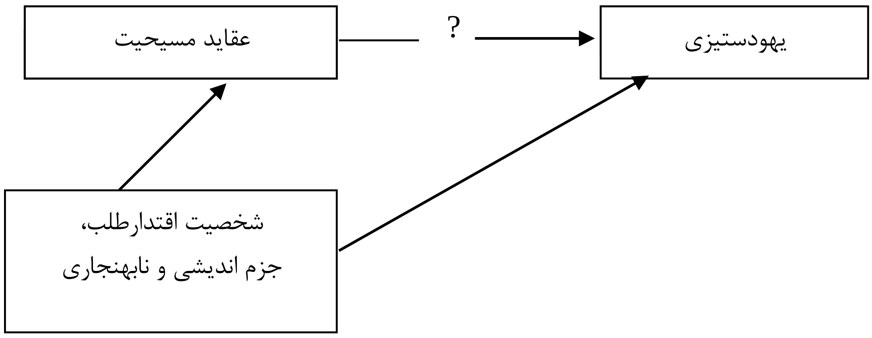
وجود چنین نگاه‌های منفی به یهودیان در کتاب عهد جدید یا در نشریات جاری مسیحیان، ثابت نمی‌کند که اعتقادات مسیحیان منبع مهمی از برای یهودستیزی سکولار در جامعه امروزی ما است. بســـیاری از مســـیحیان آگاهی و ارتباط کمی با آموزش‌های کتاب عهد جدید دارند. و حتی چنانچه بتوان اثبات کرد که داشـتن عقاید خاصـی درباره یهودیان، با یهودسـتیزی سـکولار امروزی در رابطه ا ست باز هم ممکن ا ست رابطه، **علت و معلولی نبا شد بلکه ت صنّعی[۲] با شد**. همی شه این امکان وجود دارد که عوامل دیگری مثل عوامل اقتصـادی، اجتماعی و روان‌شـناختی هم منشـاء اعتقاد به مسیحیت و هم یهودستیزی باشند.

محققان زیادی درباره این حالت تصنّعی(غیر واقعی) به تحقیق پرداخته‌اند. آن‌ها برشمار زیادی از عواملی که می‌توانند رابطه علّی بین مذهب و یهودسـتیزی را تحت‌الشـعاع قرار دهند تأکید کرده‌اند. سطح تحصیلات، شغل سرپرست خانوار، درآمد، محل سکونت، سن، جنس و گرایش‌های سیاسی، به عنوان متغیرهای کنترلی علوم اجتماعی بکار گرفته شده‌اند، با این وجود، درنهایت همب ستگی برقرار بوده ا ست. از این مهم‌تر، شماری از مقیاس‌های روانی- اجتماعی همچون اقتدارطلبی و جزم‌اندی شی بودند. بســیاری مطالعات تحقیقی نشـــان از این دارند که اغلب روابط بین متغیرهای مذهبی و یهودستیزی توسط این خصایص شخصیتی به طور غیر واقعی ایجاد شده‌اند.

قالب‌بندی اصلی این تحقیقات از نوع علّیت تصنّعی است، چنان که در شکل ۵-۱ نشان داده شده است.

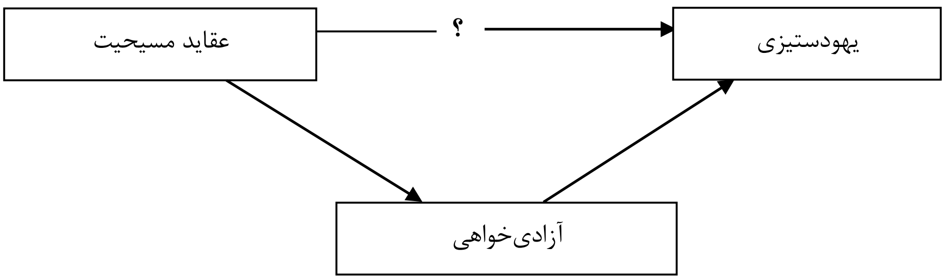
علامت سؤال در شکل ۵-۱ حاکی از آن ا ست که رابطه فرض شده اولیه، علت ظاهری ا ست. در ست ا ست که بین اعتقاد به م سیحیت و یهود ستیزی رابطه وجود دارد، اما نباید آن را یک رابطه علت و معلولی م ستقیم دان ست. مادامی‌که علّیت مد نظر با شد ویژگی‌های روانی-اجتماعی (تع صب و غیره) یهودســتیزی (علّیت جایگزین) ایجاد می‌کنند: شــخصــیت‌های متعصــّب از یهودیان متنفرند. شخ صیت‌های غیر متع صّب چنین تنفری ندارند یا کمتر دارند. همین خ صی صه‌های شخ صیتی نیز اعتقادات مذهبی را بوجد می‌آورند: شــخصــیت‌های متعصــّب نســبت به اعتقادات مســیحیت تمایل بی‌شتری ن شان می‌دهند تا شخ صیت‌های غیر متع صّب. بدین طریق رابطه مذهب و یهود ستیزی در واقع به و سیله ویژگی‌های روانی- اجتماعی تحت‌ال شعاع قرار می‌گیرد. در ست ا ست که روابط برقرار

است، امّا در بیان علّیت آن باید از جنبه این ویژگی‌ها به آن نگاه کرد (علت در این خصایص نهفته است).



شکل ۵-۱ علّیت تصنّعی

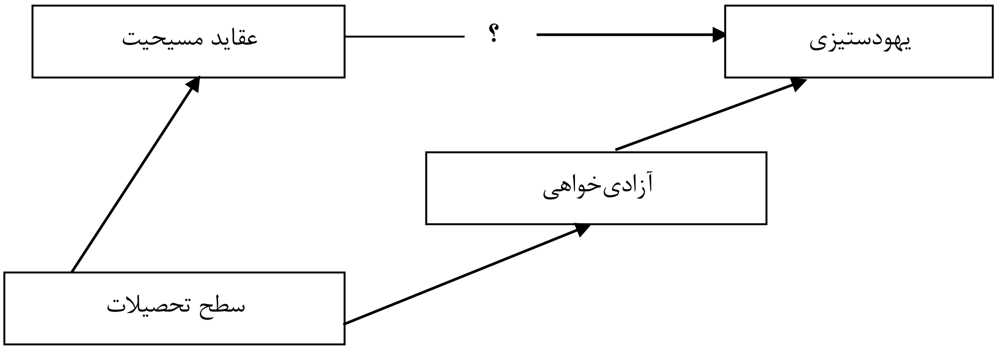
البته موضوع یهود ستیزی بسیار پیچیده‌تر از آن است که به سادگی تبیین شود. در این جا بخشی از یک مطالعه که توسط هوگ و کارول (۱۹۷۵) در آمریکا انجام شده را برای ترسیم ساختار علّی تصنّعی بازگو می‌کنیم. در مطالعه مشابهی قالب‌بندی دیگری از نوع **علیت غیرمستقیم** مورد آزمایش قرار گرفته است. فرض بر این است که هر چند مذهب ارتدکس علت مستقیم یهود ستیزی نیست، اثر علّی به طور غیرمستقیم و از طریق عوامل واسطه‌ای عمل می‌کنند. نمونه‌ای از این عوامل، طرفداری از آزادی‌های فردی است. هواداری از عقاید مسیحیت به معنی عدم تمایل به طرفداری از آزادی‌های فردی است و یک نگرش غیرلیبرال، یهودستیزی را ایجاد می‌کند. شکل ۶-۱ این ساختار علیت غیر مستقیم را نشان می‌دهد.



شکل ۶-۱ علّیت غیرمستقیم

در تحقیق هاگ و کارول قالب‌بندی شکل‌های ۵-۱ و ۶-۱ ترکیب شده و مدل پیچیده‌تری حاصل آمده است. مثلاً به نظر می‌رسد سطح تحصیلات و سن، نقش مهمی در بیان رابطه ایفا می‌کنند، اما این علّیت تصنّعی به طور غیرمستقیم با اعتقاد به آزادی‌خواهی پیوند می‌خورد. بنابراین

ترکیبی از دو قالب‌بندی باید مورد توجه قرار گیرد، بدین ترتیب که: از یک‌سو افراد تحصیل کرده از آزاداندیشی بیشتری برخوردارند و کمتر یهود ستیز هستند و از سوی دیگر تحصیل کرده‌ها تمایل کمتری به اصول کلیسا دارند. شکل ۷-۱ تجسمی از این قضیه پیچیده را ارائه می‌دهد.



شکل ۷-۱ ترکیب علّیت تصنّعی و غیرمستقیم

این دو قالب‌بندی اساسی در علوم اجتماعی بسیار با اهمیت هستند. جستجوی عواملی که بتوانند رابطه فرض شده اولیه (علیت تصنّعی) را توضیح دهند، یا به توضیح آن (علیت غیرمستقیم) کمک کنند، یک فعالیت مهم تلقی می‌شود که کیفیت علمی‌تحقیقات علّی را بالا می‌برد.

توجه خوانندگانی که مایلند تمایز این قالب‌بندی را بیشتر تمرین کنند، به مثال‌های اضافی زیر جلب می‌کنیم، که مورد اوّل عامل علّی و دومی عامل معلول و سومی عامل پیش‌بین یا کنترلی میانجی است:

- پایگاه اجتماعی، تعداد فرزندان، تأثیر برنامه‌های کنترل بارداری.
- وضعیت تأهل، گریز از کار، تعداد فرزندان.
- ورشکستگی، خودکشی، سن.
- انگیزش، پیشرفت، حضور در سخنرانی‌های علمی دانشکده.
- وضعیت تأهل، گریز از کار، سن.
- سطح تحصیلات، مدت گذراندن تحصیلات در خارج، درآمد.
- مصرف کره، حمله قلبی، ساکن شمال یا جنوب بلژیک.
- فراوانی برخورد با لک‌لک‌های سفید، مرتبه تولد، روستانشینی.

۴-۲-۱ پاداش‌های خارجی و انگیزش درونی

آیا پاداش‌های خارجی مثلاً پولی، بر انگیزش درونی تأثیر می‌گذارند؟ این موضوع محور مباحث زیادی در بین روان‌شناسان بوده است. باورهای سنتی بر این است که پاداش‌های درونی و بیرونی بر انگیزش درونی تأثیر افزایشی دارند. یعنی آگاهی از این که انجام یک عمل با میزانی از پاداش‌های پولی همراه ا ست موجب افزایش انگیزه درونی می شود، حتی اگر فرد در حال حا ضر به خاطر پاداش‌های درونی فعالیت (مثلاً ر ضایت عقلانی، خود شکوفایی و نظایر آن) برانگیخته با شد. به نظر می‌ر سد یافته‌های اخیر این باور سنتی را نقض می‌کند. در واقع شواهد حاکی از آن است که پاداش‌های خارجی غیرمنتظره موجب کاهش انگیزش درونی می‌گردد.

انگیزش درونی معمولاً این‌گونه تعریف می‌شود: انگیزه انجام یک کار یا فعالیت، زمانی که پاداش مشهودی برای آن کار وجود ندارد، به جز آنچه مستقیماً از انجام خود آن عمل حاصل می‌شود. از سوی دیگر انگیزش خارجی به عنوان انگیزه انجام یک کار یا فعالیت به‌منظور کسب پاداش‌های خارجی تعریف می‌شود.

انگیزش درونی به شیوه‌های متفاوتی قابل مشاهده است. برای این منظور می‌توان از نوعی مقیاس‌های رفتاری استفاده کرد، مثلاً چه میزان از وقت آزاد صرف آن کار می‌شود. البته مقیاس‌های نگرش‌سنجی نیز کاربرد دارند، مثلاً چه میزان علاقه برای انجام یک کار وجود دارد. مقیاس‌های رفتارسنجی و نگرش‌سنجی نتایج مشابهی را نشان داده‌اند: آزمودنی‌هایی که پاداش پولی غیرمنتظره دریافت می‌کردند تا کاری را انجام دهند انگیزش درونی کمتری را برای انجام آن کار نشان دادند تا کسانی‌که هیچ گونه پادا شی دریافت نمی‌کردند. تحقیقات دیگری نیز همین تأثیر را در مورد کودکان شیرخوارگاه، مدارس ابتدایی، دانش‌آموزان دبیرستانی و دانشجویان نشان داده است.

تئوری ارزیابی شناختی می‌گوید رفتاری که به طور درونی برانگیخته شده، رفتاری است که به فرد فرصت می‌دهد تا احساس شایستگی و خودمختاری کند. وقتی که پاداش خارجی وارد می‌شود مرکز علّیت ادراک شده‌ی جای خود را از درون شخص به پاداش بیرونی می‌دهد. در این مواقع فرد احساس خودمختاری نمی‌کند و انگیزش درونی کاهش می‌یابد. اگر این تغییر حالت در مرکز علیت پیش نیآید و آنگاه پاداش خارجی برداشته شود، توجیه اصلی انجام آن کار هم از بین می‌رود.

تحقیقی که در این جا ارائه می شود بسط تحقیقی ا ست که در گذ شته صورت گرفته ا ست. در این تحقیق متغیرهایی که قبلاً نادیده گرفته شده بودند مورد توجه قرار گرفته‌اند. در این جا نوع و ساختار تکلیف مد نظر قرار گرفته است. وقتی که نوع تکلیف مورد توجه قرار می‌گیرد، بین تکلیفی که لذت بخش است و تکلیف خسته‌کننده باید تمایز قائل شد. هرچند پاداش‌های مادی در جهت کاهش انگیزش درونی در تکالیف، جالب توجه هستند، اما در تکالیف خسته‌کننده این پاداش‌ها موجب افزایش انگیزش درونی می شوند. علاوه بر این زمانی که پاداش به‌عنوان بخشی از خود تکلیف منظور شود (مثل بازی پوکر) این پاداش می‌تواند منجر به افزایش انگیزش فرد گردد.

این نتایج را می‌توان در قالب مدل تأثیر مستقیم نیز تفسیر نمود. وقتی‌که اثرات منفی یک تغییر بر مرکز علّیت فرد حداقل باشد (مثل تکالیفی که رغبت اولیه آن‌ها کم است) یا از آن جلوگیری شده باشد (مثل تکالیفی که پاداش در آن‌ها اجتناب‌ناپذیر است) تأثیر عمده پاداش‌ها، تداعی اثر لذت (برانگیخته شده بوسیله پاداش) با تکلیف است، بنابراین جذابیت تکلیف افزایش می‌یابد. وقتی این تغییر حالت اساسی باشد (مثل تکالیف جالب توجه)، اثر آن معکوس است.

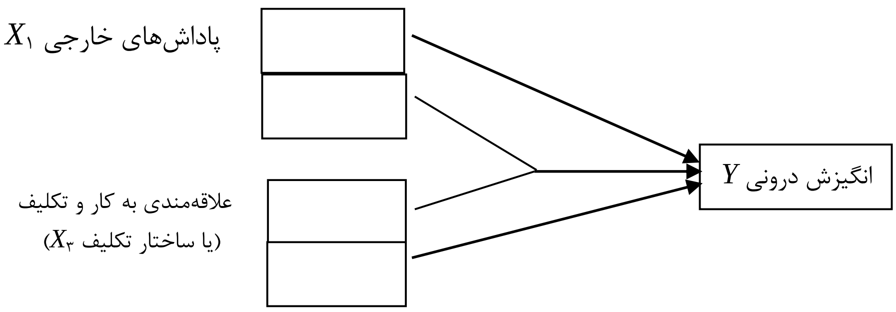
ویژگی دیگر تکلیف، ساختار آن است. ساختار تکلیف اشاره به شیوه ارائه آن توسط سرپرست دارد که فعالیت‌های کاکنان را تعریف و سازمان‌دهی می‌کند و از طریق آن، نقشی که کننده کار باید انجام دهد را طرح‌ریزی می‌کند. در شرایطی که تکلیف دارای ساختار سطح بالایی می‌باشد، افراد آزادی عمل چندانی ندارند. به آن‌ها دستورالعمل‌های کتبی‌ای ارائه می‌شود که حاوی مقررات صریحی است و جزئیات شیوه‌های مورد استفاده را تعیین می‌کند. درمقابل در تکلیفی که ساختار سطح پایینی دارد افراد می‌توانند به هر طریقی که مؤثر بدانند عمل کنند.

تحقیقی که به وسیله تی.ال.دانیل و جی.کی. اِسر (۱۹۸۰) انجام گرفت، نشان داد پاداش‌های خارجی در تکالیف سطح پایین، سبب کاهش معناداری در انگیزش درونی می‌شوند. اما در تکالیف سطح بالا، پاداش‌های مادی بر انگیزش درونی چنین تأثیری را نشان نمی‌دهند. بسیاری بر این باورند که اجبارهای خارجی که در تکالیف سطح بالا نهفته است، یک مرکز کنترل خارجی را به وجود می‌آورد (تأثیری که طبق تئوری ارزیابی شناختی، پاداش‌ها را هم‌تراز می‌کند). علاوه بر این، نظرات فوق بر این است که تدارک یک پاداش خارجی برای کار روی یک تکلیف با ساختار سطح بالا، نمی‌تواند انگیزش درونی را بیشتر تحت تأثیر قرار دهد، چون مرکز کنترل در حال حاضر خارجی است (مثل تکالیف کسل‌کننده). در تکالیف سطح پایین عکس این موضوع صادق است.

تحقیق فوق متمرکز بر روابط بین پاداش‌های خارجی (X_1) و انگیزش درونی (Y) است. جذابیت تکلیف (X_2) و ساختار تکلیف (X_3) در این قضیه نقش بسیار مهمی را ایفا می‌کنند. آن‌ها صرفاً عوامل کنترلی نیستند، بلکه تقریباً یک نوع اصلاحاتی را در رابطه بین X_1 و Y به همراه دارند.

قالب‌بندی اساسی این قبیل استدلال‌ها همان **ساختار تعاملی**[1] است، چنان که در شکل ۸-۱ نشان داده شده.

1. Interactive structure



شکل ۸-۱ ساختار تعاملی

قالب‌بندی ساختار تعاملی از همه قالب‌بندی هایی که قبلاً گفتیم پیچیده‌تر است. این قالب‌بندی نه تنها بیانگر این است که X_1 یک تأثیر علّی بر Y دارد و X_2 (یا X_3) به سبک دیگری تأثیرات اضافی بر y دارد، بلکه ترکیب X_1 و X_2 نیز مد نظر اســـت و تأثیرات این ترکیب‌ها بر Y نیز مورد بحث می‌باشد.

ترکیب«پاداش خارجی، تکلیف جذّاب» بر انگیزش درونی، یک اثر منفی دارد. ترکیب «پاداش خارجی، تکلیف کســل کننده» بر انگیزش درونی اثر مثبت دارد. عدم وجود یک پاداش خارجی وقتی با یک تکلیف جذاب ترکیب شود، انگیزش بالایی را به دنبال دارد و وقتی‌که با یک تکلیف کسل‌کننده ترکیب شــود به انگیزش کمی منجر می‌شــود. بنابراین، آنچه که ســاختار تعاملی را مشــخص و ویژه می‌گرداند این اســت که تأثیر عامل X_1 بر Y نه تنها به خودی خود، بلکه همراه با ترکیب آن با عامل دیگری به نام X_2به اجرا درآمده است.

برای علوم اجتماعی این بحث که به موازات قالب‌بندی ساختار تعاملی می‌آید، بسیار مهم است امّا د ست کم گرفته شده ا ست. محققان اغلب فراموش می‌کنند که روابط بین پدیده‌های اجتماعی نباید به تنهایی مورد مطالعه قرار گیرند بلکه باید در ترکیب با عوامل و شرایط زمینه‌ساز بررسی شوند.

مثال دیگری از تعامل، تأثیر ترکیبی جنسیت و ر شته تحصیلی بر موفقیت و شکست در سال اول تحصیل در دانشگاه ا ست. دانشجویان پسر نسبت به دختران احتمال موفقیت بیشتری دارند (تأثیر جنسیت) و دانشجویان علوم پایه نسبت به دانشجویان علوم اجتماعی شانس موفقیت بیشتری دارند (تأثیر ر شته). علاوه بر اثرات جداگانه، ترکیب جنس و ر شته تحصیلی نیز باید مورد توجه قرار گیرد. پســران در علوم پایه و دختران در علوم اجتماعی شــانس موفقیت بیشــتری دارند تا دختران در علوم پایه و پسران در علوم اجتماعی (تأثیر تعاملی).

۵-۲-۱ همسایگان فقیر و غنی

هر کس می‌تواند تصـــویری از مناطق ویلایی ثروتمندنشـــین و محلّه‌های پرجمعیت فقیرنشـــین در شـــهرهای بزرگ را تجســـم کند. وقتی که در این مناطق قدم می‌زنیم ابتدا به شـــکل و ظاهرشـــان بر می‌خوریم: شهر سازی، کیفیت تکنیکی و نواقص آن، استحکام ساختمان‌ها، زمین‌های بازی کودکان، میزان فضای سبز عمومی و مطبوع بودن ناحیه. آنچه که مشاهده نمی‌شود امّا بدون شک نقش مهمی برعهده دارد تفاوت سطح درآمد و سطح تحصیلات ساکنین و وضعیت شغلی و سن و ملّیت آن‌ها است. همچنین وضعیت خدمات آموزشی، خدمات اجتماعی و بهداشتی آن‌ها بر ما پوشیده است. البته انتظار داریم همه این‌ها در مناطق ثروتمندنشین عمدتاً رضایت‌بخش باشد، ولی در مناطق فقیرنشین چندان دل‌چسب نباشد. به عبارت دیگر با نوعی تبعیض سر و کار داریم.

این حقیقت که گروه‌های خاصـــی از جمعیت به گروه‌های دیگری برتری دارند، به ویژه زمانی که میزان تبعیض هم بسیار زیاد است، ما را به اصول اخلاقی مساوات (عدم مساوات) اجتماعی سوق می‌دهد. از نظر ما دولت باید گروه‌های دارای کمترین شـــانس را برای کمک‌های خود در اولویت قرار دهد. یک تمایز مثبت این اســـت که برای گروه‌هایی که از ســـطح زندگی پایین‌تری برخوردارند تســـهیلات بیشـــتری قائل شـــویم. با توجه به موضـــوع همســـایگان، این بدان معنی اســـت که اقدامات سیاسی باید به سمت کار اجتماعی در موقعیت‌هایی باشد که از کمترین شانس برخوردارند.

اگر خواستار انجام چنین سیاست‌هایی از سوی دولت هستیم، لازم است طرح‌هایی را پیاده کنیم تا بر پایه آن همســـایگان فقیر از دیگران تشـــخیص داده شـــود. به عبارت دیگر لازم اســـت متمایزسازی به طور واقعی طرح‌ریزی شود. این طرح نیازمند یک کار فشرده علمی است که معیار فقر و ثروت را دقیقاً تعریف کند؛ مناطق جغرافیایی مختلف تعیین شـــوند و اطلاعات آماری قابل مقایســـه در آن مناطق جمع‌آوری گردد.

نمونه‌ای از این تحقیق علمی توسط اف. پرووست[1] (۱۹۷۹) درباره همسایگان در بخش هلندی زبان بلژیک و بخش سرمایه‌دارنشین بروکسل انجام شده است. به منظور تمایز بین ساکنین فقیر و غنی، شاخص‌های وضعیت مالی (سطح درآمد)، وضعیت تحصیلی (سطح تحصیلات، ادامه تحصیل)، وضعیت شغلی (جایگاه شغلی)، وضعیت منزل (محل سکونت، شهرسازی محل، استحکام ساختمان، میانگین فضای مسکن و اتاق‌ها، تعداد خط تلفن، آرام یا شلوغ بودن محل زندگی)، مشارکت (میزان مشارکت ساکنین در تصمیم‌گیری‌ها) و وجود خدمات اجتماعی و کارکرد آن‌ها (شامل مواردی چون آموزش و پرورش، فضـــای ســـبز، زمین بازی کودکان، مطبوع بودن محل، مراقبت‌های بهداشـــتی و اجتماعی) مورد استفاده قرار گرفت. بعضی شاخص‌های ویژه دیگر در رابطه با مسائل روانی- اجتماعی، نوسازی شهری و حضور جمعیت‌های فرعی خاص نیز در این تحقیق لحاظ شد، زیرا به نظر می‌رسید

1. F. Provoost

همسایگانی که مسائل خاصی همچون تمرکز زیاد کارگران خارجی دارند ممکن است فقر و نابسامانی بالایی را نشان دهند.

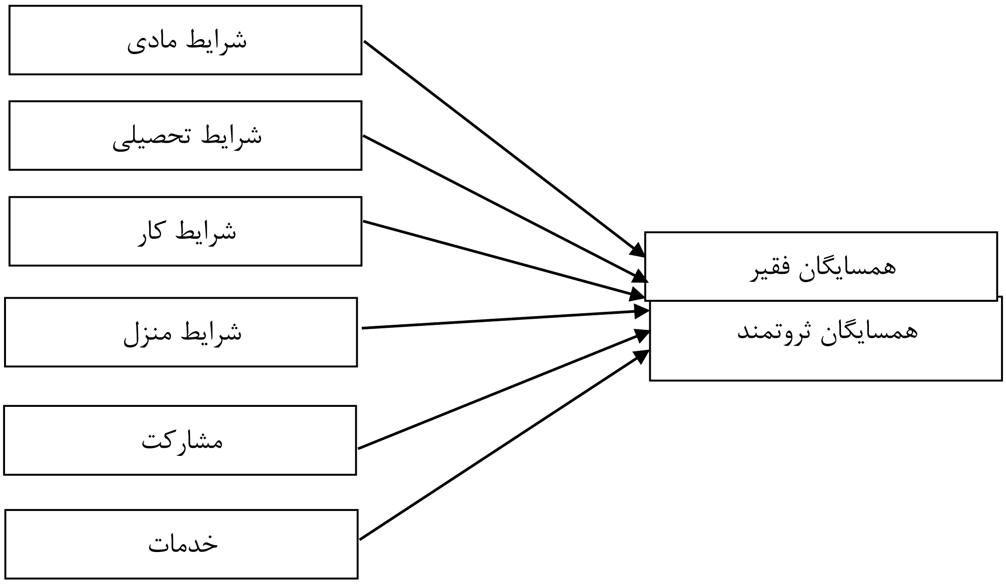
این تحقیق با تمایز گروه‌های جمعیتی ســـر و کار دارد. بنابراین قالب‌بندی اصـــلی **ســـاختار افتراقی**[1] نامیده می‌شود. تصویر آن در شکل ۹-۱ ارائه شده است.

ا ستدلال ساختار تمایز شامل سه بخش ا ست: د سته‌بندی مقدماتی گروه‌ها، تجزیه و تحلیل خصـایص متمایز کننده و دســته‌بندی موارد جدید. اجازه دهید به مطالبی که پیرامون اقامت‌گاه‌های محل ســکونت مرور کردیم باز گردیم. ما به طور خودانگیخته یک دســته‌بندی از دو گروه فقیر و غنی ارائه کردیم. این **مرحله نخ ست** بود. البته یک مطالعه علمی، بر ا ساس اح سا سات نخواهد بود، بلکه تقسیم‌بندی اولیه را با رجوع به نظر داوران (کسانی‌که دانش لازم را دارند) انجام می‌دهیم.

مرحله دوم تجزیه و تحلیلی اســـت که از طریق تعداد زیادی خصـــایص متمایز کننده صـــورت می‌گیرد: و ضعیت مالی، و ضعیت م سکن و غیره. تجزیه و تحلیل تمام داده‌های آماری مذکور برای هر یک از همسایگان، ما را قادر می‌سازد تقسیم‌بندی اولیه خود را اصلاح کنیم. یعنی قادر به بازبینی این نکته خواهیم بود که آیا خصایص متمایز کننده، واقعاً دو گروه مورد نظر را از یکدیگر تفکیک می‌کنند. مثلاً معلوم می‌شـود که یک خصـیصـه (مثل موقعیت شـغلی) بهتر از خصـیصـه دیگر (مثلاً سـطح تح صیلات) ظرفیت این کار را دارد. بحث ما همچنین شامل این مورد خواهد بود که یک جمع‌بندی از خصـــایص، تمایز بهتری را به همراه دارد تا هر یک از خصـــایص به طور جداگانه؛ زیرا فقیرترین همســـایگان در تمام خصـایص کمترین نمره را خواهد داشـــت و بالعکس. از آنجا که خصـایص توان متمایزســـازی یکســـانی ندارند، مایل خواهیم بود به هر یک وزنی را اختصـــاص دهیم که بازگوکننده ظرف یت مت مایز کن ندگی آن باشـــد. با به حســـاب آوردن این وزن ها می‌توانیم یک وزن جمعی از خصـــایص داشـــته باشـــیم. این وزن جمعی معتبرترین ابزار تمایز بین شـــهروندان خواهد بود.

بدین ترتیب به **مرحله ســـوم** بحث یعنی طبقه‌بندی موارد جدید می‌رســـیم. با به کارگیری ابزار خود می‌توانیم تعیین کنیم یک شـــهروند جدید که در تحلیل ما قرار نداشـــته، فقیر یا غنی اســـت. برای این کار کافی اســت نمرات مربوط به ســطح درآمد وی، تحصــیلات او و دیگر خصــایص متمایز کننده را جمع‌آوری کنیم تا به وزن جمعی د ست یابیم. طرح‌ریزی کردن، بخ شی از این مرحله سوم است.

1. discrimination structure



شکل ۹-۱ ساختار افتراقی

به طور خلاصه در یک تحقیق با ساختار تمایزی و در بررسی علمی خصایصی که بین گروه‌های جمعیّتی در یک جامعه تمایز برقرار می‌کنند، استدلالی را که شامل سه مرحله است دنبال می‌کنیم. اول سعی می‌کنیم تا حد ممکن یک دسته‌بندی مقدماتی معتبر از گروه‌ها به‌عمل آوریم. سپس، اطلاعات آماری را برای شمار زیادی از خصیصه‌ها جمع‌آوری می‌کنیم و با شیوه‌های آماری این خصایص را تجزیه و تحلیل می‌کنیم تا یک وزن جمعی به دست آوریم. در مرحله سوم چنان چه تحلیل‌های مرحله دوم موفقیت‌آمیز بود (وزن‌های خصایص و جمع آن‌ها معنادار بود) ابزار خوبی جهت طبقه‌بندی موارد جدید در یکی از گروه‌ها در دست داریم.

۶-۲-۱ سازگاری زناشویی

سازگاری زناشویی به صورت وجود بعضی ویژگی‌ها در یک ازدواج تعریف شده که نشانگر تمایل به دوری از تعارض‌ها یا حل آن هاست، مثل احساس رضایت از ازدواج و با یکدیگر بودن، شرکت در علایق و فعالیت‌های مشترک، و برآورده کردن انتظارات زناشویی زن و شوهر. این تعریفی است عملیاتی که به وسیله یک آزمون سازگاری زناشویی سنجیده می‌شود. بقیه کار، پرسش‌هایی است که از زن و شوهر درباره نحوه ارزیابی آن‌ها و احساس شان در باره ازدواج پرسیده می شود. این سؤالات مربوط به اوقات فراغتی که با هم می‌گذرانند، انتخاب دوستان، جنبه‌های مالی، موضوعات مذهبی، روابط جنسی، خصایص، اهداف زندگی و موضوعات مشابه است. حالا وقتی که ما این موضوع‌ها را در ذهن خود جمع کنیم به چه جمع‌بندی می‌رسیم؟ ممکن است از این که بتوان همه این سؤالات را

در یک سؤال خلاصه کرد تعجب کنیم: مثلاً «زندگی برای هر دوی شما چگونه می‌گذرد؟» به عبارت دیگر مایلیم بدانیم آیا همه شاخص‌های خاص سازگاری زناشویی چیز نسبتاً مشابهی را اندازه‌گیری می‌کنند. زیرا اگر چنین باشد تفاوتی نمی‌کند که از زوج‌ها چه سؤال شود. اگر سازگاری برقرار باشد آن‌ها به همه سؤالات جواب مثبت می‌دهند و برعکس. امّا البته امکان دارد که آزمودنی‌ها را به زیر گروه‌های جمع‌ناپذیر تقسیم کنیم، طوری که اندازه‌های این شاخص‌ها در درون هر زیر گروه تقریباً یکسان باشد اما بین زیرگروه‌ها فرق کند. این بدین معناست که مفهوم سازگاری زناشویی چنان که از صحبت پاسخگویان بر می‌آید به تعداد معینی ابعاد متفاوت تقسیم می‌شود.

یک چنین تحقیقی توسط لاک و ویلیامسون[1] (۱۹۵۸) انجام گرفته است. آزمودنی‌ها متشکل از یک نمونه ۳۴۹ زوجی، شامل ۱۷۸ زن و ۱۷۱ شوهر بودند. به منظور تجانس بیشتر، افراد ۵۰ ساله و بالاتر کنار گذاشته شدند. نمونه گیری از سه منطقه اجتماعی در لوس آنجلس به عمل آمد: یک ناحیه مربوط به طبقه پایین، یک ناحیه از طبقه متوسط پایین و یک ناحیه از طبقه متوسط بالا با تعداد مساوی نمونه از هر ناحیه. آزمون سازگاری زناشویی از ۲۰ سؤال زیر تشکیل شده بود:

X_1 : روی مقیاس از ۱ تا ۵ درجه‌ای معین کنید بهترین توصیف از وضعیت زناشویی شما کدام است.

X_2: فکر می‌کنید کدام‌یک از موارد نام برده شده‌ی زیر، در وضعیت زناشویی شما مشکلاتی جدّی ایجاد می‌کند: سعی در کنترل هزینه‌های خود، صمیمی نبودن، انتقاد شدید، تنگ نظری و بی‌صبری، صداقت نداشتن، به دیگری نظر داشتن، به راحتی تحت تأثیر حرف دیگران قرار گرفتن، اختلافات عقیدتی و مذهبی، داشتن تفریحات و سرگرمی‌های متفاوت، نداشتن دوستان مشترک، بیماری، دعوا و پرخاش مداوم، بی‌علاقگی به یکدیگر، خودخواهی، بی‌عفتی، موارد دیگر.

$X_۳$: تا چه حد با همسرتان جنگ اعصاب راه می‌اندازید؟

$X_۴$: آیا هیچ گاه آرزو می‌کنی که ازدواج نکرده بودی؟

$X_۵$: اگر می‌توانستی زندگی خود را از سر بگیری، فکر می‌کنی باز هم با فرد مشابهی ازدواج می‌کردی یا اصلاً ازدواج نمی‌کردی؟

$X_۶$: وقتی که مشکل توافق نداشتن پیش می‌آید، این مشکل با توافق دوجانبه حل می شود، شوهر تسلیم می‌شود، زن تسلیم می‌شود یا هیچ کدام.

$X_۷$: میزان توافق روی مسائل مالی خانواده.

$X_۸$: توافق در مورد موضوعات تفریحی.

$X_۹$: توافق در مورد موضوعات مذهبی.

$X_{۱۰}$: توافق در مورد مقدار وقتی که به یکدیگر اختصاص می‌دهید.

$X_{۱۱}$: توافق در مورد انتخاب دوستان.

$X_{۱۲}$: توافق در مورد روابط جنسی.

1. Locke & Williamson

X_{13} : توافق در مورد شیوه‌های برخورد با خویشاوندان یکدیگر.

X_{14} : توافق در مورد رفتارهای سنتی.

X_{15} : توافق در مورد هدف‌ها، مقاصد و دیگر جنبه‌های مهم زندگی.

X_{16} : آیا شما با همسرتان همیشه درد دل می‌کنید؟ تقریباً همیشه، به ندرت یا تقریباً هیچ گاه درد دل نمی‌کنید؟

X_{17} : در ایام فراغت آیا هر دو ترجیح می‌دهید: در خانه بمانید، بیرون بروید، یا یکی ترجیح می‌دهد بیرون برود، دیگری می‌خواهد در منزل بماند؟

X_{18}: آیا با همسرتان در فعالیت‌های خارج از منزل همکار هستید؟

X_{19} : شما همسرتان را تقریباً هر روز می‌بوسید؛ گاهی یا تقریباً یا هیچ گاه؟

X_{20} : چه کارهایی همسرتان انجام می‌دهد که شما دوست ندارید؟

تحلیل پاسخ‌ها نشان داد که این ۲۰ سؤال همگی یک چیز را اندازه نمی‌گیرند، بلکه به زیرگروه‌هایی تقسیم می‌شوند. البته این خوشه‌های سؤال به کلی جدا از یکدیگر نیستند. همپوشی‌هایی وجود دارد که بعضی از سؤالات به دو خوشه یا بیشتر تعلق پیدا می‌کنند. وظیفه دشوار محقق این است که کشف کند از هر یک از زیرگروه‌های شاخص‌ها، چه بعدی از مفهوم سازگاری زناشویی نمایان می شود. مادامی‌که سؤالات یک خوشه همگی یک چیز را می سنجند عقیده بر این است که بایستی یک خصیصه مکنون، یعنی بعدی از سازگاری زناشویی وجود داشته باشد که به عنوان یک گنجینه ارائه کننده‌ی سؤالات عمل کند. برچسب زدن به یک خوشه خاص اصلاً کار آسانی نیست. محققان دریافتند که اولین بعد A، براساس سؤالات، ۵، ۶، ۱۸،۱۷،۱۴و۱۹ است و به آن برچسب «همراهی[1]» دادند. بعد دوم B، متشکل از سؤالات ۵،۴ و ۷ الی ۱۵ بوده که برچسب "توافق[2]" به آن تعلق گرفت، زیرا تقریبا تمام سؤالات مربوط به توافق در این زیرگروه قرار می‌گیرند. بعد سوم C، عمدتاً سؤال‌های عاطفی یا هیجانی را که سؤال‌های ۵،۳،۲،۱،۱۸،۱۲و۱۹ می‌باشند، در بر می‌گیرد و برچسب «تعلق عاطفی[3]» به آن داده شد. همچنین خوشه دیگر D، نیز وجود دارد که متشکل از سؤال‌های ۱۶،۱۴،۱۰ و۱۸ بوده و محقق در ابتدا نمی‌دانست با آن‌ها چه کار کند. ظاهراً این تنها عاملی است که پاسخ‌های متفاوتی را از جانب زن و شوهر بر می‌انگیزد. شوهران تمایل بیشتری به دادن پاسخ مساعد به این سؤالات داشتند و زنان احتمالاً همسازی داشتند. بنابراین برچسب «تعبیر مردانه» (یا همسازی زنانه) برای آن منظور شد. خوشه آخر E، دارای این شش سؤال است: ۱۹،۱۶،۵،۴،۳،۱. این خوشه «اثر هاله‌ای» نامیده شد، زیرا متشکل از سؤالاتی است که مردم نوعی گرایش سرخوشی به آن‌ها دارند. به بیان دیگر، بعضی اشخاص به این سؤالات با اشتیاق زیادی واکنش نشان می‌دهند و تمام روابط زناشویی را به شکل بی نقص تصور می‌کنند.

1. Companionship 2. Agreement 3. Affectionate Intimacy

حال، **قالب‌بندی اساسی** این تحقیق چیست؟ اگر بخواهیم دقیق بگوییم چیزی وجود **ندارد!** چرا که محققان در جستجوی عوامل علّی سازگاری زناشویی به صورتی که در ساختار علّی همگرا وجود دارد یا در ساختار افتراقی برای تبیین اختلاف بین موارد سازگار و ناسازگار وجود دارد نبودند. آنها مفهوم واضحی از مسأله تحقیق که از قبل طراحی شده باشد نداشتند. تنها کاری که آن‌ها انجام دادند برگرفتن ۲۰ سؤال بوده که از جهاتی با سازگاری زناشویی در رابطه‌اند، باقی کار را به تحلیل‌های آماری وا گذاشتند تا مشخص کند آیا این سؤال‌ها به زیرگروه‌هایی با ارتباط درونی قوی قابل تقسیم هستند یا نه. به عبارت دیگر آن‌ها فقط در جستجوی ساختار پنهان داده‌ها بوده‌اند.

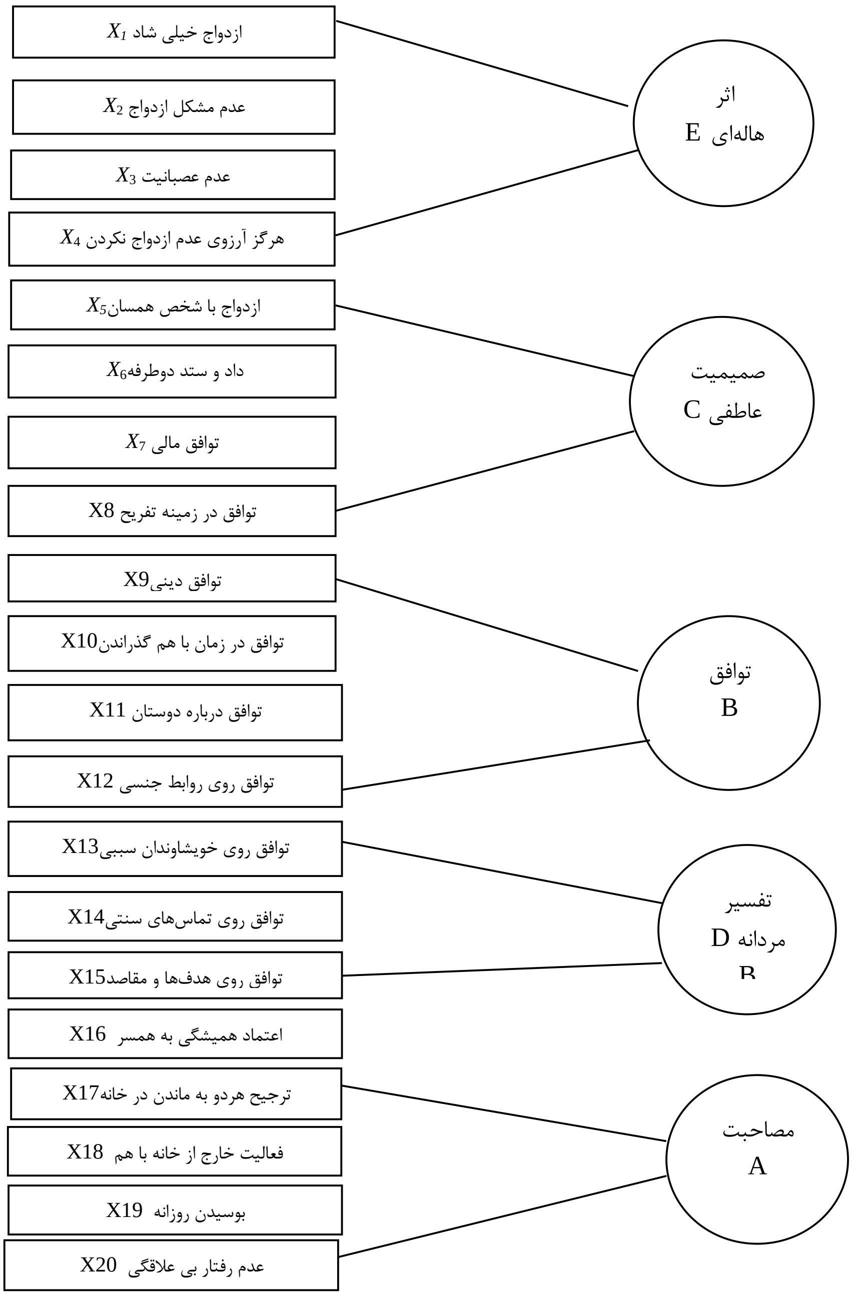
بنابراین ساختار اساسی، **ساختار مکنون**[1] است. مفهوم سازگاری زناشویی به ابعادی تقسیم می‌شود که ما آن‌ها را «خصایص مکنون» می‌نامیم. از صفت مکنون به این خاطر استفاده کردیم که این ابعاد فقط بعد از تحلیل آماری (تحلیل ساختار پوشیده) ظاهر می‌شوند. در شکل ۱۰-۱، یک تجسم عینی از ساختار مکنون ارائه شده است. خصایص مکنون (A تا E) در درون دایره‌ها و «خصایص آشکار» (سؤال‌های ۱ تا ۲۰ به عنوان شاخص‌های سنجش علمی) در داخل مستطیل‌ها ارائه شده‌اند. اگر هر ۲۰ سؤال چیزهای متفاوت از یکدیگر را اندازه بگیرند می‌توان آن‌ها را ۲۰ خصیصه مکنون پنداشت. اما هر محققی مایل است تحلیل او به تعداد کمی از خصیصه‌ها کاهش یابد، مثل معاشرت، توافق و صمیمیت، چون رسیدن به ۲۰ خصیصه چیزی را به معلومات ما اضافه نمی‌کند. این یعنی از کثرت به کثرت رسیدن. تنها زمانی از یک تحلیل چیزی می‌آموزیم که شمار زیادی از شاخص‌ها به تعداد محدودی خصایص پنهان منجر شود، طوری که از تعدادی سؤالات به واحدهایی مشخص برسیم. از این رو «ساختار مکنون» را می‌توانیم **کاهش ابعاد** بنامیم.

از نظر ما، تحقیق و تفحّص درباره ساختار مکنون در علوم اجتماعی بسیار پردامنه است. برای این که اگر به خاطر داشته باشید محقق را به معمار تشبیه کردیم، این بدین معنی خواهد بود که بنایی را بنیان نهاده‌ایم، بدون این که معمار آن تصور روشنی از آنچه می‌خواهد بسازد در ذهن داشته باشد. البته همه‌گان با نظر ما موافق نیستند. طبق نظر بعضی دانشمندان و روش شناسان، تحلیل ساختار مکنون از هر تحلیل دیگری بهتر است، به دلایل زیادی که خود واقعیت اجتماعی (پاسخگویان) و نه محقق، ساختاری را به موضوع تحقیق تعبیه می‌کند. خواننده آزاد است هر کدام از این نقطه نظرات را که بخواهد بپذیرد. در این مبحث باید خاطر نشان ساخت شکلی از تحقیق وجود دارد که در آن محقق از قبل خصایص مکنون را تعیین می‌کند و تحلیلی که به عمل می‌آید به منزله آزمونی از این ساختار اولیه است.

در این جا به یک اظهار نظر نهایی می‌پردازیم. قالب‌بندی اساسی این تحقیق متشکل از تقسیم خصایص متعدد (مثلاً ۲۰ خصیصه) به تعدادی زیرگروه است، چنان که هر زیرگروه، ویژگی خاصی از یک مفهوم کلی (سازگاری زناشویی)را ارائه می‌کند. امکان دیگری هم وجود دارد، این که واحدها یا

1. Latent structure

افراد (در اینجا ۳۴۹ زوج) را به تعدادی زیرگروه طوری تقسیم کنیم که نمرات واحدهای یک زیرگروه خاص (مثلاً اشخاص دارای سازگاری زناشویی) در ۲۰ خصیصه مورد نظر، کم و بیش مساوی باشند (مثلاً همه توافق داشته باشند، هر روز یکدیگر را ببوسند، در تصمیم‌گیری مشارکت داشته باشند و غیره). این قالب‌بندی اساسی، دیگر یک تحلیل ساختار مکنون واحدها خواهد بود نه خصیصه‌ها.



شکل ۱۰-۱ ساختار مکنون

۱-۲-۷ عدم برابری اقتصادی و عدم ثبات سیاسی

حداقل از عهد یونان با ستان به این طرف، ب سیاری اندی شمندان گونه‌های زیادی از دارایی را با حکومت پایدار، ناسازگار دانسته‌اند.

در این زمینه روست[1] (۱۹۶۹) استعاره‌هایی را نقل می‌کند که:

در یک کشور سه گروه افراد وجود دارند:

ثروتمندان بی‌مصرف که همواره در طمع فزون‌خواهی هستند؛
افراد بی‌چیزی که برای خورد و خوراک خود هم در مضیقه هستند،
قوم خطرناک، آکنده از خصومت،که نیش‌های دردناک‌شان مقتضای وجودشان است،
آنان که فریب زبان بازی افراد شریر را خورده‌اند،«قهرمانان‌شان»:
اما از این سه، گروه وسطی دولت‌ها را حفظ می‌کند؛
آن‌ها فرمان دولت را برقرار می‌کنند.

آلکسیس دی توکوویل[2] قرن‌ها بعد در نوشته‌هایش ادعا می‌کند: «اگر علل ثانویه ایجاد آشوب‌های جهان را کنار بزنیم، تقریباً همیشه اصل عدم مساوات را به عنوان عامل زیربنایی آن‌ها خواهیم یافت». یا فقرا درصدد غارت اموال ثروتمندان بوده‌اند یا ثروتمندان خواسته‌اند اقشار فقیر را به بردگی بگیرند. پس اگر جامعه‌ای باشد که در آن افراد چیزی برای خود و کمتر چیزی برای دریغ کردن از دیگران داشته باشند عمده مقتضیات لازم برای صلح جهانی فراهم شده است.

هم افلاطون و هم کارل مارکس تأثیرات مهلک ثروت را چنان نومیدکننده دانسته‌اند که راهی برای از بین بردن بدی آن نیافته‌اند جز اینکه از بوجود آمدن خود ثروت جلوگیری شود. اما در طرف دیگر، توکوویل فکر می‌کند در آمریکا جامعه‌ای را یافته است که می‌تواند راه‌حل دیگری باشد: بین این دو حد نهایی (تعداد خیلی کم افراد غنی و تعداد کمی افراد فقیر) مربوط به جوامع دموکراتیک، شمار نامحدود تقریباً یکسانی وجود دارد که نه خیلی فقیرند و نه چندان غنی، و دارایی کافی برای حفظ مرتبه خود را دارند بدون این که حسادتی بروز دهند. این مردم دشمنان طبیعی آشوب‌های شدید هستند. عدم تحریک و آشفتگی در آن‌ها باعث می‌شود سطوح بالاتر و پایین‌تر آن‌ها ثابت و آرام باقی بماند و تعادل اساسی جامعه حفظ شود.

با این وجود به عقیده روست (۱۹۶۹) وقتی‌که موضوع را با سیاست‌های امروزی به طور تجربی بررسی کنیم، این پاسخ، خط برش روشنی نشان نمی‌دهد. آیا عدم مساوات اقتصادی برای دولت‌های باثبات هم، نامنا سب و غیرقابل ا ستعمال ا ست یا عدم عدالت اقت صادی فقط برای دولت‌های خوب و دموکراتیک جور در نمی‌آید؟ اگر منظور ما دولت‌های باثبات اســـت آیا رژیم‌هایی اســـت که در آن‌ها خود قوانین علی‌رغم همه شـــورش‌هایی که به طور مکرر به وجود می‌آید (کلمبیا و جنوب ویتنام)، برای مدت طولانی قوی و پابرجا می‌مانند، یا این که به طور ساده جلوگیری از طغیان‌های شدید و به

1. Russett
2. Alexis de Tocqueville

سرنگونی همه ساله دولت‌ها تن دردادن (فرانسه طی اغلب جمهوری‌های سوم و چهارم) منظور است؟ یا این که دولت «پایدار» باید هم اهل صلح و هم بلند مدت باشد؟ و بالاخره منظور ما از دولت چیست؟ یک مورد خاص (اسپانیا)، یک دسته یا حزب خاص (اروگوئه)، حفظ اصولی یک ائتلاف خاص (فرانسه تحت نظام بازپوشانی[1]) یا تداوم سلطه یک طبقه اجتماعی خاص (اردن)؟

بخش دیگر مشکل ناشی از فقدان اطلاعات لازم یا عدم امکان مقایسه اطلاعات موجود می‌باشد. روست مدعی است او اولین کسی است که میزان زیادی از اطلاعات مربوط به بررسی رابطه عدم عدالت اقتصادی و ثبات سیاسی را جمع‌آوری کرده است. او برای سنجش عدم عدالت اقتصادی شاخص‌های زیر را به کار می‌گیرد:

X_1: درصدی از ملّاکان که در مجموع نیمی از زمین‌های مزروعی را تصرف کرده‌اند، از کشاورزان دارای قطعات کوچکتر زمین شروع شده و به ملّاکان بزرگتر ادامه می‌یابد.

$X_۲$: شاخص جینی تمرکز: این رقمی است که نشان می‌دهد تا چه حد توزیع اقتصادی یک سرزمین از توزیع ایده‌آل برابری کامل انحراف دارد.

$X_۳$: خانوارهای کشاورزی که تمام زمین‌های خود را اجاره کرده‌اند به عنوان درصدی از کل مزارع.

$X۴$: سرانه تولید ناخالص ملی (GNP) به دلار در سال ۱۹۵۵.

$X_۵$: درصد نیروی کار شاغل در بخش کشاورزی.

ارائه تعریف رضایت‌بخشی از پایداری، حتی مشکل‌تر از اندازه‌گیری نابرابری است. در تلاش برای به حساب آوردن جنبه‌های مختلف پایداری، شاخص‌های کاملاً متفاوتی به کار گرفته شد:

$Y_۱$: عدم ثبات سرپرستی: اندازه‌گیری شده بر اساس تقسیم تعداد سال‌هایی که یک کشور طی دوره ۱۹۴۵ الی ۱۹۶۱دارای استقلال بوده است بر شمار افرادی که در این مدت در یک پست سرپرستی اجرایی باقی مانده‌اند.

$Y_۲$: خشونت‌های گروهی داخلی: اندازه‌گیری شده برحسب تعداد کشته‌شدگان در یک میلیون جمعیت طی سال‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۳ در اثر درگیری‌ها، انقلاب‌ها یا آشوب‌های شهری.

$Y_۳$: جنگ‌های داخلی: اندازه‌گیری شده براساس تعداد کل حوادث خشونت‌آمیز.

$Y_۴$: پایداری دموکراسی: دموکراسی‌های پایدار به دولت‌هایی گفته می‌شود که ویژگی آن‌ها عدم ازهم‌گسیختگی مداوم نظام دموکراسی از جنگ اول جهانی به این طرف باشد و طی ۳۰ سال گذشته نظام‌های استبدادی فاشیستی یا کمونیستی بر آن‌ها حاکم نبوده باشد، که در هر زمان به اندازه ۲۰٪ از آراء را کسب کرده باشد. دموکراسی ناپایدار به کشورهایی اطلاق می‌گردد که گرچه به معیار نخست دست نیافته‌اند با این وجود دارای تاریخچه انتخابات کم و بیش آزادی

1. replastering

در اکثر سال‌های پس از جنگ جهانی دوم بوده‌اند. رژیم‌های دیکتاتوری آن‌هایی هستند که در آن‌ها با وجود بعضی فواصل کوتاه دموکراسی، انتخابات آزاد عموماً وجود نداشته باشد.

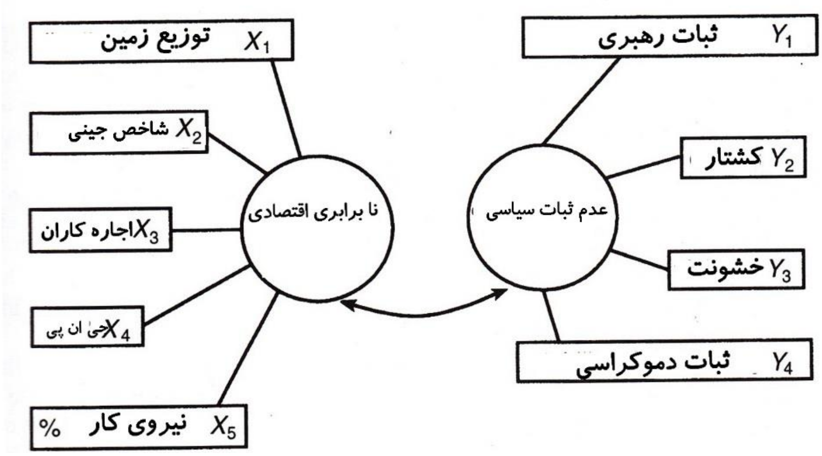
گیفی (۱۹۸۰) نیز مثل روست درباره روابط اقتصاد و ویژگی‌های سیاسی روی ۴۷ کشور تحلیلی به عمل آورده است. نتایج اصلی آن به شرح زیر است. ویژگی‌های اقتصادی که مهم‌ترین متغیرها هستند، چون قویاً به وسیله نزدیک به تمام خصایص سیاسی تداعی می شوند، عبارتند از: نخست شاخص جینی ($X_۲$) و بعد درصدی از جمعیت که در بخش کشاورزی شاغل هستند ($X_۵$). مهمترین متغیرهای سیاسی در معاملات پیش‌بینی عدم تساوی اقتصادی عبارتند از: دوام یک رژیم دموکراسی ($Y_۴$) و ثبات رهبری ($Y_۱$). این متغیرهای $Y_۱$ و $Y_۴$ رابطه چندانی با یکدیگر ندارند. از نظر گیفی این موضوع چندان تعجب‌انگیز نیست، زیرا، دیکتاتوری یا به وسیله تغییر رهبران سیاسی (ژنرال‌های نظامی) مشخص می‌شود و یا به وسیله بقای یک رهبر سیاسی برای سالیان زیاد (مثل یوگسلاوی)، و رژیم‌های دموکراسی رهبری متغیری دارند.

بخش خاصی از زمین‌های کشاورزی در تصرف کشاورزان اجاره‌کار است ($X_۳$). هر چند این ویژگی رابطه زیادی با توزیع زمین‌های زراعی دارد، اما در رابطه با تبیین ثبات سیاسی نقشی ایفا نمی‌کند. از نظر گیفی این موضوع با توجه به ثبات دموکراسی ($Y_۴$) قابل درک است، زیرا دیکتاتوری‌هایی وجود دارند که در آن‌ها مقدار زیادی زمین از سوی زمین‌داران ثروتمند به اجاره داده می‌شود (مثل دهقانان جنوب آمریکا)، و دیکتاتوری‌هایی وجود دارد که زمینی به اجاره نمی‌دهند(مثل یوگسلاوی و لهستان).

جدای از $X_۳$، سایر ویژگی‌های اقتصادی نیز نقش مهمی در توضیح و تبیین ثبات دموکراسی ($X_۴$) ایفا می‌کنند. روسِت در کل چنین نتیجه‌گیری می‌کند که مشاهدات اساسی توکوویل درست به‌نظر می‌رسند: هیچ کشوری مشکل دموکراسی دولت را برای مدت زیادی نمی‌تواند حفظ کند اگر منابع عمده منابع اقتصادی در بین شهروندان آن به صورت غیرعادلانه توزیع شده باشد.

اکنون به سراغ **قالب‌بندی اساسی** مسأله اصلی این تحقیق می‌رویم. دو مجموعه خصایص، یک مجموعه اقتصادی و یک مجموعه سیاسی با یکدیگر در رابطه هستند. مجموعه نخست متشکل از ۵ مؤلفه از مفهوم «عدم تساوی اقتصادی» است. این مفهوم خود می‌تواند به عنوان یک مفهوم مکنون (پوشیده) به حساب آید. مجموعه دوم شامل ۴ مؤلفه «عدم تساوی اقتصادی» است. محققان بیش از هر چیز، علاقه‌مند به روابط بین دو مجموعه بودند نه روابط درونی یک مجموعه. آنان متمایل به آزمایش این فرض بودند که آیا خصیصه‌های اقتصادی (مجموعهX) با ویژگی‌های سیاسی (مجموعه Y) رابطه دارند یا نه. آن‌ها پا را از این هم فراتر گذاشته و درصدد بودند که تأثیر مجموعه X بر مجموعه Y (و نه عکس آن) را در قالب یک رابطه علّی تبیین کنند. ما فعلاً نمی‌خواهیم تا آن حد پیش برویم. بنابراین به منظور این که نشان دهیم سؤال علّی همچنان بدون پاسخ باقی مانده است یک پیکان منحنی دو سویه در شکل ۱۱-۱ ترسیم کرده‌ایم.

ساختار یک مسأله تحقیق که در آن دو مجموعه از شاخص‌ها هر کدام با یک خصیصه مکنون نشان داده می شوند و به یکدیگر مربوط هستند، **ساختار کانونی**[1] نامیده می شود. واژه «کانونی» از ریاضی محض ریشه می‌گیرد، اما می‌توان آن را به عنوان مرکز یک قطعه موسیقی هم در نظر گرفت که از دو صدای پشت سر ترکیب شده است که وقتی ایجاد می شوند و پشت هم تکرار می شوند تِمِ یکسانی را باعث می‌شوند.



شکل ۱۱- ۱ ساختار کانونی

توجه داشته باشید که ساختار باید با روابط بین شاخص‌های عدم تساوی اقتصادی (مثل شاخص «جینی» و در صد نیروی مشاغل در بخش کشاورزی) و شاخص‌های عدم ثبات سیاسی (مثل عدم ثبات کارکنان و تشکیلات دولت) سر و کار داشته باشد و نه با روابط بین شاخص‌ها در درون یک مجموعه (مثل «جینی» یا «جی ان پی»). همچنین توجه داشته باشید که شکل ۱۱-۱ تنها نمایش ساده‌ترین شکل از ساختار اساسی است، زیرا در مواردی که مفاهیم عدم تساوی اقتصادی و عدم ثبات سیاسی چند بعدی هستند برای هر مجموعه بیش از یک خصیصه مکنون وجود خواهد داشت. همچنانکه یک قطعه موسیقی می‌تواند کانون بیش از دو صدا باشد، مسأله تحقیق نیز می‌تواند بیش از دو مجموعه خصیصه را در بر بگیرد.

1. canonical structure 2. trickling effect(not to beconfused with Reaganomics)

۸-۲-۱ شیوه‌های تزیین اتاق نشیمن

جامعه‌شناسان برای سالیان سال با پدیده سبک و اسلوب غالب بر وضعیت اجتماعی و پرستیژ (اعتبار و نفوذ) ســر و کار دارند. یک مثال کاملاً شــناخته شــده در این باره فرضــیه اثر چکه‌ای[۲] اســت (با اقتصادکاهش مالیات اشتباه نشود)، که بر اساس آن سطوح بالاتر اجتماعی تعیین کننده طرز تلقی از سبک (مد) هستند که به وسیله اقشار پایین‌تر اجتماعی اقتباس می‌شود (همچون قطره‌ای که پایین می‌چکد) پس از آن هم هرگاه اقشــار بالاتر مد جدیدی را پیش می‌گیرند اقشــار پایین‌تر دوباره آن را می‌گیرند و این ادامه دارد.

به جای تشریح چرخه‌های کوتاه مد، ممکن است فردی علاقه‌مند به بررسی رفتار پیروی از مد از طریق کارکرد پر ستیژ اجتماعی با شد. نمایش مصرف به صورت اسراف کالا، در را ستای تز معروف وبلن[۱] درباره مصرف آشکار است، کنشی که دارایی خرج کننده برای همگان هویدا می‌شود.

رابطه نزدیک مد و طبقه اجتماعی از سوی سیمل[۲] نیز مورد بررسی قرار گرفته است. از دیدگاه وی مدها با طبقات اجتماعی در رابطه‌اند. آن‌ها این وابستگی را با برابری و یکی شدن یک چرخه در می‌یابند و از این رو، گروه‌های دارای شــرایط پایین‌تر را کنار می‌گذارند، چون این گروه‌ها با ویژگی عدم تعلق به این چرخه مشخص می‌شوند. به این ترتیب بازشناسی و تمایز اجتماعی دست به دست هم می‌دهند.

برخلاف جامعه‌شــناســان کلاســیک مانند وبلن، ســیمل و دیگران، جامعه‌شــناســان جدید تأکید بیشتری بر صنعت مد دارند نقش مهم و قطعی در شکل‌دادن به هنجارها و سلیقه کالا دارد. البته این فرضیه نمی‌گوید که صنایع فرهنگی، مد را به مصرف‌کنندگان دیکته می‌کنند، بلکه ادعا می‌کند که یک فرایند پیچیده‌ی انتخاب جمعی، جای متفاوت بودن ساده طبقاتی را می‌گیرد. در راستای این ادعا، بسیاری مؤلفان یک روند سبقت‌جویی طبقاتی در جهت همگن شدن را مشاهده کرده‌اند. حتی اسکلسکی[۳] از یک هم‌ترازی طبقه متوسط سخن می‌گوید که در آن کالاهای مادی و غیرمادی مدنیّت اجتماعی به ســبک مشــابهی مورد اســتفاده قرار می‌گیرند. انزنبرگر[۴] از اســتیلای فرهنگی یک خرده بورژوازی یاد می‌کند که جانشــین بورژوازی بزرگ شــده و به تدریج در نوع زندگی و علائق طبقات کارگر (پروتاریا) سرایت کرده است.

پاپای و پاپای[۵] (۱۹۷۸) این نظر را مورد تحقیق و بررســی قرار دادند. آن‌ها در بررســی خود به ســبک تزیین اتاق نشــیمن توجه کردند. واژه «مد» یا «ســلیقه» برای موضــوع تحقیق ســبک‌های دکوربندی بسیار گسترده است، اما آن‌ها شکل محدودتری از این کلمه را در نظرگرفتند. هدف اصلی تحقیق آن‌ها ابطال فرضیه فوق درباره هم شکلی[۶] بود. آن‌ها از این فرض دفاع می‌کنند که تراز سازی ســبک‌ها در ســطوح اجتماعی مختلف اتفاق نمی‌افتد و این‌که نمادگرایی طبقاتی[۷] به پایان نرســیده، بلکه بیشتر پالایش یافته است. در رابطه با دکوربندی اتاق نشیمن، آن‌ها حتی صحبت از یک حالت

1. Veblen 2. Simmel 3. Schelasky 4. Enzenberger
5. Pappi 6. homogenization 7. status-symbolism

دوگانه منزلت اجتماعی خاص از این بازار می‌کنند. این وابســـتگی طبقاتی ســـبک‌های زندگی، تنها زمانی به‌و سیله محققان قابل برر سی ا ست که از قبل سبک‌های موجود را ردیابی کرده با شند. آن‌ها باید ابتدا اتاق نشیمن شمار زیادی از خانواده‌ها را مورد مشاهده قرار دهند تا به یک توصیف عینی از آن دســـت پیدا کنند که محققان دیگر نیز بتوانند آن را تکرار نمایند. چنین طبقه‌بندی تجربی‌ای از قبل در یک مد قرار داده ن شده، بلکه می‌توان آن را به طور ضمنی از طریق م شاهدات غیر سوگیرانه شیوه‌های تزیین اتاق نشیمن در نمونه‌ای از خانوارها استنباط کرد. مبحث بعدی به چگونگی شناسایی تجربی سبک‌های دکوربندی اختصاص دارد.

پاپای و همکارانش داده‌ های مورد نیاز را از دهکده‌ای در آلمان جمع‌آوری کردند. آن‌ ها دو روش جمع‌آوری اطلاعات شامل پر سشگری و مشاهده مستقیم را به کار گرفتند. فهر ست ۲۹ سؤال نگرش‌سنجی به یک نمونه تصادفی معرف شامل ۵۸۲ خانوار ارائه شد و پاسخگویان میزان موافقت یا عدم موافقت خود را با هر عبارت بیان نمودند. طی مصاحبه، مصاحبه‌گر فرصت داشت تا نحوه تزیین اتاق نشیمن را مشاهده کند. برای اطمینان از حصول حداکثر پایایی لازم در مشاهدات پر سشگران، آنان آموزش‌های لازم را فرا گرفته بودند. این آموزش‌ ها به کمک وســـایل تصـــویری انجام گرفت تا پرسشگران به طور عملی با شیوه‌های مختلف تزیین، انواع اتاق‌ها، ترتیب و نظم چیدن وسایل و موارد دیگر آ شنا شوند. در مجموع ۷۰ م شاهده صورت گرفت. اندکی بیش از یک سوم آن‌ها، تنها شامل پر سشنامه بود که تعیین وجود یا عدم وجود ا شیاء برای آن کافی بود. سایر مشاهدات متکی بر اجزاء سبک از قبیل الگو و رنگ کفپوش، دیوار، پرده و اشیاء دیگر بود.

برخلاف مرســـوم علوم اجتماعی، واحدهای تحلیل در این تحقیق افراد نیســـتند، بلکه اتاق‌های نشیمن می‌باشند (۵۸۲ اتاق). خصیصه‌ها شامل اجزاء و عناصری است که مورد مشاهده قرار می‌گیرند یا در باره آن‌ها سؤال می‌شود. مجموعه‌ای متشکل از ۴۹ ویژگی مورد تحلیل قرار گرفتند. برای بعضی ویژگی‌ها مثل پیانو به ذکر داشتن یا نداشتن آن بسنده می‌شد. برای ویژگی‌های دیگر مثل اندازه اتاق یک نمره در نظر گرفته می‌شد. ۴۹خصیصه زیر نیز تعیین شدند: اندازه اتاق نشیمن، اندازه پنجره‌ها، وضـــعیت تعمیر و نگهداری مبلمان، کف آجرفرش،کفپوش پی وی ســـی، کفپوش پارکت، قالی، قالی ایرانی، فرش با نقش هند ستی، قالیچه کوچک ایرانی، دیوارها با نقش و نگارهای بزرگ، دیوارها دارای نقش گل، دیوارهای بدون نقش، مبل چوبی، مبل با رویه چرمی، تلویزیون روی میز مبله، تلویزیون از جنس مواد مصنوعی، تعداد کتاب‌ها، پرده‌های توری حا شیه‌دار، پرده‌های توری ساده، پرده‌های براق، پرده‌های با نقش گل، پرده بدون نقش، تزیینات ا ضافی، آرا ستگی زیاد، مجلل بودن، نقا شی با چ شم انداز کوه ستانی، بدون نقا شی، کنده کاری(حکاکی)، نقا شی تخیلی، قاب نقا شی، لو ستر، شمعدان، گنجینه‌های منبت‌کاری شده، دیوارهای فیبری، اکواریوم، گل میز (میز پادیواری)، میز آرایش، صندلی

گهواره‌ای، صـــندلی راحتی، پیانو، ظروف حلبی، گل‌های نمایشـــی، نظم و ترتیب گل‌ها، ملیله‌دوزی، کوسن، سقف زیبا، عکس‌های خانوادگی.

شباهت بین خصیصه‌های سبک تزیین، نقطه شروع تحلیل را تشکیل می‌داد. به عنوان مثال قالی ایرانی و کفپوش پارکت در بســـیاری از اتاق‌های نشـــیمن با هم به کار می‌روند، اما قالی ایرانی روی کفپوش پلاستیکی فرش نمی‌شود. نمونه‌ای از خصیصه‌ها که همگونی زیادی را نشان می‌دهند شامل دیوارهای بدون نقش زمینه، تعداد زیاد کتاب، نقش‌های تخیلی (انتزاعی) و تلویزیون با رویه الیاف مصـنوعی اسـت. این گروه ویژگی‌ها یک بعد کلی را ارائه می‌کنند که آن‌را به عنوان «سـبک مدرن» نشان می‌دهیم. نقاشی‌هایی با منظره کوهستانی و قاب سنگین، سقف زیبا، کوسن و گل‌های نمایشی (خشـــک کرده) از دیدگاه تحلیلی معرف نوعی ســـبک ســـنتی می‌باشـــند. محقق در تحلیل کلیه تداعی‌های دو متغیره بین ۴۹ خصـیصـه، به دنبال آن اسـت که ببیند آیا می‌توان گروه‌هایی از این خصـایص را یافت که یکدیگر را تداعی کنند، به طوری که سـبک‌های متفاوت و منحصـر به فردی را ارائه نمایند. **قالب‌بندی** این مسأله تحقیق را می‌توان با مسئله‌ای که در مثال ۶-۲-۱درباره سازگاری زناشـویی بیان کردیم مقایسـه نمود، با این تفاوت که نقطه شـروع در اینجا با ۱۱۷۶=(^{۲}۴۹) ضـریب همبستگی دو به دو معین شده است.

کروسکال و ویش[1] (۱۹۷۸) این مطلب را به طور بسیار گویا به شرح زیر توضیح داده‌اند:

> فرض کنید به شما نقشه‌ای داده شده که موقعیت چندین شهر را در ایالات متحده نشان می‌دهد و از شما خواسته‌اند جدول فواصل آن‌ها را رسم کنید. این کار، کار ساده‌ای خواهد بود. حال عکس قضیه را درنظر بگیرید که جدول فواصل بین شهرها را داده باشند و بخواهند که نقشه را طرح کنید.

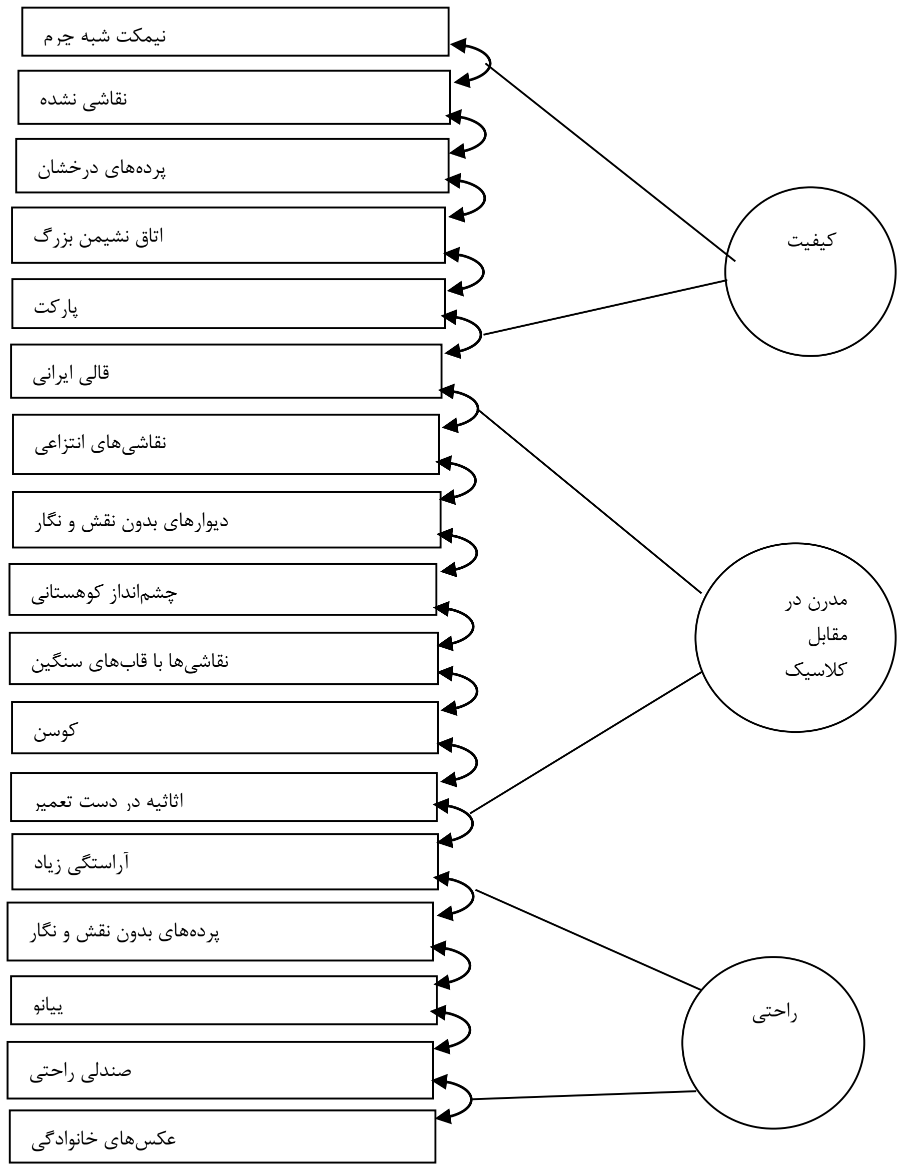
محقق در اصل با چنین شکل معکوسی از مسأله روبه‌روست.

در تحقیق آن‌ها فاصله‌ها ۱۱۷۶ نوع شباهت در بین ۴۹ سبک خصیصه‌ای هستند. اگر آن‌ها موفق به طرح نقشه خصیصه‌ها شوند، آنگاه همه این خصیصه‌ها را می‌توانند طوری در یک تحلیل دو بعدی جایگزین کنند که محورهای شـــمال- جنوب و شـــرق- غرب دو بعد مورد نظر باشـــند و به عنوان دو ســـبک کلی زندگی قابل تفســـیرخواهند بود. البته می‌توان بیش از دو بعد را نیز فراهم آورد. به نظر می‌رسد در این مثال یک تحلیل سه بعدی از قضیه، مناسب‌ترین حالت سازگار با داده‌ها را فراهم کند. در شکل (۱۲-۱) راه حل سه بعدی این تحلیل به وسیله نمودار رسم شده است. این شکل با شکل شماره (۱۰-۱) قابل مقایسه است، همچون بررسی سازگاری زناشویی، در اینجا نیز محققان در پی کشـف ابعاد مکنون سـبک زندگی هسـتند. اما همان طورکه در این مثال نشـان داده شـد، نقطه شروع ۴۹ خصیصه نیست، بلکه ۱۱۷۶ شباهت است که آن را **ساختارمکنون شباهت‌ها**[2] می‌نامیم. شباهت‌ها به وسیله پیکان‌های دو سویه نشان داده شده‌اند. البته ترسیم همه ۴۹ خصیصه مقدور نیست، از این رو اجازه دهید از ۱۱۷۶ پیکان صرف نظر کنیم.

---

1. Kruskal & Wish
2. latent structure of similarities

«بعد کیفیت» در واقع ماهیت اقتصادی دارد. این بعد بر پایه توان پرداختن به خصیصه‌ها است. اتاق نشیمن بزرگ، پارکت و فرش ایرانی،گران قیمت هستند. در طبقات اجتماعی بالا، این ها در کنار یکدیگر در یک خانه پیدا می‌شوند. انتهای دیگر طیف با خانوارهایی شکل می‌گیرد بدون نقاشی و مبل هایی با رویه چرمی و پرده های روشن به عنوان جایگزین های قابل تهیه و خرید. منظره کوهستانی، قاب سنگین و کوسن رابطه‌ای مثبت و قوی با یکدیگر دارند، اما این ها به ندرت در اتاق‌های دارای دیوارهای بدون نقش و نگار و مناظر انتزاعی (سنتی) و کتب زیاد مشاهده می شوند. سه مورد آخر نیز رابطه‌ای قوی با یکدیگر دارند که «سبک مدرن» را تداعی می‌کند، در حالی‌که سه مورد اول تداعی کننده «سبک سنتی» هستند. بعد سوم در ابتدا باعث پاره‌ای مشکلات برای محققان شد. در مورد پیانو آن‌ها ابتدا «استفاده» را به عنوان یک بعد در نظر گرفتند. اما در مقابل گرانی تعمیر و نگهداری اثاثیه (مبلمان)، تمیزی فوق‌العاده ظاهر اتاق و عدم نقاش و نگار، آنان تصمیم گرفتند «خوش قلبی یا راحتی» را به عنوان بعد سوم سبک انتخاب کنند.



شکل ۱۲-۱ ساختار مکنون شباهت‌ها

همان طور که در مثال مربوط به سازگاری زناشویی بیان شد از مطلب فوق می‌توان استنباط نمود که خط‌مشی جستجوی ابعاد، در نبود یک ساختار اساسی از قبل دنبال می‌شود. خصایص سبک زندگی جمع‌آوری و ابعاد کلی‌تر به طور قیاسی استنباط می‌شوند. در بخش‌های پیشین این خط‌مشی را

منفی ارزیابی کردیم، زیرا ما به شـدت با پی‌ریزی امور بر اسـاس مشـاهدات تصـادفی بدون تئوری مخالفیم. انصـاف نبود این مطلب را به محققان یادآوری نکنیم که علاوه بر تحلیل اسـتنتاجی آن‌ها روش دیگری را نیز دنبال کردند. به مصاحبه‌گران یک دسته‌بندی مقدماتی متشکل از ۷ سبک زندگی به شـرح زیر نیز ارائه شـد: نمود سـاده، خیلی نمایان، سـبک آلمان قدیم، سـبک مدرن، سـبک اسـکاندیناوی، سـبک ترکیب شـده با اجزای قدیمی و مقوله باقی‌مانده سـبک‌های ترکیبی دیگر. با استفاده از شیوه‌های مجسم‌سازی به مصاحبه‌گران آموزش داده شد تا این سبک‌ها را تشخیص دهند و آن‌ها می‌بایست سبک به کار رفته برای هر اتاق را مشخص می‌کردند. در تحلیل استنتاجی مزبور یک راه حل سه بعدی با ابعاد کیفیت، مدرنیزه و راحتی بدست آمد. اگر یک راه حل ۷ بعدی حاصل می‌شـد، ایده‌آل بود که با طرح ۷ بعدی از سـبک‌های زندگی که از قبل به دسـت آمده بود، منطبق می‌شد. اما در مقابل راه‌حل تجربی حاصل شده در عین حال با ساختاری از ابعاد تطبیق یافته که در مجلاتی مثل اسکانر وونن[1] مورد اشاره قرار گرفته است، این خط‌مشی دوگانه که در آن هم تحلیل اسـتقرایی و هم تحلیل قیاسـی صـورت گرفت و تطابق بین آن‌ها آزموده شـد، ما را به این نتیجه می‌رساند که این تحقیق و بررسی را به عنوان یک نوع بهتر در نظر بگیریم.

1. Schoner wohnen

فصل ۲

طبقه‌بندی شیوه‌های کلاسیک تحلیل چندمتغیره

در فصـل اول نمونه‌هایی از تحقیقات تجربی را مورد بحث قرار دادیم. با این کار سـعی کردیم نشـان دهیم که هر مسـأله‌ی تحقیقی دارای یک قالب‌بندی اسـاسـی و زیربنایی اسـت، به عبارت دیگر یک ساختار یا دستور اساسی دارد. در نتیجه از هر گونه اصطلاحات تکنیکی خودداری کردیم. صحبت از تحلیل رگرسیون چند متغیره نکردیم، ولی ساختار علّی همگرا[1] را مطرح نمودیم؛ از تحلیل همبستگی تفکیکی تصنّعی صحبت نشد، به جای آن از رابطه‌ی علّی غیرمستقیم و تصنّعی سخن گفتیم؛ تحلیل واریانس و کوواریانس را بیان نکردیم، بلکه سـاختار تعاملی را مطرح کردیم؛ تحلیل تمایزی را بیان نکردیم، بلکه ساختار تمایزی را مطرح نمودیم؛ به جای تحلیل عوامل و خوشه‌ای، ساختار مکنون، به جای تحلیل همبسـتگی کانونی (متعارف) سـاختار کانونی و به جای تکنیک‌های مقیاس‌بندی چند بعدی، از ساختار مکنون تشابهات استفاده کردیم.

بدین ترتیب سعی کردیم از زبانی که زبان متغیر خوانده می شود استفاده نکنیم. هدف این بوده اسـت که در ابتدا برای خواننده مقدمه‌ای آشـنا درباره تحلیل چندمتغیری همراه با مثال‌هایی از نظام‌های چندگانه علوم اجتماعی، را ارائه کنیم. این کار به پیشـنهاد یکی از همکاران علمی صـورت گرفت. قضاوت درباره این که آیا این کوشش موفقیت‌آمیز بوده است یا خیر، بر عهده خواننده است.

در این فصل روش‌های سنتی (کلاسیک) تحلیل چندمتغیره، دسته‌بندی و با مثال‌های تحقیقاتی همراه شده‌اند. ما بر این باوریم که یک مسأله تحقیق با یک قالب‌بندی اساسی معین (مثلاً ساختار علّی همگرا) منجر به انتخاب یکی از روش‌های تحلیل چندمتغیره می‌شـود (در این مثال تحلیل رگرسـیون چند متغیره) که با آن قالب‌بندی خاص تطبیق دارد. بنابراین اولین و بهترین ملاک در دسـته‌بندی روش‌های آماری، قالب‌بندی اسـاسـی اسـت. برای ایجاد یک دسـته‌بندی قابل قبول، معیارهای بسیار دیگری نیز باید مورد توجه قرار گیرند. یکی از معیارهای مشخص، سطح اندازه‌گیری متغیرهاسـت: کمّی، رتبه‌ای یا اسـمی (نگاه کنید به بخش ۱-۱-۳). معیار دیگر وجود یا عدم وجود وابسـتگی اسـت، به عبارت دیگر ناموزونی علّی که با آن تفاوت متغیرهای وابسـته و مسـتقل تعیین می‌شـود. سـطح اندازه‌گیری و وابسـتگی، دو معیاری هسـتند که در دسـته‌بندی روش‌های آماری بیشـترین کاربرد را دارند. بدیهی اسـت که با به کارگیری سـطوح مختلف اندازه‌گیری یا با انتخاب

1. convergent casual structure

وابستگی یا عدم وابستگی، تحلیل‌ها به شیوه متفاوتی محاسبه می‌شوند. بدین ترتیب دو ملاک فوق با ملاحظات محاسباتی تعیین می‌گردند. این مطلب در مورد بسیاری معیارهای دیگر مثل تعداد متغیرهای مستقل، خطی بودن و غیره نیز صادق است.

این ملاک‌های فنی و محاسباتی، در انتخاب یک روش آماری مناسب تعیین کننده‌اند. از این رو باید آن‌ها را در دسته‌بندی خود قرار دهیم. با این حال بر نقطه نظر قبلی مبنی بر این که قالب‌بندی اساسی بهترین ملاک است تأکید می‌کنیم، زیرا اطمینان می‌دهد که با ساختار مفهومی یک مسأله تحقیق تطبیق دارد.

در تدارک دسته‌بندی خود، ابتدا قراردادهایی را در رابطه با شیوه علامت‌گذاری در نظر خواهیم گرفت که در فصول آینده به تدریج مورد استفاده قرار می‌گیرند. بعد از آن، برای هر ملاک یک طبقه‌بندی جداگانه در نظر خواهیم گرفت. این کار در نهایت به یک روش طبقه‌بندی می‌انجامد که همزمان با ملاک‌های زیادی سروکار دارد.

باز هم مایلیم نواقص این کتاب را متذکر شویم. در این کتاب تنها شیوه‌های سنتی (کلاسیک) تحلیل آماری مثل تحلیل رگرسیون، تحلیل واریانس، تحلیل متمایزکننده و امثال آن مورد بحث قرار گرفته‌اند. کتاب حاضر تحلیل‌های پیشرفته‌ای که به تازگی توسعه یافته‌اند، مثل مدل‌های لوگاریتم خطی و تحلیل هم‌شکلی و **لیزرل** (سیستم روابط ساختار خطی) را به دو دلیل شامل نمی‌شود؛ یکی مشکل ظرفیت کتاب است که در جلد دوم بعداً به آن‌ها خواهیم پرداخت، مشکل دوم همپوشی مطالب است. تحلیل‌های پیشرفته جدید ریشه در شیوه‌های کلاسیک دارند که در این جا توضیح داده می‌شوند. مثلاً مدل‌سازی لوگاریتم خطی که برای متغیرهای سطح پایین مناسب است به عنوان *قالب‌بندی شایسته*[1] از طریق تحلیل واریانس با ساختار تعاملی امکان‌پذیر است. یعنی توسعه اغلب این شیوه‌های تحلیلی پیشرفته، همواره بر اساس الگوگیری از شیوه‌های سنتی صورت گرفته است. به هر حال امیدواریم اصولی را بنا کرده باشیم که خواننده علاقه‌مند را قادر به مطالعه شیوه‌های مدرن سازد و از آن طریق ریشه‌های تاریخی آن‌ها را تشخیص دهد.

۱-۲ نکات آغازین

۱-۱-۲ نظام علامت گذار ما

برای ارائه درست قالب‌بندی اساسی یک روش (یا مسأله تحقیق) به طور قراردادی از علائم و قوانین زیر استفاده خواهیم کرد:

◯ از این علامت به عنوان متغیر مکنون که یک خصیصه اندازه‌گیری نشده است، استفاده می‌شود. مثلاً «همدم بودن» در تحقیق پیرامون سازگاری زناشویی (نگاه کنید به بخش

1. qua format

۶-۲-۱) یا «نابرابری اقتصـــادی» در تحقیق ســـاختار کانونی (نگاه کنید به بخش۷-۲-۱) یا «کیفیت» در تحقیق پیرامون تزیین اتاق نشیمن (بخش ۸-۲-۱).

برای یک متغیر آشـکار که یک خصـیصـه مسـتقیماً اندازه‌گیری شـده اسـت، همانند مثال یهودســـتیزی در بین آمریکاییان (بخش ۳-۲-۱) یا خشـــنودی از ازدواج در بین زوجین (بخش ۶-۲-۱) خط مشی ما این است که یک مربع یا مستطیل معرف متغیری است که در سطح کمّی (فاصله‌ای یا نسبی) باشد. برای سطوح پایین‌تر مستطیل را به بخش‌هایی تقسیم کرده‌ایم به شیوه‌ای که در ادامه توضیح داده می‌شود.

این نشانه برای یک متغیر ساختگی[1](دامی) دو مقوله‌ای مثل جنسیت در نظر گرفته شده اسـت (عامل کنترل در بخش ۱-۲-۱) یا فقر با مقوله‌های فقیر و غنی (بخش ۵-۲-۱). یک متغیر تصـــنعی دو مقوله‌ای، متغیری اســـت که یک مقوله آن کد ۰ و مقوله دیگر کد ۱ می‌گیرد. مثلاً ۰ برای مرد و ۱ برای زن یا برعکس ۰ برای زن و ۱ برای مرد. فرقی نمی‌کند کدام مقوله چه کدی بگیرد، چون منظور تنها 'محاســـبه کردن' با ارزش‌های عددی ۰ و ۱ اسـت. با این کار یک متغیر دو بخشـی (مثل جنسـیت: مرد و زن) به صـورت سـاختگی به سطوح بالاتر اندازه‌گیری ارتقاء می‌یابد. سطح اندازه‌گیری اسمی به عنوان یک سطح کمّی منظور می شود و میانگین‌ها و واریانس‌ها محاسبه می شوند، هم چنان که برای «سن»، در یک سطح فاصله‌ای این شاخص‌ها محاسبه می‌گردند. چنین محاسباتی آشکارا ساختگی هستند، زیرا نمی‌توان گفت مردی هست که ۰ است و زنی هست که ۱ است یا برعکس. درباره فقیر و غنی نیز همین وضـــع برقرار اســـت. البته بعداً نشـــان خواهیم داد که این کدگذاری تصنعی از جنبه تکنیکی امتیازات زیادی دارد. اگر نتیجه‌گیری خاصی از موضوع نشود ما می‌توانیم متغیر تصنعی را یک متغیر «گیج[2]» بنامیم.

این علامت برای یک متغیر سه مقوله‌ای (سه بخشی) که توسط متغیرهای ساختگی دو بخشی نمایش داده می شود، به کار می‌رود. مثالی از متغیر سه بخشی، در نظر گرفتن یک حالت سوم برای همسایه‌ها در مثال قبلی پیرامون موضوع فقر است؛ شامل: فقیر، متوسط و غنی. آنگاه این متغیر در متغیر دو بعدی تصـــنعی $D_۱$ و $D_۲$ به صـــورت زیر نمایش داده می‌شود:

	$D_۱$	$D_۲$
فقیر	۱	۰
متوسط	۰	۱
غنی	۰	۰

1- dummy variable [تصنعی، دامی و ساختگی هم ترجمه شده است]

2. stupid

به یک همســـایه فقیر در متغیر $D_۱$ کد ۱ و در متغیر $D_۲$ کد ۰ اختصـــاص می‌یابد. یک همســـایه متوســط به ترتیب کدهای ۰ و ۱ را در متغیرهای $D_۱$ و $D_۲$ گرفته اســت. به همســایه غنی در هر دو بخش کد ۰ اخت صاص داده شده ا ست. توجه دا شته با شید که برای تمایز بین سه مقوله، دو متغیر ســـاختگی دو بعدی کفایت می‌کند. فرقی هم نمی‌کند که کدام مقوله چه کدی بگیرد، زیرا متغیر اجازه یافته غیررتبه‌ای با شد، چنان که مقوله‌ها می‌توانند جا به جا شوند. به طور کلی هر متغیر چند بخشی با k مقوله را می‌توان توسط k-۱ متغیر دو بعدی تصنعی نمایش داد.

به عنوان نمونه کدهای متغیر (غیر رتبه‌ای) ملیّت را با پنج مقوله در زیر نشان داده‌ایم:

	$D_۱$	$D_۲$	$D_۳$	$D_۴$
بلژیکی	۱	۰	۰	۰
انگلیسی	۰	۱	۰	۰
ایتالیایی	۰	۰	۱	۰
هلندی	۰	۰	۰	۱
سوئیسی	۰	۰	۰	۰

رو شن ا ست که به یکی از مقوله‌ها یعنی «سوئیسی»در همه متغیرهای ساختگی دو بعدی، کد ۰ اختصـاص یافته اسـت و مقوله‌های دیگر در یکی از متغیرهای سـاختگی، کد ۱ و در باقی آن‌ها کد ۰ گرفته‌اند. از این طریق پنج مقوله به وســیله کدهایی که در چهار متغیر ســاختگی به آن‌ها اختصــاص یافته از یکدیگر قابل ت شخیص می شوند. این کدهای ساختگی در تحلیل‌های چند متغیره به دفعات به کار گرفته می‌شـــوند. این کار امکان می‌دهد تا از طریق مقایســـه دوجانبه، بینش بهتری از این تکنیک‌ها کسب کنیم.

—— این علامت برای نشـــان دادن روابط آماری بین دو متغیر که ماهیت علّی ندارند، به کار می‌رود. مثالی از این مورد رابطه بین یک شاخص (شاخص جینی) و متغیر مکنون (نابرابری اقتصادی) است که آن شاخص را بازنمایی می‌کند (به بخش ۷-۲-۱ مراجعه شود).

این علامت کمان دوسویه درست مثل علامت —— برای توصیف یک رابطه آماری که جنبه علت و معلولی در آن مت صور نی ست، به کار می‌رود. انحنای آن برای تأکید بر این ا ست که نامتقارن بودن رابطه مد نظر نیست. رابطه وابستگی نیست، بلکه وابستگی درونی است. یک مثال از این مورد رابطه متعارف (کانونی) بین نابرابری اقت صادی و عدم ثبات سیا سی ا ست (نگاه کنید به بخش ۷-۲-۱). علامت کمان دوطر فه را نبا ید با حالت بازخورد(فید بک) اشـتباه کرد. بازخورد به وسـیله علامت نشـان داده می‌شـود و به‌معنی وابسـتگی دو جانبه است، یک بار X به Y و یک بار Y به X وابسته است.

$\longleftarrow$ این علامت برای یک رابطه وابستگی در شکل علت و معلولی آن به کار می رود. این یک قراردادی است برای نوشتن $Y \longleftarrow X$ که X متغیر مستقل (یا: پیش‌بین، عامل علّی، عامل تبیین کننده، ***explanans***) و Y متغیر وابسته (یا: ملاک، معلول، عامل تبیین‌شده، *explanandum*) نامیده می‌شود. مثال روشن یک رابطه وابستگی، تأثیر شوخ‌طبعی بر قرارداد تجاری است (به بخش ۱-۲-۱ مراجعه شود)، چون به قول بعضی دانشجویان، آزمایش استاندارد کنترل شده، تنها طرح مناسب برای نیل به حمایت تجربی از روابط علّی است. همگان با این نقطه نظرسختگیرانه موافق نیستند. کسانی که روش‌های سنّتی تحلیل چند متغیره را برای تحقیقات علت و معلولی مناسب یافته‌اند، مثالِ خوبی از رابطه وابستگی را در تأثیر Δ٪ زنان شاغل بر Δ٪ زنان بدون فرزند می‌یابند (به بخش ۲-۲-۱ مراجعه کنید).

$\longrightarrow$ این علامت برای تأثیر تعاملی، یعنی اثر ترکیبی دو متغیر مستقل بر متغیر وابسته در نظر گرفته شده است. مثالی از این مورد اثر ترکیبی پاداش‌های خارجی و جذّابیت تکلیف بر انگیزش درونی است (رجوع کنید به بخش ۴-۲-۱).
استدلال تأثیر تعاملی پیچیده‌تر از یک رابطه وابستگی است. یک تأثیر تعاملی فقط تأثیر پاداش خارجی یا جذّابیت تکلیف به تنهایی نیست، بلکه تأثیر ترکیب آن دو است. این مطلب را از جنبه دیگری هم می‌توان بیان کرد که در قسمت بعد توضیح داده می‌شود.

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r] & X_2 \\ & X_3 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

این حالت نشان دهنده تاثیر یک اثر بر اثر دیگر است، در ست مانند $\substack{X_1\\X_3} \rightarrow X_2$ به عنوان یک تأثیر تعاملی. تفسیر آن در این جا بدین صورت خواهد بود که عامل X_3 بر رابطه وابستگی بین X_2 و X_1 اثر می‌گذارد. در مثال فوق تأثیر پاداش‌های خارجی بر انگیزش درونی برای سطوح مختلف X_3 به‌گونه‌ای متفاوت عمل می‌کند. برای تکالیف جذاب این تاثیر X_1 بر X_2 منفی و ازسوی دیگر برای تکالیف غیرجذاب این تأثیر مثبت می‌باشد.
بنابراین ساختار اثر تعاملی مثل زنجیره علی $X_2 \leftarrow X_1 \leftarrow X_3$ نیست، همچنین شبیه رابطه علّی همگرا نیز نمی باشد، بلکه از هر یک از این ها پیچیده‌تر است. با استفاده از پرانتز می‌توان آن را به این صورت نشان داد: $(X_2 \leftarrow X_1) \leftarrow X_3$. یعنی رابطه وابستگی $X_2 \leftarrow X_1$ تحت تأثیر X_3 قرار گرفته است.
از این نقطه نظر متغیرهای مستقل X_1 و X_3 را می توان با هم عوض کرد و ساختار $(X_2 \leftarrow X_3) \leftarrow X_1$ را به وجود آورد. یعنی وقتی پاداش‌های خارجی وجود نداشته باشند، اثر جذّابیت تکلیف بر انگیزش درونی، مثبت است و اگر پاداش‌های خارجی

به کار روند، منفی است. این تعویض‌پذیری متغیرهای مستقل، ارائه علامت پیکان دو شاخه را توجیه می‌نماید.

۲-۱-۲ آشنایی اولیه با شیوه‌ها

با استفاده از علائم فوق، اکنون می‌توانیم قالب‌بندی مهمترین شیوه‌های تحلیل چند متغیره را نشان دهیم.

۲-۲ طبقه‌بندی های فرعی

۲-۲-۱ شیوه‌های وابسته و غیر وابسته

بحث بر روی آزمایش کردن به عنوان مناسب ترین طرح برای تحقیق درباره روابط علّی را در این جا کنار می‌گذاریم. این مسیر را پیش می‌گیریم که تحلیل‌های چند متغیری نیز به روی تحقیقات علّی باز هستند.

تحلیل چند متغیری و تفکیکی[1] همبستگی و رگرسیون، تحلیل واریانس و کوواریانس و تحلیل تمایزی[2] نمونه‌های معمول شیوه‌های وابسته‌اند. تحلیل مسیر[3] و لیزرل[4] شیوه‌های وابسته پیشرفته‌تر تحلیل هستند که نوع کامل تری از رگرسیون چند متغیری بوده، و در ساده ترین شکل خود به همان رگرسیون چند متغیری تنزل می یابند.

زمانی که دو متغیر مکنون در ساختار کانونی دارای رابطه علّی باشند – مثل نابرابری اقتصادی و عدم ثبات سیاسی (نگاه کنید به بخش۷-۲-۱) تحلیل همبستگی متعارف[5] (کانونی) را هم می‌توان وابسته به حساب آورد. از آنجا که این حالت لزوماً وجود ندارد و محاسبه این شیوه بر مبنای تقارن نمی باشد، ما تحلیل همبستگی متعارف را به عنوان شیوه‌ای غیر وابسته قلمداد می‌کنیم.[6]

تحلیل عوامل، تحلیل خوشه ای[7] و مقیاس‌بندی چند بعدی[8]، به لحاظ تعریفی غیر وابسته هستند. این شیوه‌ها را اغلب به هم وابسته می خوانند اما این واژه باعث ابهام می‌شود. واژه غیر وابسته واژه بهتری است، چون تداعی بین متغیرها در آن، جنبه علت و معلولی پیدا نمی‌کند. مثال مربوط به سازگاری زناشویی (بخش ۶-۲-۱) و آرایش اتاق نشیمن (بخش ۸-۲-۱) نمونه‌هایی از آن هستند. این تحلیل‌ها متقارن هستند. از تداعی های بین یک مجموعه از متغیرها یک ساختار مکنون استنباط می‌گردد، بدون این که سؤالی از وابستگی به میان آید.

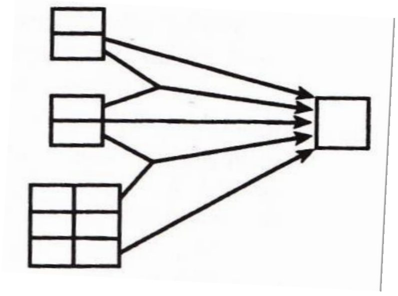
1. Partial analysis 2. Discriminant analysis 3. Path analysis 4. LISREL
5. Canonical correlation

۶. البته باید یادآوری کنیم که یک نوع متقارن تحلیل همبستگی کانونی بر مبنای رگرسیون چند متغیری در یک امتداد ارائه شده که مسلماً از نوع وابسته می باشد.

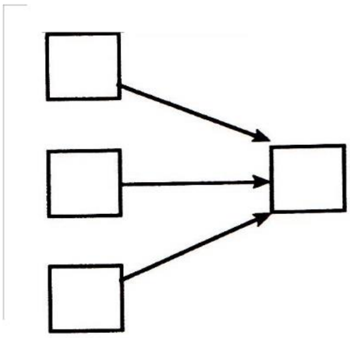
7. Cluster analysis 8. Multidimensional scaling

۲-۲-۲ تعداد متغیرهای وابسته

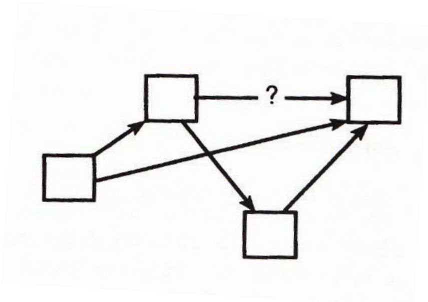
گاهی اتفاق می افتد که متغیر وابسته در یک مسأله تحقیق وابستگی به شیوه‌های مختلفی اندازه‌گیری می شود. مثالی از این مورد، عملکرد دانش آموزان ا ست که با آزمون‌های ب سیار متفاوتی اندازه‌گیری می‌شود. این امکان هم وجود دارد که یک مسأله تحقیق همزمان به چندین متغیر وابسته رجوع کند. این در حالتی است که به طور مثال نه تنها تأثیر عقاید مسیحی بر یهودستیزی مورد بررسی قرار گیرد (بخش۳-۲-۱)، بلکه تأثیر این عقاید بر ضدیت با کمونیسم هم مورد مطالعه قرار گیرد.



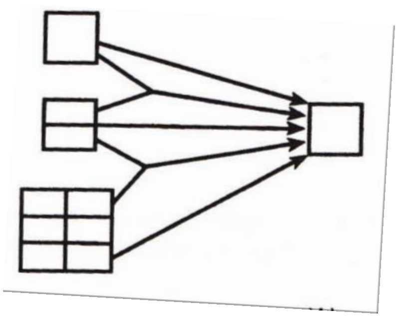
تحلیل واریانس (آنوا)
(ساختار تعاملی)



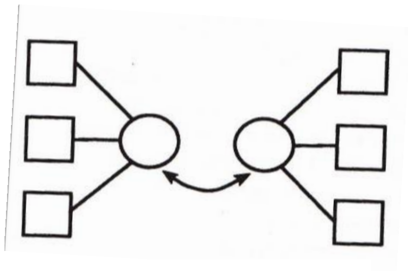
تحلیل رگرسیون چند متغیری
(ساختار علّی همگرا)



تحلیل همبستگی تفکیکی
(علیّت غیر واقعی یا غیر مستقیم)

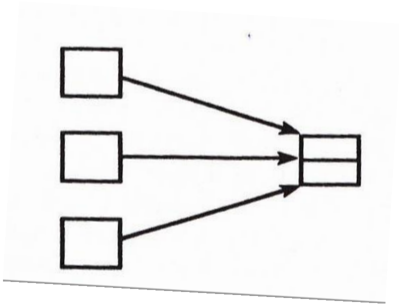


تحلیل کوواریانس (آنکوا)
(ساختار تعاملی)



تحلیل همبستگی کانونی (متعارف)

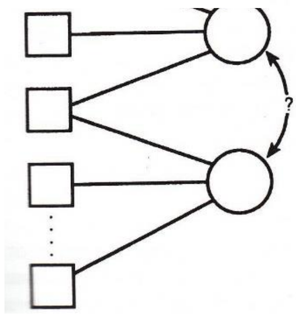
(ساختار کانونی)



تحلیل تمایزی

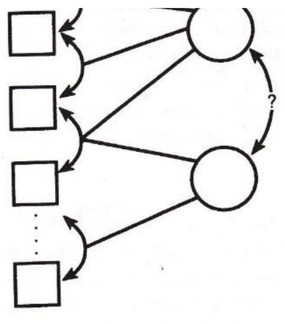
(ساختار تمایزی)

شکل ۱-۲ تحلیل رگرسیون چند متغیره



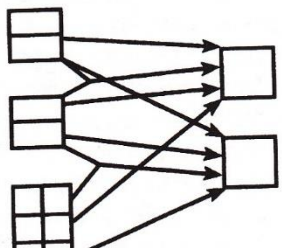
مقیاس‌بندی چند بعدی

(ساختار مکنون شباهت‌ها)



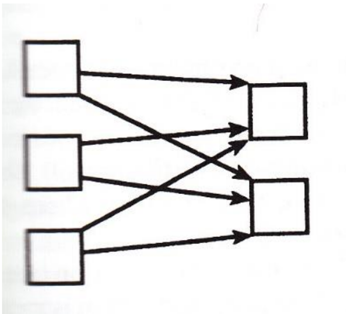
تحلیل عامل و خوشه‌ای

(ساختار مکنون)



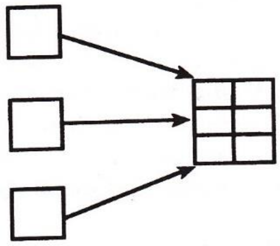
تحلیل چند متغیری واریانس

(ساختار تعاملی دو یا چند زمان)

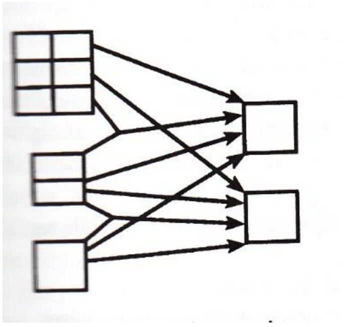


رگرسیون چندگانه چند متغیری

(ساختار علّی همگرای دو یا چند زمان)



تحلیل تمایزی چند گانه
(ساختار تمایز با بیش از دو گروه جمعیتی)



تحلیل چند متغیری کوواریانس
(ساختار تعاملی دو یا چند زمان

شکل ۱-۲ ادامه

بدین ترتیب یک طبقه‌بندی اولیه به این شرح است:

شیوه‌های وابسته	**شیوه‌های غیر وابسته**
رگرسیون چندمتغیره	تحلیل عوامل
همبستگی تفکیکی	تحلیل خوشه‌ای
تحلیل واریانس	مقیاس‌بندی چند بعدی
تحلیل کوواریانس	تحلیل همبستگی متعارف
تحلیل تمایزی	

بر این اساس برای تعدادی از شیوه‌های وابسته برخی نسخه‌های پیچیده‌تر توسعه یافته است که با چندین متغیر وابسته سروکار دارند. با رجوع به فصل اول سه نمونه را ذکر می‌کنیم.

اول این‌که، ساختار علّی همگرا در تحقیق مربوط به بی فرزندی (بخش ۲-۲-۱) به وسیله رگرسیون چندگانه مورد تحلیل قرار گرفت. اگر پس از $\Delta\%$ زنان بدون فرزند $\Delta\overline{X}$ تعداد فرزندان را به عنوان یک متغیر وابسته خارجی اضافه کنیم (یعنی مسأله تحقیق را از بی‌فرزندی به کنترل موالید گسترش دهیم)، آن گاه ناگزیر از به کارگیری تحلیل رگرسیون چند متغیره هستیم که «چند متغیره» بیانگر حضور چندین متغیر وابسته است.

دوم، ساختار تعاملی در تحقیق مربوط به انگیزش درونی (بخش ۴-۲-۱) به وسیله شیوه تحلیل واریانس مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. حال اگر انگیزش درونی به دو روش سنجیده شود، یکی به صورت میزان وقت آزاد صرف شده برای یک کار یا تکلیف (مقیاس رفتاری) و دیگری به شکل درجه‌بندی علاقه و تمایل به یک تکلیف (مقیاس نگرش سنجی)، دراین حالت ناگزیر از به‌کارگیری یک تحلیل واریانس چند متغیره هستیم. در اینجا هم صفت «چند متغیره» اشاره به حضور چند متغیر وابسته دارد.

سوم، ساختار تمایزی در تحقیق پیرامون شهروندان فقیر (بخش ۵-۲-۱) است که از طریق تحلیل تمایزی دو گروهی مورد تحلیل قرار گرفت. اگر بجای دو گروه، سه نوع از شهروندان مشخص شوند، این متغیر سه بخشی می‌تواند توسط دو متغیر تصنّعی (دامی) نشان داده شود (رجوع کنید به بخش ۱-۱-۲). حالت اخیر به صورت دو متغیر وابسته عمل می‌کند. در این حالت یک تحلیل تمایزی چندگانه ترتیب می‌دهیم، که «چندگانه» نشان دهنده وجود بیش از یک متغیر وابسته (بیش از دو گروه) است.

براین اساس دسته‌بندی دیگر شیوه‌های وابسته به این شرح است:

یک متغیر وابسته	**چند متغیر وابسته**
رگرسیون چندگانه	رگرسیون چند متغیره چندگانه
تحلیل واریانس	تحلیل واریانس چند متغیری
تحلیل کوواریانس	تحلیل کوواریانس چند متغیری
تحلیل تمایزی(دوگروهی)	تحلیل تمایزی چندگانه

۳-۲-۲ سطح اندازه‌گیری متغیرهای وابسته

معیار دیگر برای طبقه‌بندی شیوه‌های تحلیل وابستگی، سطح سنجش متغیرهای وابسته (یک یا چند متغیر وابسته) است. از آنجا که تقریباً در تمام شیوه‌های تحلیل وابستگی میانگین و واریانس متغیرهای وابسته محاسبه می شوند در اصل سطح سنجش آن‌ها کمّی می‌باشد. تنها یک استثناء وجود دارد و آن تحلیل تمایزی است. مثال ما در باره شهروندان فقیر و غنی (بخش۱-۲-۵) روشن می سازد که مغیر وابسته دو بخشی است. وقتی که مسأله تحقیق را به چندین قشر از شهروندان گسترش دهیم، چند بخشی می‌شود.

بنا بر این می‌توان گفت، تحلیل تمایزی (دویا چند گروهی) نمونه خاصی از یک شیوه تحلیل وابستگی با متغیر(های) سطح سنجش پایین است، طوری که از شیوه‌های دیگر مثل تحلیل رگرسیون چندگانه و تحلیل واریانس و کوواریانس که متغیر وابسته باید کمّی (حداقل در مقیاس فاصله‌ای) باشد متمایز می‌گردد.

البته روش‌های دیگری نیز برای تحلیل مدل‌های دارای متغیر وابسته در سطح سنجش پایین وجود دارد، مثل مدل لاجیت[1]، پروبیت[2] و غیره. این روش‌ها به منظور تبدیل متغیر وابسته غیرکمّی به کمّی با استفاده از تغییر و تبدیل‌های آماری به کار می‌روند، طوری که یک شیوه تحلیل آماری سنتی مثل تحلیل رگرسیون را بتوان اجرا کرد.

1. logit
2. probit

برای این که خود را در قالب‌بندی شیوه‌های سنتی اساسی محدود کنیم، به طبقه‌بندی فرعی پایین از شیوه‌های تحلیل وابستگی می‌پردازیم (یک یا چند متغیر وابسته):

کمّی	**متغیر وابسته اسمی**
رگرسیون چندگانه	تحلیل تمایزی
همبستگی تفکیکی	
تحلیل واریانس	
تحلیل کوواریانس	

باید توجه داشت که سطح سنجش متغیر وابسته همیشه کمّی یا اسمی نیست، بلکه می‌تواند رتبه‌ای هم باشد؛ مثل منزلت اجتماعی با مرتبه پایین، متوسط و بالا. با این خصیصه‌های رتبه‌ای هم همچون حالت اسمی آن عمل می شود. در این حالت کدهای ساختگی(دامی) آن ساده خواهد بود. این کار تقلیل سطح سنجش است به طوری که اطلاعات ترتیب که در متغیر وابسته است مورد استفاده قرار نمی‌گیرد.

تعداد شیوه‌هایی که در آن‌ها، خصیصه رتبه‌ای متغیر مد نظر قرار می‌گیرد، خیلی کم هستند. به بیان روشن‌تر، بعضی شیوه‌های خاص تحلیل واریانس مثل تحلیل واریانس همسوی کروسکال و کارمون[1] (۱۹۶۸)، و تحلیل واریانس رتبه‌ای کروسکال و والیس[2] (۱۹۵۲) برای این کار وجود دارد. یک معادله رگرسیون چندگانه و تحلیل مسیر نیز از سوی سامرز (۱۹۶۸) و دیگران ارائه شده است. اما این‌ها یا از لحاظ آماری بسیار پیچیده هستند، یا پیچ و خم‌های آن‌ها هنوز از جنبه استنباطی (تعمیم یافته‌ها از نمونه به جامعه) به خوبی شرح داده نشده است. به این خاطر عموماً روش ساده کدگذاری دامی بر می‌گزینند.

متأسفانه سطح سنجش رتبه‌ای نقطه تاریکی از تحلیل چند متغیره باقی می‌ماند!

۴-۲-۲ سطح سنجش متغیرهای مستقل

در استفاده از این ملاک، تحلیل واریانس یک استثناء است. تقریباً تمام شیوه‌های تحلیل وابستگی برای متغیرهای مستقل در سطح سنجش کمّی طرح شده‌اند. اما در مورد تحلیل واریانس (اعم از یک متغیره یا چند متغیره) چنین نیست. محاسبه واریانس به متغیر وابسته باز می‌گردد که «بایستی» در اصل کمّی باشد. این واریانس درون و بین مقوله‌های متغیرهای وابسته محاسبه می‌شود. دومی، نشان‌دهنده گروهاست، به همین جهت در یک سطح سنجش پایین‌تر اندازه‌گیری می‌شود.

در مثال تحقیقی درباره انگیزش درونی (بخش ۴-۲-۱) پاداش‌های خارجی و جذّابیت تکلیف، دو متغیر مستقل هستند: یک پاداش خارجی ارائه می‌شود یا نمی‌شود و یک تکلیف، جذّاب، خنثی یا غیرجذاب است. از این دو متغیر مستقل، پاداش‌های خارجی، متغیر دو بخشی به حساب می‌آیند.

1. Kruskal and Carmone's monotonic analysis of variance
2. Kruskal and Wallis' analysis of variance for ranks

جذّابیت تکلیف دارای سه مقوله یا بهتر بگوییم: رتبه است، از این جهت یک متغیر رتبه‌ای به حساب می‌آید. این در تحلیل واریانس عادی است که هر دو متغیر مستقل در سطح سنجش پایین‌تر از سطح سنجش فاصله‌ای، اندازه‌گیری شده باشند.

اینجا، یک نکته ظریف درباره تحلیل کوواریانس وجود دارد. پیشوند«کو»، گویای آن است که همه متغیرهای مستقل در سطح سنجش پایین اندازه‌گیری نشده‌اند، بلکه حداقل یکی از آن‌ها کمّی است که «کو»واریانس قابل محاسبه است. به عبارت دیگر، در تحلیل کوواریانس ترکیبی از سطوح اندازه‌گیری در بخش متغیرهای مستقل وجود دارد. متقابلا در تحلیل واریانس، وضعیت روشن است: تمام متغیرهای مستقل، دو بخشی یا چند بخشی (یا حتی رتبه‌ای) هستند. در تمام شیوه‌های دیگر تحلیل وابستگی نیز وضعیت همین گونه روشن است: همه متغیرهای مستقل، کمّی هستند.

از این نکات، دسته‌بندی زیر از شیوه‌های تحلیل وابستگی (چه یک متغیر وابسته باشد یا بیشتر) حاصل می‌شود:

سطوح سنجش متغیرهای مستقل:

اسمی	**کمّی**	**ترکیبی**
تحلیل واریانس	رگرسیون چندگانه	تحلیل کوواریانس
همبستگی تفکیکی	تحلیل تمایزی	

۵-۲-۲ ساختار افزایشی و تعاملی

در صفحات قبل به طور مکّرر اهمیت ساختار تعاملی را مورد تأکید قرار دادیم. تحلیل واریانس و کوواریانس (یک متغیره یا چند متغیره) شیوه‌های مناسبی برای تحقیق درباره اثرات تعاملی هستند. در مثال خود پیرامون انگیزش درونی (بخش۴-۲-۱) نشان دادیم که مبحث اثرات تعاملی نسبتاً پیچیده‌تر است. حتی وقتی تعداد متغیرهای مستقل بیش از دو مورد باشد، این پیچیدگی بیشتر هم خواهد شد که از آن موارد به عنوان اثرات تعاملی مراتب بالاتر یاد می‌شود.

وجود یک متغیر وابسته Y و سه متغیر مستقل $X_۱$، $X_۲$، $X_۳$، بدین معناست که اثر $X_۱$ بر Y برای مقوله‌های $X_۲$ متفاوت است واین تفاوت‌ها نیز برای مقوله‌های $X_۳$ متفاوت هستند. از این مطلب درمی‌یابیم‌که‌تفسیرمثلاًیک‌اثر تعاملی مرتبه هفتم چیزی کمتر از فایده یک تمرین ذهنی نخواهد بود.

در شیوه‌های تحلیل واریانس (ANOVA)، تحلیل واریانس چند متغیری (MANOVA)، تحلیل کوواریانس (ANCOVA) و تحلیل کوواریانس چند متغیری (MANCOVA)، این تأثیرات تعاملی محاسبه شده و معناداری آن‌ها مورد آزمون قرار می‌گیرد.

تمام شیوه‌های دیگر چه وابسته و چه غیر وابسته «در اصل» افزایشی[1] هستند، به این معنی که اثرات تعامل محاسـبه و شـمارش نمی‌شـوند. با تمایزی که بین سـاختارهای افزایشـی و تعاملی قائل شدیم دسته‌بندی زیر حاصل می‌شود:

ساختار افزایشی	**ساختار تعاملی**
رگرسیون چندگانه	تحلیل واریانس
همبستگی تفکیکی	تحلیل کوواریانس
تحلیل تمایزی	تحلیل واریانس چند متغیره
تحلیل عوامل و تحلیل خوشه‌ای	تحلیل کوواریانس چند متغیره
مقیاس‌بندی چند بعدی	

۶-۲-۲ متعامد بودن متغیرهای مستقل

در این بخش به جای دســـته‌بندی می‌خواهیم یک نکته را تحت عنوان اقتضـــای نیاز به متعامد بودن گو شزد کنیم. متعامد بودن دو متغیر بدین معنی ا ست که آن‌ها به صورت خطی بر یکدیگر عمودند، یعنی نقطه مشترکی ندارند و همبستگی آن‌ها صفر است.

این متعامد بودن متغیرهای م ستقل در شیوه‌های تحلیل واب ستگی از اهمیت خا صی برخوردار ا ست. در این حالت کاربرد رگر سیون چندگانه اعتبار ندارد. قالب‌بندی ا صلی این شیوه ساختار علّی همگراســت. در مثال تحقیقاتی بی‌فرزندی که قبلاً آمد (بخش۲-۲-۱)، گفتیم که متغیرهای مســتقل ا صولاً نباید همپو شی دا شته با شند. اما احتمال می‌دادیم که عامل‌های تحصیلات ($X_۲$) و سن ازدواج ($X_۴$) همبستگی زیادی داشته باشند.

اینگونه همبستگی بین متغیرهای مستقل را در مدل رگرسیون چندگانه، «هم‌خطی بودن» می‌نامند. یک رابطه کامل = ۱ به این معنی خواهد بود که یک یا هر دو متغیر برای تبیین بی‌فرزندی کافی اســت، طوری که یکی از آن دو را می‌توان از تحلیل حذف نمود (هم‌خطی کامل). از ســوی دیگر عدم همبستگی کامل به این معناست که هر دو عامل تبیین خود را «به طور مستقل»، بدون هرگونه هم پوشی (عدم هم‌خطی بودن) ارائه می‌کنند. تصویر ۲-۲ تجسمی از این قضیه را نشان می‌دهد.

خواندن مثال‌های زیادی از تحلیل رگرسیون چندگانه نشان داد که هم‌خطی یک قاعده است نه یک استثناء. از این رو ما تحقیقی که این شیوه را به کار گیرد «نامعتبر» می‌خوانیم.

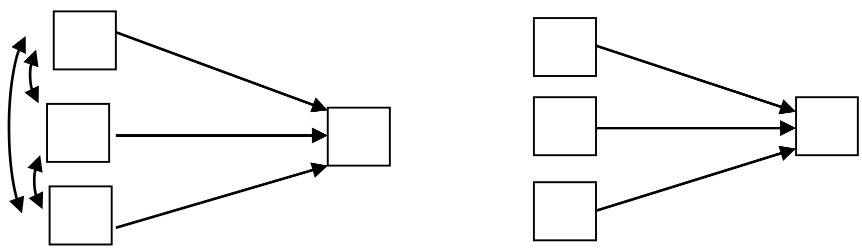
ما فقط یک مثال را یافتیم که در آن متغیری‌های مستقل را می‌توانستند در زمینه‌های ا سا سی متعامد بحســاب آیند و رابطه تجربی بین آن‌ها تقریباً صــفر بود. در این تحقیق که به وســیله المار لانگ[2] به عمل آمد وی مشاهده کرد شمار جامعه‌شناسان در دانشگاه بیلفلد طی سال‌های ۱۹۶۱ الی

---

1. Additive
1. Elmar Lange
2. Exogenous
3. Social origin
4. Principal components analysis

۱۹۷۰ تقریباً ۲۰۰٪ افزایش یافته است، در حالی که این نسبت در تمام رشته‌های علمی روی هم تنها ۴۰٪ افزایش یافته بود(لانگ، ۱۹۷۸). در تحلیل وی با در نظر گرفتن مطالعه به عنوان متغیر وابسته، دو متغیر برون‌زاد[۲] (مستقل) عبارت بودند از جنسیت و خاستگاه اجتماعی[۳] (اندازه‌گیری شده به وسیله سطح شغلی پدران). همبستگی تجربی بین جنسیت و خاستگاه اجتماعی ۰/۰۳ به دست آمد. در اغلب دانشگاه‌های دنیا وضعیت برعکس بود: اگر دانشجویان دختر وارد دانشگاه شده بودند غالباً از سطوح اجتماعی بالا بودند. محقق از این واقعیت آگاه بود که دانشگاه بیلفلد یک استثناست: دانشجویان دختر و پسر به نسبت مساوی از سطوح اجتماعی بالا آمده بودند.

واضح است که یک محقق همیشه نمی‌تواند به گونه‌ای که المار لانگ عمل کرد، از هم خطی بودن متغیرها دوری کند. بنابراین ناچار است به شیوه‌های متعامدسازی پناه ببرد که در آن متغیرهای مستقل غیرمتعامد به طور مصنوعی متعامد می شوند، طوری که تحلیل رگرسیون چندگانه بتواند به گونه‌ای مناسب اجرا شود. این موضوع را در مبحث تحلیل مولفه‌های اصلی[۴] مورد بحث قرار خواهیم داد.



نبود هم‌خطی (متغیرهای مستقل متعامد)   **هم‌خطی بودن (متغیرهای مستقل غیرمتعامد)**

شکل ۲-۲ رگرسیون چندگانه با هم‌خطی و بدون آن

ضرورت متعامد بودن متغیرهای مستقل برای تمام شیوه‌های تحلیل وابستگی با ساختار علّی همگرا، اساسی تلقی می شود. بدین ترتیب در تحلیل تمایزی هم در ست مثل رگرسیون چندگانه، متغیرهای مستقل نباید همبستگی زیادی با یکدیگر داشته باشند.در ادبیات رگرسیون از عبارت«نبودن هم خطی» استفاده می‌شود، در حالی که معنای آن همان«متعامد بودن متغیرهای مستقل» است. از سوی دیگر در تحلیل واریانس، واژه متعامد بودن به کار می‌رود. این ناهمگونی واژه‌ها ریشه تاریخی دارد. در شیوه‌های دارای متغیرهای مستقل کمّی رسم این است که از وابستگی‌های خطی صحبت می شود. دو متغیر مستقلی که به طور خطی وابسته‌اند هم‌خط[۱] خوانده می‌شوند. واژه‌ی هم خطی نیز به همین ترتیب برای چندین متغیر معمول است.

1. Collinear

تحلیل واریانس از یک نوع تفکر سـنتی کاملاً متفاوت بر مبنای طرح‌های آزمایشی ریشه می‌گیرد. در مثال تحقیقی درباره تأثیر شوخی و امتیازات مالی (بخش ۱-۲-۱)، آزمایش استاندارد را مورد بحث قرار دادیم و دیدیم که اساساً بر دو متغیر، یکی مستقل و دیگری وابسته تمرکز دارد و ساختار آن دو متغیری است. در دهه ۱۹۳۰ محدودیت این طرح مورد توجه خاص سر رونالد فیشر قرار گرفت. او می‌خواست چندین متغیر مستقل (که عامل‌ها نامیده می شوند) را به طور هم زمان در یک طرح بگنجاند و نه تنها روابط وابستگی را مورد توجه قرار دهد، بلکه تأثیرات تعاملی را هم مدنظر قرار دهد. این طرح عاملی که در آن زمان، آزمایش عاملی نامیده می‌شد، منجر به توسعه تحلیل واریانس شد. چنین طرحی ناگزیر بود تاحد امکان رونوشتی از آزمایش کنترل شده را حفظ کند. یکی از لوازم آن متعامد بودن، بود. در تحقیق مربوط به انگیزش درونی (بخش۴-۲- ۱) این بدان معنی است که تمام ترکیب‌های مقوله‌های متغیرهای مستقل (در این جا ۶= ۳×۲ ترکیب) بایستی با تعداد مساوی افراد ارائه گردد. در این وضعیت که فراوانی تمام خانه‌های جدول برابر است متغیرهای مستقل ناهم بسته‌اند. نتیجه منطقی مطلب فوق این خواهد بود که حالت متعامد بودن متغیرهای مستقل به همان معنای نبودن هم‌خطی است، ولی حالا به سطوح اندازه‌گیری پایین‌تر اشاره دارد.

یک تذکر نهایی در اینجا لازم به نظر می‌رسد. از تجارب یک ساله با دانشجویان ما آموخته‌ایم که آنان همیشه نمی‌توانند تمایز دقیقی بین اثرات تعاملی و هم‌خطی بودن قائل شوند. دلیلش ممکن است این باشد که در هر دو عبارت چیزی شبیه به فرایند تعاملی بین متغیرهای مستقل برقرار است. تکرار می‌کنیم که مبحث یک اثر تعاملی بسیار پیچیده‌تر است: برای یک متغیر وابسته Y و دو متغیر مستقل X و Z اثر تعاملی به این معناست که تأثیر علّی X بر Y برای مقوله‌های مختلف Z فرق می‌کند، طوری که برای تبیین Y باید ترکیبات X و Z را مد نظر قرار داد. در مقابل هم خطی یا غیرمتعامد بودن به طور ساده بدین معنی است که X و Z با یکدیگر هم‌بسته هستند؛ نه کمتر و نه بیشتر.

۷-۲-۲ متغیر مسأله و رابطه مسأله

در بسیاری از شیوه‌های تحلیل وابستگی چیزی که تبیین می شود یک متغیر مسأله است. افزایش بی‌فرزندی نمونه‌ای از آن است (بخش۲-۲-۱. خصیصه « $\Delta\%$ زنان بدون فرزند» به عنوان یک متغیر وابسته در نظر گرفته شد و از طریق رگرسیون چندگانه بررسی گردید که تا چه حد می‌توان آن را به وسیله یک مدل چند عاملی علّی تبیین کرد. انگیزش درونی مثال دیگری از متغیر مسأله است (بخش۴-۲-۱) که بایستی بوسیله پاداش‌های خارجی، جذابیت تکلیف و تعامل آن‌ها تبیین می شد. باز مثال دیگر از متغیر مسأله، فقر شهروندان است (بخش۵-۲-۱). این متغیر به صورت یک متغیر تصنعی (دامی) کدگذاری شده که دو بخشی، شامل مقوله‌های فقیر و غنی می‌باشد. شماری از خصیصه‌های متمایز کننده شهروندان برای توضیح موضوع، طرح شده است.

در مثال مربوط به تأثیر عقاید مسیحیت بر یهودستیزی (بخش۳-۲-۱) وضعیت فرق دارد. نقطه آغاز مسأله تحقیق در اینجا یک رابطه مسأله است نه یک متغیر مسأله. خواه این سؤال مطرح باشد که آیا بین عقاید مسیحیت و یهود ستیزی و متغیرهای پیش‌بینی کننده یک رابطه علّی وجود دارد و لذا متغیرهای پیش‌بینی کننده مورد توجه باشند که رابطه علّی تصنعی را نشان می‌دهد (علیت ساختگی)، یا اعتبار اثر علّی قانع کننده است و لذا متغیرهای میانجی منظور شده‌اند که در تبیین رابطه علّی سودمند هستند (علّیت غیر مستقیم). شیوه مورد استفاده در تحقیق تصنّعی و یا رابطه علّی غیر مستقیم، تحلیل همبستگی تفکیکی است. یک شکل پیشرفته‌تر آن که در بخش دوم کتاب توضیح داده می‌شود، شیوه سیمون - بلالاک است. تحلیل مسیر و شیوه لیزرل هم مناسب هستند. نقطه شروع این شیوه‌ها یک رابطه مسأله است نه صرفاً یک متغیر مسأله.

بدین ترتیب از شیوه‌های تحلیل وابستگی، دسته‌بندی دیگری به شرح زیر به دست می‌آید:

متغیرمسأله به عنوان نقطه شروع	**رابطه مسأله به عنوان نقطه شروع**
رگرسیون چندگانه	تحلیل همبستگی تفکیکی
تحلیل واریانس	(شیوه سیمون-بلالاک)
تحلیل کوواریانس	تحلیل تمایزی

۲-۲-۸ یک یا چند مرحله تسلسلی

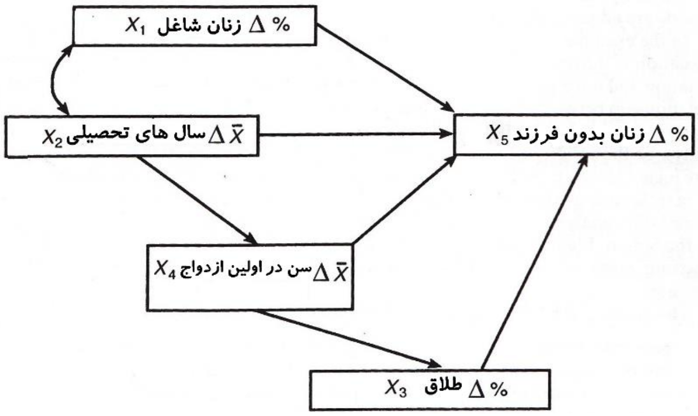
تا این جا فقط یک مرحله را در تحلیل رگرسیون چندگانه مورد توجه قرار دادیم. همراه با متغیر وابسته بی‌فرزندی (بخش ۱-۲-۲) شماری از عوامل علّی آورده شد، اما به جستجوی عللی که عمیق‌تر بودند نپرداختیم. هر یک از متغیرهای مستقل تحصیلات، سن ازدواج و غیره، به عنوان عواملی که تأثیر مستقیمی بر بی‌فرزندی می‌گذارند در نظر گرفته شدند. این نوع بررسی اثرات علّی مستقیم، به عنوان تحلیل یک مرحله‌ای محسوب می‌شود.

زمانی‌که چند مرحله تسلسلی درگیر باشند ما نه تنها در پی بررسی آن علت‌ها هستیم، بلکه علل خود آن‌ها را هم جستجو می‌کنیم. در مرحله بعد می‌توان علل مرتبه بالاتر را هم جستجو کرد. البته این جستجو را نمی شود تا بی‌نهایت ادامه داد. مدل حدی دارد. متغیرهایی که در آخرین حلقه زنجیر علت‌ها قرار می‌گیرند وعلل دیگری برای آن‌ها جستجو نمی‌شود، متغیرهای برون‌داد نامیده می‌شوند.

در مثال تحقیقی بی‌فرزندی می‌توانستیم با توجه به مکانیزم‌های علّی بین متغیرهای مستقل، چند مرحله سلسله مراتبی را وارد کنیم. در گروه‌هایی که میانگین Δ سن ازدواج بالاست، $\Delta\%$ کمتری از طلاق وجود خواهد داشت تا درگروه‌هایی از زنان که در آن‌ها تغییر در میانگین سن ازدواج کم است، بدین ترتیب X_4 یک علت مستقیم X_3 می‌باشد. می‌توان انتظار داشت که X_2 نیز یک علت مستقیم X_4 باشد، زیرا گروه‌هایی از زنان که تحصیلات بالاتری دارند با تأخیر در ازدواج، میانگین سن

ازدواج بالاتری را هم نشان می‌دهند. با در نظر گرفتن این دو رابطه علّی، ساختار علّی همگرای تحلیل رگرسیون چندگانه به تصویر ۲-۳ تبدیل می‌شود که شامل چند مرحله سلسله مراتبی است.

تغییر در پیشرفت تحصیلی و تغییر در تعداد زنان شاغل دو متغیر برون‌زاد هستند. یک رابطه غیر علّی بین آن‌ها فرض شده است (کمان منحنی دو سویه). این مدل شامل سه مرحله تسلسلی: از تحصیلات به سن ازدواج، از سن ازدواج به طلاق و از طلاق به بی‌فرزندی است.



شکل ۳-۲ مدلی با چند مرحله از تسلسلی

برای تحلیل چنین مدلی با چند مرحله تسلسلی، مدل کلی به مدل‌های جزئی تقسیم می‌گردد. هر مدل جزئی دارای قالب‌بندی ساختار علّی همگرا، با یک متغیر وابسته و یک یا چند علّت مستقیم است. برای هر مدل جزئی یک معادله ریاضی با متغیر وابسته (مثلاً $X_۵$) به عنوان تابعی از علل مستقیم ($X_۱$، $X_۲$،$X_۳$ و $X_۴$) طرح شده است. از این طریق در یک سیستم به تعداد مدل‌های فرعی‌ای که وجود دارند معادله بیرون می‌آید:

$$X_۵ = f(X_۱،X_۲،X_۳،X_۴)$$
$$X_۳ = f(X_۴)$$
$$X_۴ = f(X_۲)$$

چنین سیستمی از معادلات را یک «مدل معادلات ساختاری» یا یک «مدل معادلات همزمان» می‌نامند. از جمله شیوه‌های معمول و مناسب برای تحلیل چند متغیره چنین سیستمی، یک نمونه اولیه تحلیل مسیر است. یک شیوه تحلیل پیشرفته‌تر **لیزرل** است که مخفف «سیستم روابط ساختار خطی» است. برای سطوح سنجش پایین‌تر برخی رویکردهای مشابه با معادلات همزمان طرح شده است. به طور نمونه نسخه تحلیل مسیر مدل لگاریتم خطی را می‌توان نام برد.

شیوه دیگری که در اصل چند مرحله تسلسلی را مورد تحلیل قرار می‌دهد تحلیل همبستگی تفکیکی و نسخه پیشرفته‌تر آن یعنی شیوه سیمون - بلالاک است. در قالب‌بندی علّیت غیرمستقیم (نگاه کنید به بخش ۳-۲-۱) دو مرحله تسلسلی دخالت دارند: از اعتقادات مسیحیت به سمت جانبداری از آزادی فردی[1] ($X۱ \to X۳$) و از آن به سمت یهودستیزی ($X_3 \to Y$). البته این حالت وجود مراحل تسلسلی چندگانه تنها به صورت ضمنی و تلویحی است. در واقع همان طوری که در قسمت ۷-۲-۲ گفتیم نقطه آغازین این شیوه، متغیر مسأله (یهود ستیزی) نیست، بلکه رابطه مسأله «مذهب - ؟←یهودستیزی» است. بررسی علت‌العلل‌ها در این جا مدنظر نمی باشد.

از سوی دیگر می توان طرح علّیت غیرمستقیم را به وسیله تحلیل مسیر و از طریق سیستم معادلات ساختاری تحلیل کرد. در این حالت یهود ستیزی متغیر مسأله مرحله نخست خواهد بود با عامل های علّی اعتقادات مسیحیت و آزادی خواهی، طی یک مرحله ثانوی تاثیر علّی اعتقادات مسیحیت بر آزادی خواهی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. آنگاه انتظار از این تحلیل این خواهد بود که تاثیر علّی اعتقادات مسیحیت بر یهودستیزی تقلیل یافته باشد. بدین ترتیب همچون تحلیل همبستگی تفکیکی، در اینجا نیز از این رویکرد، نتایج مشابهی را می‌توان به دست آورد، چنان‌که این جا هم رابطه علّی به طور ساختگی بر می‌آید. در هر صورت شیوه تحلیل فرق دارد. از یک‌سو، کمتر با مسأله تحقیق در ارتباط است، زیرا نقطه شروع، متغیر مسأله است نه رابطه مسأله. از طرف دیگر ارتباط بهتری دارد، چون دو مرحله تحلیلی به طور آشکارتری با محاسبات روش آماری درگیر شده‌اند. مزیت دیگر ان شیوه این است که ضرایب نامتقارن در محاسبات به کار رفته‌اند (ضرایب مسیر)، برخلاف تحلیل همبستگی تفکیکی که اندازه‌های متقارن (ضرایب همبستگی) را به کار می‌گیرد. در بخش دوم کتاب تفاوت‌های بیشتر آن‌ها را مورد بحث قرارخواهیم داد. در اینجا فقط می‌توان به این بسنده کرد که به محقق توصیه کنیم سعی کند هر دو شیوه تحلیل را بیازماید.

در طرح یک دسته‌بندی جدید، لازم است شیوه‌هایی که ساختار تعاملی دارند را از بحث کنار بگذاریم، زیرا پیش‌فرض تمام تحلیل‌های دارای چند مرحله تسلسلی، افزایشی بودن[2] (=عدم حضور اثرات تعاملی) است. بنابراین دسته‌بندی فرعی جدید محدود به تمایز بین رگرسیون چندگانه و سیستم‌های تحلیل دارای بیش از یک مرحله تسلسلی می‌گردد:

یک مرحله تسلسلی	**چند مرحله تسلسلی**
رگرسیون چندگانه	مدل‌های معادلات همزمان

1. Libertarianism
1. Additivity

- تحلیل مسیر
- لیزرل

تحلیل همبستگی تفکیکی

شیوه سیمون –بلالاک

۹-۲-۲ متغیرهای آشکار و مکنون

یادآور می‌شویم که یک متغیر آشکار، بدون حصار و یک متغیر مکنون، محصور است. یک متغیر آشکار ویژگی‌ای است که مستقیماً قابل مشاهده و اندازه‌گیری است. مشخص‌ترین نمونه از یک متغیر آشکار سؤال در یک پرسشنامه می باشد.

اما یک متغیر مکنون مستقیماً اندازه‌گیری نشده است، بلکه به صورت یک عبارت فرضی است که به تحلیل افزوده شده یا از آن استنباط می شود. بنابراین ما از یک متغیر فرضی، مفهوم فرضی یا ساختار فرضی صحبت می‌کنیم. مترادف‌های دیگر آن عبارتند از: متغیر نظری، عبارت نظری، مفهوم نظری، سازه‌ی نظری، عامل و متغیر اندازه‌گیری نشده. صفت «نظری» نشان می‌دهد که متغیر مکنون بخشی از یک نظریه است، در حالی‌که متغیر آشکار تنها یک ابزار اندازه‌گیری در سطح عملیاتی است. به طور مثال رابطه‌ی نابرابری اقتصادی و ثبات سیاسی (بخش ۷-۲-۱) در سطح نظریه سیاسی قرار دارد. امّا شاخص «جینی» به عنوان شاخصی از مفهوم نابرابری اقتصادی عمل می‌کند. مترادف‌های «عامل» و «متغیر اندازه‌گیری نشده» محدودترند. عامل، اشاره به شیوه تحلیل عوامل دارد.«متغیر اندازه‌گیری نشده» نشان می‌دهد که متغیر مکنون مستقیماً مورد مشاهده قرار نگرفته است. ما عبارت «متغیر مکنون» را ترجیح می‌دهیم، چون به ساختار پوشیده در مطالب تحقیق اشاره دارد. چند مثال را با رجوع به فصل اوّل بازگو می‌کنیم.

این ایده که بخش زیادی از مواد تحقیق می‌تواند در یک ساختار پوشیده جای گیرد را در مثال مربوط به سازگاری زناشویی مطرح کردیم (قسمت ۶-۲-۱). شیوه تحلیل مورد استفاده در این تحقیق تحلیل عوامل است. در این روش متغیرهای مکنون 'عامل‌ها' نامیده می‌شوند. عامل، یک ترکیب خطی است که به معنای مجموعه‌ای وزن داده شده از شاخص‌هاست. وزن‌ها نشان می‌دهند که هر شاخص تا چه حد با عامل مورد نظر همبستگی دارد. در تصویر (۱۰-۱) می‌توانستیم خطوط رابطه را برای بیشترین وزن‌ها تر سیم کنیم و با استفاده از این خطوط تفسیری از هر عامل بدست آوریم، یعنی نامی را پیدا کنیم که به عنوان یک مفهوم اختصاری از شاخص‌ها عمل کند.

چگونگی محاسبه عامل‌ها، با جزئیات بیشتر در بخش دوم کتاب ارائه خواهد شد. شیوه‌های محاسبه چندان گسترش یافته‌اندکه می‌توان از آن‌ها به عنوان دنیای تحلیل عوامل یاد کرد. به طور کلی عوامل طوری تعیین می‌شوند که براساس بعضی معیارها دارای حداکثر قدرت تبیین باشند. یعنی، مثلاً حداکثر واریانس جواب‌های داده شده به پرسش‌های مصاحبه را بیرون بکشند. غالباً

ترتیبی از اهمیت وجود دارد: همراهی عامل(الف) بیشـــترین قدرت تبیین‌کنندگی را داراســـت، در مرتبه بعدی اهمیت، درجه توافق (ب) و صـــمیمیت عاطفی (ج) قرار دارند. بخشـــی از واریانس که بوســـیله هر ســـه عامل در یک تحلیل ســـه عاملی بحســـاب می‌آید، به این ترتیب در باره قدرت تبیین‌کنندگی مدل کلی تحلیل عوامل، اطلاعاتی را به دست می‌دهد.

مثـال دیگری از یـک متغیر مکنون، هر یـک از متغیرهـای متعـارف (کـانونی) در تحلیـل همبســـتگی متعارف (کانونی) می‌باشــند. نابرابری اقتصـادی و عدم ثبات ســیاســی دو نمونه از آن‌ها هستند (بخش۷-۲-۱). دستگاه X متشکل از پنج شاخص اقتصادی و دستگاه Y متشکل از چهار شاخص سیاسی، متغیرهای اندازه‌گیری شده هستند.

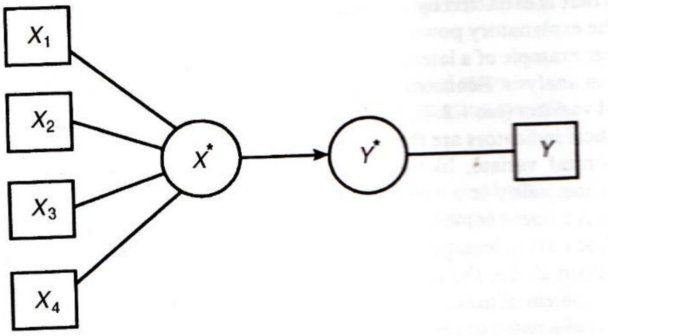
یک متغیر متعارف (کانونی) همچون یک عامل، یک ترکیب خطی از شـــاخص‌ها اســـت. بدین ترتیب، نابرابری اقتصادی ترکیبی خطی از پنج متغیر X و عدم ثبات سیاسی ترکیب خطی از چهار متغیر Y اســت. وزن‌های هر دو ترکیب خطی طوری محاســبه شــده اند که همبســتگی (کانونی) بین آن‌ها حداکثر ممکن باشد. بنابراین وارد کردن متغیرهای مکنون وسیله‌ای برای حل مشکل به حداکثر رساندن همبستگی بین دستگاه X و دستگاه Y است. تخصیص نام به هر یک از متغیرهای کانونی، در این فرایند یک امر جنبی است. در این مثال، مسلماً نام متغیرها به گونه‌ای از قبل فرض شده است. آن‌ها به عنوان عبارات خلاصــه‌ســازی تلقی می‌شــوند. ولی برخلاف تحلیل عوامل، هدف همبســـتگی متعارف (کانونی) جســـتجوی یک مفهوم خلاصـــه برای یک مجموعه از شـــاخص‌ها مثل مجموعه X نیست. مکانیزم این شیوه فرق می کند. در این جا تمرکز، بر تداعی‌های درون یک مجموعه (دستگاه) نیســـت، بلکه بر تداعی‌های بین مجموعه‌هاســـت. مســـائل تفســـیر و نامگذاری از لحظه‌ای وارد عمل می‌شوند که زوج دومی از متغیرهای کانونی را بتوان از یک زوج اولیه متمایز کرد.

موارد متعدد دیگری هم وجود دارند که متغیرهای مکنون وارد عمل می‌شــوند، امّا امکان توجیه آن‌ها به عنوان مفاهیم نظری وجود ندارد یا نمی‌خواهیم این کار را بکنیم. یک نمونه، روشـــن آن، در مثال مربوط به مزاح به عنوان شــیوه نفوذ اجتماعی به وســیله عامل‌های کنترلی ناشــناخته ارائه شــد (بخش ۱-۲-۱). این خصیصه‌ها، عامل‌های یک آزمایش هستند که به لحاظ تعریفی ناشناخته‌اند و انتظار داریم تأثیر آن‌ها از طریق انتخاب تصـــادفی خنثی شـــود. این نوع عوامل باقی مانده را در هر شیوه‌ای می‌توان تشخیص داد ولی برای رعایت اختصار در فصل اول به آن‌ها نپرداختیم.

دلایل دیگری هم وجود دارد که تصدیق می‌کنند یک شیوه تحلیل چند متغیره بدون متغیرهای مکنون موجودیت ندارد. به عنوان نمونه کاربرد تحلیل رگر سیون چندگانه را در تحقیق بی‌فرزندی در نظر بگیرید (بخش۲-۲-۱، تصویر۴-۱). به نظر می‌رسد که در این ساختار علّی، متغیر مکنونی وجود ندارد. اما در بخش دوم کتاب رگرسیون چندگانه را از جنبه فنی مد نظر قرارخواهیم داد و نشان داده خواهد شــد که این شــیوه را می‌توان مورد خاصـــی از تحلیل همبســـتگی متعارف در نظر گرفت که

متغیرهای مکنون به شـکل ترکیب خطی متغیرهای آشـکار عمل می‌کنند. عوامل علّی X_1، X_2، X_3 و X_4 را می‌توان به عنوان مجموعه نخ ست شاخص‌ها ت صور کرد. مجموعه دوم در این جا منح صر به فرد ا ست که تنها یک شاخص دارد و آن متغیر وابسته Y است. متغیر مکنون برای مجموعه منحصر به فرد دوم در حقیقت نادیده گرفته شده ا ست، زیرا با آن شاخص همزمان و حتی همانند ا ست. اما برای مجموعه نخســـت X ها، ما به دنبال یک ترکیب خطی از X_1 تا X_4 هســـتیم که بیشـــترین همبستگی را با Y داشته باشد.به بیان دیگر، ساختار رسمی رگرسیون چندگانه را هم می‌توان همانند شکل ۲-۴ نشان داد.

در شکل۲۴۲ یک پیکان علّی از متغیر مکنونX^* به Y^* ر سم شده ا ست. اما با توجه به شیوه تحلیل همبستگی متعارف که برای آن پیشنهاد شده بود محاسبه به صورت نامتقارن نیست، ما ناچار خواهیم بود/ز پیش این پیکان را حذف کنیم. تنها در دا شتن اطلاعات ا ضافی ا ست که شاخص‌هایی را برای مسأله علّیت به دست می‌آوریم.



شکل ۴-۲ رگرسیون چندگانه با متغیرهای مکنون

در پارگراف‌های قبلی در زمینه تمایز بین متغیرهای آ شکار و مکنون، نکاتی را بیان کردیم: باقی مانده‌ها هم به نظر می‌رســد متغیرهای مکنون باشــند و این که در واقع تحلیل چند متغیری بدون آن‌ها وجود ندارد. بنابراین به نظر غیرممکن می‌نماید که یک طبقه‌بندی از شیوه‌های دارای متغیرهای مکنون و بدون آن‌ها بسازیم. در عین حال به طور سنتی به تحلیل عوامل، تحلیل همبستگی متعارف و مقیاس‌بندی چندبعدی به عنوان نمونه‌های شاخص شیوه‌های دارای متغیر مکنون نگریسته می‌شود. متغیرهای مکنون در آن‌ها به ترتیب، عوامل، متغیرهای تصادفی متعارف و ابعاد نامیده می‌شوند. آن‌ها را می‌توان به عنوان مفاهیم نظری از قبل طرح کرد و یا این که از تحلیل‌ها ا ستنتاج نمود و به سبک موردی استنباط کرد.

این دسته‌بندی (نگاه کنید به منغیرها در بخش ۲-۱-۲) به شرح زیر است:

شیوه‌های بدون و با متغیرهای مکنون

رگرسیون چندگانه	تحلیل عوامل
تحلیل واریانس	تحلیل همبستگی متعارف
تحلیل کوواریانس	مقیاس‌بندی چند بعدی
تحلیل تمایزی	تحلیل همبستگی تفکیکی

۱۰-۲-۲ تعداد متغیرهای مکنون

در تحلیل همبستگی متعارف، بیش از یک متغیر مکنون وجود دارد، بنا به تعریف، به این دلیل که «زوج های» متغیرهای کانونی مورد بررسی قرار می‌گیرند. در مثال بخش ۷-۲-۱ نخستین زوج، نابرابری اقتصادی و عدم ثبات سیاسی بودند. وقتی واریانس تبیین شده (مجذور ضریب همبستگی کانونی) زوج اول چندان زیاد نباشد، سزاوار است که به دنبال زوج دیگری بگردیم. هر زوج دیگری با زوج قبلی ناهمبسته است و یک زوج به گونه‌ای محاسبه می‌شود که میزان همبستگی (متعارف) بیشترین مقدار باشد.

ممکن است نه تنها به بررسی چند زوج متغیر مکنون بپردازیم، بلکه بیش از دو مجموعه از متغیرها را مورد مقایسه قرار دهیم؛ مثلاً یک مجموعه Z را، علاوه بر مجموعه X و مجموعه Y، مقایسه کنیم. در این حالت، چند سه‌تایی از متغیرهای مکنون در یک تحلیل همبستگی متعارف تعمیم یافته توزیع شده‌اند.

زوج‌های متغیر در تحلیل عوامل یا شیوه‌های مقیاس سنجی، وجود ندارند. در اینجا نقطه شروع «یک مجموعه» از متغیرها ست و به جستجوی یک ساختار مکنون می‌پردازیم. برآوردهایی صورت می‌گیرد تا مجموعه متغیرها به تعداد کمتری از متغیرهای مکنون تقلیل یابند. در تحلیل عوامل، آن‌ها را «عامل» و در شیوه‌های مقیاس‌بندی«ابعاد» می‌نامند. تعداد و نام این متغیرهای مکنون را می‌توان «از قبل» تعیین کرد، یا این که به یک سبک اکتشافی- قیاسی آن‌ها را استنباط نمود. از این رو ممکن است تنها یک عامل یا بعد، هدف قرار گیرد. در این موارد ما با یک تحلیل یک عاملی یا مقیاس‌بندی یک بعدی سر وکار داریم. بنابراین در مثال سازگاری زناشویی این امکان وجود دارد که تمام شاخص‌ها روی یک عامل «همراهی»[1] دارای بار زیاد باشند و این عامل بخش زیادی از واریانس متغیرها را تبیین نماید. در این صورت احتمالاً یک تحلیل یک عاملی ترجیح داده می‌شود و به این معنی است که تمام شاخص‌ها تقریباً یک چیز را می سنجند و می‌توان آن‌ها را جایگزین هم کرد. در تحقیق مربوط به سبک‌های تزیین اتاق نشیمن نیز برای بعد «کیفیت» همین موضوع صادق است.

شیوه تحلیل عامل به موارد تک بعدی محدود نمی‌شود. راه حل تک عاملی تنها در مواردی برگزیده می‌شود که *از قبل* یک عامل منفرد فرض شده باشد یا این که بعد از تحلیل، یک عامل

1. Companionship
2. Mokken scaling technique
3. Second-order factor analysis

منفرد استنتاج شود. از سوی دیگر در تحلیل مقیاس‌بندی بعضی شیوه‌ها به طور مشخص برای تک بعدی بودن طرح شده‌اند؛ همچون شیوه مقیاس‌بندی گاتمن یا شکل احتمالاتی آن، یعنی شیوه مقیاس‌بندی «ماکن»[2]. بنابراین صحبت از مقیاس‌بندی «یک بعدی» یا مقیاس‌بندی چند بعدی[3] (MDS) جنبه قراردادی دارد. در شیوه‌های مقیاس‌بندی چند بعدی می‌توان همزمان چندین بعد را از تحلیل استنتاج نمود.

تعداد متنوعی از متغیرهای مکنون نه تنها برای شیوه‌های تحلیل غیروابسته امکان‌پذیر است، بلکه برای شیوه های تحلیل وابستگی در انواع پیشرفته‌تر آن نیز ممکن است. مدل لیزرل «جورسکوگ» چندین متغیر مکنون را شامل می‌شود که هر کدام از آن‌ها توسط شاخص‌های متعددی نشان داده می‌شوند. اگر تنها و تنها یک متغیر مکنون ارائه شود شیوه «لیزرل» با شکل ساده تحلیل عوامل با راه‌حل یک عاملی منطبق است. اگر چند متغیر مکنون ارائه شود، می‌توان آن‌ها را در یک مدل علّی به هم پیوند داد. حال اگر هر یک از این متغیرهای مکنون در یک مدل علّیِ چرخشی با فقط و فقط یک شاخص نشان داده شوند، به گونه‌ای که فقط یک متغیر«آشکار» به بار آید، آنگاه لیزرل با ساده‌ترین شکل تحلیل عوامل منطبق است. بر این اساس می‌توانیم بین شیوه‌های بدون متغیر مکنون، با یک متغیر، یا چند متغیر مکنون تمایز قائل شویم و دسته‌بندی دیگری از شیوه‌های تحلیل را طرح کنیم.

روش دیگری هم برای افزایش تعداد متغیرهای مکنون وجود دارد، مثلاً یک «تحلیل عوامل سطح بالاتر» اجرا شود. در مواردی که تعداد عامل‌ها در یک تحلیل عوامل اولیه نسبتاً زیاد باشد و انتظار داشته باشیم که بخشی از این عامل‌ها چیز مشابهی را اندازه بگیرد، می‌توان روی عامل‌های اولیه، تحلیل عامل دوباره‌ای انجام داد که در آن عامل‌های اولیه به عنوان شاخص‌های تحلیل دوم به کار روند. شیوه‌ای که برای این منظور به کار می‌رود را «تحلیل عوامل مرتبه دوم» می‌نامند.

به طور خلاصه حالات مختلف زیر ممکن است وجود داشته باشد:

بدون متغیر مکنون	**یک متغیر مکنون**
تحلیل رگرسیون چندگانه	مقیاس‌بندی یک بعدی
تحلیل همبستگی تفکیکی	(گاتمن، ماکن و غیره)
تحلیل مسیر	تحلیل عوامل مدل تک عاملی
آنوا و آنکوا	تحلیل تمایزی

چندمتغیر مکنون	**گروه‌هایی از متغیر های مکنون**
تحلیل عوامل	تحلیل همبستگی متعارف (زوجی)
مقیاس‌بندی چند بعدی	تحلیل همبستگی کلی متعارف(سه تایی)

لیزرل   تحلیل عوامل سطح بالاتر

۱۱-۲-۲ متعامد بودن متغیرهای مکنون

ابعادی که از یک تحلیل ساختار مکنون استنتاج می شود لازم نیست حتماً متعامد یا عمودی باشند، بلکه بهتر است چنین باشند. برای مثال در تحلیل عامل مؤلفه‌های اصلی (PCA) بنا به تعریف، متعامد بودن جزء ساختار آن به حساب می‌آید. مثال مربوط به سازگاری زناشویی را از بخش ۱-۲-۶ به خاطر بیاورید و فرض کنید چنین PCA ای را اجرا کنیم، آنگاه عامل‌های «همدم بودن»، «توافق» و « صمیمیت عاطفی» دو به دو ناهمبسته‌اند، به عبارت دیگر متعامدند. این بدین معنا ست که سه عامل، سه بعد 'جداگانه' را نشان می‌دهند، بدون این که همپوشی داشته باشند. عدم همپوشی کمتر اتفاق می‌افتد. ابعادی که از یک شیوه تقلیل بعد، استنتاج می‌شوند معمولاً ناهمبسته نیستند: به لحاظ هندسی این گونه نیست چون عمود نیستند، از لحاظ آماری چنین نیست چون در واریانس اشتراک دارند، و از جنبه محتوایی ناهمبسته نیستند چون بخشی از معنای واژه‌های آن‌ها هم مشترک است (در معنای همدم بودن و توافق تأمل کنید).

در تحلیل عامل تأییدی[1] که مورد خاصی از لیزرل بوده و توسط ژورسکوگ توسعه یافته است، همبستگی بین عامل‌ها یک بخش آشکار از تحلیل است. همبستگی‌های عاملی در ماتریسی گردآوری می شوند. لذا درتحلیل عامل تأییدی، این امکان وجود دارد که از قبل درباره همبسته بودن یا نبودن عامل‌ها تصمیم گیری نمود.

در تحلیل عوامل اکتشافی کلاسیک (PCA، PFA و غیره) سؤال از همبستگی‌های عاملی، در چرخش پیش می‌آید. چرخش یعنی دوران محور عامل‌ها برای این که انطباق بهتری با داده‌ها حاصل شود و زمینه تفسیر بهتری فراهم گردد. این چرخش می‌تواند متعامد باشد به نحوی که عامل‌ها برهم عمود شوند. همچنین می‌توان چرخش را به سبک «مایل» صورت داد که زاویه محور عامل ۹۰ درجه نباشد (مایل= اریب، کج، حیله‌گر و مبهم). این هم درست است که چرخش اریب عامل‌ها، بهتر با داده‌ها انطباق پیدا می‌کند، اما به دلیل همپوشی ناشی از همبستگی عامل‌ها، تفسیرها مبهم‌تر می‌شوند.

توضیح مشابهی هم برای مقیاس‌بندی چند بعدی عوامل وجود دارد. در اینجا هم ابعاد می‌توانند متعامد یا غیر متعامد باشند و شرایط متعامد بودن باعث تفسیری با ابهام کمتر می‌گردد.

تحلیل همبستگی متعارف در مقایسه با تحلیل عوامل و MDS کاملاً متفاوت است. در جستجوی زوج نخست متغیرهای مکنون (متغیرهای تصادفی متعارف) هدف متعامد بودن نیست، بلکه برعکس همبستگی (متعارف) بین این زوج باید حداکثر ممکن باشد. متعامد بودن تا هنگام محاسبه زوج دوم متغیرهای تصادفی کانونی که خودشان بیشترین همبستگی را با یکدیگر دارند، مد

1. Confirmatory factor analysis

نظر نیست. در این هنگام است که لازم است این زوج با زوج اول همبستگی نداشته باشند (متعامد باشند). از این مطالب به دسته‌بندی زیر از شیوه‌های تحلیل متغیرهای مکنون می‌رسیم:

متغیرهای ناهمبسته	**متغیرهای همبسته**
تحلیل مؤلفه‌های اصلی	تحلیل عوامل تأییدی
و سایر شیوه‌های تحلیل عوامل	(لیزرل)
(با چرخش متعامد)	تحلیل عوامل اکتشافی
مقیاس‌بندی چندبعدی	(با چرخش مایل)
(تنها در مرحله اولیه)	تحلیل همبستگی متعارف
تحلیل همبستگی متعارف	(در هر زوج)
(بین زوج‌ها)	

۱۲-۲-۲ سطح سنجش برای شیوه‌های غیر وابسته

در رابطه با شیوه‌های وابسته نشان دادیم که متغیرها ممکن است در سطح پایین‌تر از سطح سنجش فاصله‌ای اندازه‌گیری شده باشند و اغلب می‌توان این متغیرها را به وسیله کدگذاری تصنعی نشان داد. مثلاً زمانی‌که متغیر وابسته دارای سطح سنجش پایینی باشد، تحلیل تمایزی را به کار می‌بریم. وقتی همه متغیرهای مستقل این گونه باشند، تحلیل واریانس را به کار می‌بریم، و هنگامی که بعضی متغیرهای مستقل نه همه آنها، چنین مقیاسی داشته باشند، یعنی اسمی یا ترتیبی باشند، از تحلیل کوواریانس استفاده می‌کنیم.

امکان شامل شدن متغیرهای سطح سنجش پایین‌تر، چه همه متغیرها و چه بعضی از آن‌ها، در شیوه‌های تحلیل غیروابسته همچون شیوه تحلیل عامل و تحلیل همبستگی متعارف نیز وجود دارد. شمار شیوه‌های مربوط به متغیرهای رتبه‌ای و اسمی امروزه چنان گسترش یافته است که اگر بخواهیم همه آن‌ها را شرح دهیم باید یک جلد دیگر به این کتاب اضافه کنیم.

در این زمینه مایلیم از کار پیشتازانه «لئوگودمن[1]»ازیک‌سو و «گروه گیفی[2]» از سوی دیگر تقدیر کنیم.

لئوگودمن از دانشگاه شیکاگو در یک سری مقالات گسترده اقدام به بسط اندازه‌گیری پایین‌تر همسان برای تقریبا تمام تحلیل‌های چند متغیری کلاسیک اعم از وابسته و غیر وابسته نمود. این تشابهات به عنوان مدل خطی لگاریتمی[3] شناخته می‌شوند. این مدل بسیار با ظرافت است، زیرا قید شرایط سختگیرانه شیوه‌های سنتی مثل بهنجار بودن[4]، همسانی واریانس‌ها[5] و غیره، دیگر وجود ندارد و همزمان یک بنیان آماری ژرف، حتی از جنبه استنتاجی بنا نهاده شده است. فرایند عملکرد تحلیل

1. Leo Goodman 2 .Gifi Group 3. loglinear
4. normalit 5. homo-scedasticity 6. Principals, Canals, Morals, Criminals

خطی لگاریتمی‌شامل آزمون متوالی مدل های مختلف و برآورد پارامترهای مدل انتخاب شده، می‌باشد. این پارامترها اثرات مراتب صفر، اول، دوم و nام هستند وقتی‌که n متغیر وجود دارد. بنابراین تعاملات سطح بالاتر را از طریق این شیوه می‌توان دنبال کرد.

گروه گیفی از بخش نظریه داده‌های دانشگاه لیدین تحت سرپر ستی جان دی لیو، روی کارهای بن ذکری، گاتمن،کروسکال و بسیاری دیگر شکل گرفت. تلاش پیشگامانه آن‌ها بر تحلیل چندمتغیره غیرمتریک و غیرخطی متمرکز بود. با به کارگیری عناوین هومالز (=آناکور/تحلیل همبستگی) پرینکالز [تحلیل مولفه‌های ا صلی]، کانالز [تحلیل همب ستگی متعارف]، مورالز [همب ستگی چندگانه و تحلیل رگر سیون]، کریمینالز [تحلیل تمایزی]، پاتالز [تحلیل م سیر] و غیره، این گروه از تحلیل‌گران تقریباً برای تمام شیوه‌های سنتی، روش تحلیل مشابهی همراه با نرم‌افزار کاربری ساده آن طرح کردند. اسامی این شیوه‌ها هم با اسامی کلاسیک آن‌ها[۶] انطباق دارد.

روش کار گروه گیفی با روش کار گودمن متفاوت است. آن‌ها تأکید کمتری بر بازنمایی ساختاری دارند و بیشتر بر سادگی و اختصار تأکید می‌ورزند. کمتر بر آمار استنباطی و بیشتر بر آمار توصیفی تأکید می‌کنند کمتر بر شیوه ا ستقرائی و بی شتر بر رویکرد قیا سی متکی ه ستند؛ کمتر بر آزمایش دقیق و بی شتر بر شیوه بدون فر ضیه تأکید دارند و کمتر بر ا ساس فل سفه علم و بی شتر بر بازنمایی هند سی متکی ه ستند. نظریه به نظریه‌پردازان و محققان واگذار می شود. اع ضای گروه گیفی خود را تحلیل‌گر اطلاعات می‌دانند. آن‌ها داده‌هایی را که از سوی محققان به آن‌ها ارائه می‌شود تحلیل می‌کنند. از نظر آنان ساختار این داده‌ها لازم نیست حتماً خطی، نرمال، یا متعامد باشد. این گروه، داده ها را به شکل دایره‌ای، نعل اسبی و هر شکل ممکن دیگری تجسم می‌کنند. کارها همواره با رایانه انجام می‌گیرد و اغلب بعد از تحلیل در یک فضای دو بعدی نمایش داده می‌شود. این نمودار هند سی تعیین می‌کند که آیا می‌توان ساختار م شخصی را برای داده‌ها به د ست آورد و این ساختار چگونه تفسیر خواهد شد.

علاوه بر کارهای اخیر لئوگودمن و گروه گیفی، تحلیل خوشه‌ای را نیز باید به عنوان نمونه‌ای از شیوه‌های غیر وابسته برای متغیرهای سطح سنجش پایین نام برد. همچون تحلیل عوامل برای تحلیل خوشه‌ای نیز دنیای گسترده‌ای از شیوه‌های تحلیل وجود دارد. اما لازم به ذکر است که اغلب این شیوه‌ها بر روی واحدهای ماتریس داده‌ها، تحلیلی را اجرا می‌کنند، به گونه‌ای که خوشه‌ای از افراد حا صل می‌گردد. البته تحلیل خو شه‌ای متغیرها هم ه ست که ماتریس همب ستگی را به عنوان نقطه شروع گرفته، به طوری که خوشه‌هایی از متغیرها بدست می‌آید. در این بخش توجه ما معطوف به این تحلیل خوشه‌ای است.

بدون تلاش برای تمام کردن، به دسته‌بندی زیر از شیوه‌های تحلیلی غیروابسته با متغیرهای سطح سنجش متریک و غیرمتریک (رتبه‌ای یا اسمی) می‌رسیم:

شیوه‌های غیر وابسته تحلیل:

متریک	**غیر متریک**
تحلیل عوامل	تحلیل خوشه‌ای
همبستگی متعارف	هومالز،پریکالز،کانالز
مقیاس‌بندی چند بعدی	تحلیل لوگاریتم خطی (اولیه)

۱۳-۲-۲ آزمون و اندازه‌گیری

در بخش‌های قبلی به تمایز میان *از قبل فرض کردن* و *بعداً ا ستنتاج کردن*، میان رویکرد ا ستقرائی و قیا سی، و میان تأییدی و اکت شافی بودن ا شاره‌هایی کردیم. به عنوان نمونه در مثال سازگاری بخش ۱-۲-۶ گفته شد که ساختار مکنون با روش تحلیل عوامل *به طور موردی* از ۲۰ متغیر استنباط شده است، بدون این که محققان نظر خاصی [از قبل] داشته باشند. ما این وضعیت را مورد انتقاد قرار می‌دهیم، چون از نظر ما علمی‌تر آن ا ست که کار را با تئوری شروع کنیم و آن را به معرض آزمایش بگذاریم. در این باره شوخی خاصی وجود دارد، که وقتی محققان زیادی در انجام یک تحلیل قادر به توافق روی نامی مثل «م شارکت» برای یک عامل خاص نبا شند، بطور ساده ت صمیم می گیرند متغیرهای زیادی را که بار عاملی بالایی دارند بر هم اضافه کنند که به عامل‌های «یکدیگر را بو سیدن»، «با هم بیرون رفتن»، «با هم در خانه ماندن»، «رفتار ت صدیق کننده دا شتن»، «تعامل داشتن هر روز»، «همتابودن» منجر می‌شود. طی یک مرحله بعدی این ضعف تحلیل عامل تقلیل می‌یابد، زیرا در تحلیل عامل تأییدیِ جورسکوک آشکارا به یک تئوری قبلی نیاز است.

مثال دیگر پیرامون آزمون و اندازه‌گیری، تزیین اتاق نشیمن در بخش ۸-۲-۱ است. ما از محققان تقدیر نمودیم، زیرا علاوه بر این که ابعاد را از داده‌ها به طریقه استقرایی استنتاج کرده بودند، این ابعاد را از قبل طرح کرده بودند تا به روش قیا سی مورد تحقیق و آزمون قرار دهند و ببینند که آیا به لحاظ تجربه تأیید می‌شوند یا نه.

و باز مثال دیگر برر سی همب ستگی متعارف بین نابرابری اقت صادی و عدم ثبات سیا سی ک شورها بود. آنجا هم گفتیم که نام متغیرهای کانونی از قبل تعیین شده بود، اما برای احتیاط اضافه کردیم که یافتن نام برای زوج‌های بعدی متغیرهای کانونی، مشکل خواهد بود.

همچنین موضوع آزمون و اندازه‌گیری را وقتی که درباره شیوه‌های تحلیل غیر وابسته با متغیرهای غیرمتریک صحبت کردیم، مورد بحث قرار دادیم (بخش۱۲-۲-۲). مدل خطی لگاریتمی لئوگودمن را به خاطر ارزش آزمون آماری آن ستودیم و به رویکرد منحصربه فرد گروه گیفی اشاره کردیم که تأکید آن کمتر بر جنبه استنتاجی و بیشتر بر جنبه آمار توصیفی است. متأسفانه این موضوع نقطه ضعف شیوه‌های هومانز، پرینکالز و شیوه‌های تحلیلی دیگر است.

نکاتی که در این بخش اشاره کردیم به دسته‌بندی جدیدی از شیوه‌های تحلیل منتهی نمی‌شود، زیرا اصولاً هر شیوه‌ای را می‌توان به سبک اکتشافی یا قیاسی به کار برد. در نتیجه روشن خواهد شد که سبک دوم (قیاسی)، اگر امکان آن باشد ترجیح داده می‌شود.

۲-۲-۱۴ تحلیل متغیرها و واحدها

تا اینجا پذیرفتیم که تحلیل چند متغیره، یک تحلیل بر روی چندین متغیر اســـت. برای مثال در تحقیق سازگاری زناشویی ۲۰ سؤال به نمونه ۳۴۹ نفری داده شد. هریک از این ۲۰ سوال یک متغیر بود. برای هر متغیر یک توزیع با یک میانگین و یک واریانس محاســبه شـد و همبســتگی دو به دوی متغیرها محاســـبه گردید. این ضــرایب همبســـتگی در یک ماتریس گردآوری شـــد و از آن ماتریس همبســـتگی یک تحلیل عامل به عمل آمد. هر زیر گروه از متغیرهای بســـیار همبســـته، یک عامل را نشان می‌دهند. این نوع شیوه کار را تحلیل عامل R گویند.

اکنون به جای متغیرها همچنین می‌توانیم واحدها را هم تحلیل کنیم. در واقع می‌توانیم برای هر دو نفر آزمودنی، با ا ستفاده از نمرات آن‌ها روی ۲۰ سؤال طرح شده، برر سی کنیم که تا چه حد به یکدیگر شبیه هستند. افرادی‌که نمرات تقریباً مشابهی در متغیرهای مختلف دا شته با شند، می‌توانند در یک گروه جای بگیرند. آنگاه گروه‌های افراد به جای گروه‌های متغیرها شـکل می‌گیرند. این شـیوه عمل، تحلیل عامل نوع Q نامیده می‌شود.

اغلب شـــیوه‌های تحلیل خوشـــه‌ای از نوع Q هســـتند. چون که «خوشـــه‌ها» معمولاً گروه‌هایی از واحدها را نشان می‌دهند. خو شه‌ها از درون متجانس هستند، زیرا هبستگی های بین فردی[1] در یک خو شه زیاد ا ست؛ و از بیرون نامتجانس هستند، زیرا همبستگی‌های بین‌فردی از خو شه‌ای به خو شه دیگر ضعیف است.

شیوه‌هایی که اخیراً به وسیله گروه گیفی ترویج یافته، از جمله هومالز، تحلیل واحدها و همچنین متغیرها و مقوله‌های آن‌ها را ممکن ساخته است. بنابراین از نوع R و همچنین نوع Q می‌باشند.

یک دسته‌بندی شیوه‌ها بر اساس تحلیل متغیرها و واحدها به این شرح است:

تحلیل متغیرها	تحلیل واحدها	هر دو
تمام روش‌های قبلی	تحلیل عوامل Q	هومالز و غیره
تحلیل عوامل R	اغلب تحلیل‌های خوشه‌ای	

۲-۲-۱۵ شیوه‌های تحلیل خطی و غیرخطی

1. inter-person-correlation

رگرسیون، تحلیل عوامل، تحلیل همبستگی متعارف (کانونی) و شیوه‌های کلاسیک، از دیگر شیوه‌های متریک (درجه‌ای) و خطی هستند. از بخش۱۲-۲-۲ دریافتیم که برای هر روش متریک یک گونه‌ی غیرمتریک طرح شده است. زحمات لئوگودمن و گروه گیفی در این زمینه مورد تقدیر قرار گرفت. در واقع نیازی به تمایز گذاشتن بین صفات «غیرمتریک» و «غیرخطی» نیست، چون این شیوه‌های غیرمتریک غیرخطی هم هستند. این مطلب درتعبیر«مدل خطی لگاریتمی» لحاظ شده، زیرا این مدل تنها بعد از گرفتن لگاریتم، خطی می‌شود. عنوان کتاب گیفی«تحلیل غیرخطی چندمتغیره» نیز خود گویاست.

خطی بودن یک مشکل قدیمی آمار است. در کاربردهای تحلیل رگرسیون کلاسیک، در بسیاری مواقع مشخص می شد که نمودار داده‌ها به ندرت از یک الگوی خط مستقیم یا سطح صاف تبعیت می‌کند. برای تفهیم این موضوع، ناگزیر از تامل در توابع نمایی هستیم که توسط *انجمن روم* در تحلیل افزایش آلودگی محیطی به کار رفته است. و علاوه بر رگرسیون، این مطلب در مورد تحلیل تمایزی، تحلیل عامل و سایر شیوه‌های کلاسیک نیز مصداق دارد. از این رو یک آزمون خطی بودن همواره ضرورت دارد.

یک تابع خطی طبیعتاً به سادگی قابل استفاده است، چنان که محاسبه و تغییر آن ساده است. از این رو در مواردی که داده‌ها غیرخطی هستند، می‌توان تبدیل‌های معینی از داده‌ها را به شیوه‌ای همچون خطی کردن مورد توجه قرار داد. گرفتن لگاریتم، یکی از این شیوه‌های تبدیل داده‌هاست. همچنین می‌توان از انطباق تابع غیرخطی استفاده کرد که ممکن است یک تابع درجه دوم، سوم، یا به طور کلی یک چند جمله‌ای درجه nام باشد، بسته به تعداد منحنی‌هایی که در نمودار پراکنش نمایان می‌شود: به ترتیب یک، دو یا n-1 منحنی. تقریباً در تمام شیوه‌های موجود، انطباق چنین تابع غیرخطی امکان‌پذیر است.

نتیجه می‌گیریم که تقریباً برای تمام تحلیل‌های چندمتغیری، بویژه در دهه‌های اخیر، یک چیز مشابه غیرخطی ارائه شده است، طوری که می‌توان برای هر شیوه، دسته‌بندی‌های فرعی ای به شکل خطی و غیرخطی طرح کرد.

۱۶-۲-۲ تحلیل داده‌ها و همسانی‌ها

نقطه شروع اغلب شیوه‌های تحلیل، ماتریس[1] داده‌هاست. این ماتریس شامل ویژگی‌ها در سرستون، واحدها در ستون پیشین و نمرات در بدنه‌ی جدول است. شیوه‌های مقیاس‌بندی چندبعدی (MDS) در این جا استثناء هستند، زیرا به جای ویژگی‌ها، همسانی‌های بین ویژگی‌ها، داده‌های تحلیل هستند. به این خاطر برنامه کامپیوتری «ALSCAL» که بخشی از «SPSS» است، در برنامه «PROXIMITIES» مقدم شمرده می‌شود. این برنامه همسانی‌ها، ناهمسانی‌ها و اختلاف‌ها را محاسبه می‌کند و این نتایج به شکل ماتریس داده‌ها در برنامه ALSCAL قابل استفاده هستند.

1. matrix

مادامی‌که محتوا مد نظر با شد، به ویژه مقیاس‌بندی چندبعدی برای ترجیح داده‌ها به کار می‌رود. برای مثال در تحقیق بازاریابی، تعدادی از محصـــولات به گروهی از افراد ارائه می‌شـــود و آنان باید ترجیحات خود را برای هر ترکیب دوتایی از محصولات بیان کنند. آنگاه داده‌های این تحلیل، ماتریس دو در دوی شباهت بین محصولات می‌باشد.

چنین شباهت‌هایی در تحقیق مربوط به تزیین اتاق نشیمن نیز نقطه شروع قرار گرفت. لذا روش تحلیل انتخاب شـده برای این تحقیق، مقیاس‌بندی چند بعدی (MDS) بود. تمام همبســتگی‌های دو به دوی ۴۹ ویژگی اتاق نشـیمن محاسـبه شـد. مثل همبســتگی بین داشــتن فرش ایرانی و کفپوش پارکت. این همبستگی‌ها داده‌های تحلیل را تشکیل می‌دادند.

در هر حال ما بایســتی مشــاهدات خود را بهبود ببخشــیم. زیرا تمایز بین داده‌های مقیاس‌بندی چند بعدی و سایر تحلیل‌های ساختار مکنون یک امر نسبی است. ماتریس همبستگی‌های دومتغیری در تحلیل عامل و همچنین تحلیل خوشــه می‌تواند به عنوان نقطه شــروع مورد اســتفاده قرار گیرد. همبســتگی‌های بین شـاخص‌های سـازگاری در زناشـویی را در نظر بگیرید، مثلاً بین با هم ماندن در خانه و با هم کار کردن در خارج از خانه، یا بین خوشبختی ازدواج و یکدیگر را عصبانی کردن.

در استراتژی تحقیق هم ممکن است تفاوتی وجود داشته باشد. وقتی خصیصه‌ها به صورت دوتایی به پا سخ گویان عر ضه می شوند وخوا سته می شود تا آن‌ها ترجیحات خود را م شخص کنند، در این حالت داده‌ها در مرحله م شاهده شکل هم سانی دارند. در این حالت عموماً شیوه MDS برای تحلیل انتخاب می‌شود. از سوی دیگر هنگامی که نمرات خصیصه‌های جداگانه، مورد مشاهده قرار می‌گیرند، در حقیقت ما دو تحلیل را انجام می‌دهیم. تحلیل نخست، ماتریس همسانی‌ها را نتیجه می‌دهد و این ماتریس به عنوان اطلاعات اولیه در یک تحلیل ســاختار مکنون دیگر به کار گرفته می‌شــود. در این حالت معمولاً تحلیل عامل یا تحلیل خوشه‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد.
این انتخاب‌ها اساساً وابسته به شیوه تحقیق است.

از توضــیحات فوق به یک دســته‌بندی فرعی شــامل شــیوه‌های تحلیل داده‌ها (همه شــیوه‌ها به استثنای MDS) و تحلیل همسانی‌های داده‌ها (MDS) می‌رسیم.

۱۷-۲-۲ دسته‌بندی‌های دیگر

د سته‌بندی‌های بسیار دیگری را نیز می‌توان طرح کرد. ما بحث را به فهر ست کوتاهی از آن‌ها محدود می‌کنیم.

شیوه‌های تحلیل ممکن ا ست ای ستا (ا ستاتیک) با شند و آن وقتی ا ست که تمام داده‌ها در یک برهه زمانی مورد مشاهده قرار گرفته باشند، و یا پویا (دینامیک) باشند، زمانی که متغیر زمان آ شکارا

وارد تحلیل شود. نمونه‌هایی از مورد دوم، تحلیل سری‌های زمانی، مطالعات پنل[1]، رویکردهای طولی و مدل‌های علّی دینامیکی هستند.

شیوه‌های تحلیل وابستگی را همچنین می‌توان به دسته‌های فرعی‌تر مدل‌های بازگشتی[2] تقسیم کرد، هنگامی که تمام پیکان‌های علّی به یک ســـو می‌روند، و مدل‌های غیر بازگشـــتی که درآن بازخوردهای مســـتقیم و یا غیرمســـتقیم رخ می‌دهد. شـــیوه لیزرل از جمله شـــیوه‌های تحقیق برای مدل‌های بازگشـــتی اســـت. در این کتاب ما بحث خود را به تحلیل متعارف و تحلیل مســـیر محدود می‌کنیم که تنها در مدل‌های بازگشتی کاربرد دارند.

تمایزات دیگر شـــامل اســـتفاده از آماره‌های پارامتریک در مقابل غیر پارامتریک، تحقیق پیرامون یک نمونه یا جمعیت، وجود دا شتن یا ندا شتن تغییر شکل داده‌ها [از غیرخطی به خطی] و بودن یا نبودن فرض‌های مقدماتی است.

فصل ۳

1. panel studies
2. recursive models

شیوه تحلیل به عنوان بازتابی از مسأله تحقیق

در این فصل، بین مسائل تحقیقاتی و شیوه‌های تحلیل پیوندی برقرار می‌شود. ما انتخاب مناسب یک شیوه تحلیل چندمتغیری برای تعدادی از مسائل تحقیقات علوم اجتماعی را مورد بحث قرار خواهیم داد. تقریباً تمام مثال‌ها از تحقیقات تجربیای گرفته شده‌اند که به طور واقعی به اجرا درآمده‌اند. برای هر تحقیق، ابتدا نکات عمده‌ای که از انتخاب آن موضوع خاص مد نظر محقق بوده است ارائه می‌شود و نشان می‌دهیم که مسأله تحقیق چگونه طرح‌ریزی شده است. سپس دسته‌بندی‌های فصل دوم و نمودار علّی یک مسأله تحقیق را به کار می‌گیریم تا در باره شیوه تحلیل مناسب بحث کنیم. با این کار خواننده تشخیص ساختار یک مسأله تحقیق(فرمت اساسی)، ایجاد طرح مناسب تحقیق و پیش‌بینی شیوه مناسب تحلیل را تمرین می‌کند.

در بخش دوم این فصل، ایده بیشتر آموزشگاهی، مبنی بر این که تنها یک شیوه مناسب تحلیل چند متغیره برای هر مسأله تحقیق وجود دارد را کنار خواهیم گذاشت. کار خود را از نظریه وابستگی شروع می‌کنیم که یک نظریه علّی در علم سیاست بین‌الملل است و نشان خواهیم داد که چگونه محقق چندین دستکاری آزمایشی را در عمل صورت می‌دهد، طوری‌که انتخاب یک شیوه تحلیل مناسب، امری نسبی جلوه می‌کند. در شکل ناب آن، تئوری وابستگی به بکارگیری یک تحلیل مسیر (یا لیزرل) منتهی می‌شود. ما بدون اعتنا به مکانیزم‌های علّی بین متغیرهای مستقل، تحلیل رگرسیون چندگانه را فراهم می‌کنیم. با جمع‌بندی متغیر وابسته به حالت دو یا چند بخشی، به تحلیل افتراقی دو یا چند گروهی می‌رسیم. از سوی دیگر با انجام همه انواع جمع‌بندی در بخش متغیرهای مستقل، طرح آنوا (تحلیل واریانس) یا آنکوا (تحلیل کوواریانس) با اثرات تعاملی یا بدون آن را فراهم می‌کنیم. وقتی‌که همزمان چند متغیر وابسته را وارد معادله کنیم، طرح مذکور به مدل MANOVA یا MANCOVA تبدیل می‌شود. این متغیرهای وابسته را می‌توان به عنوان یک مجموعه نیز در نظر گرفت، طوری که بتوان یک تحلیل همبستگی بین آن مجموعه متغیرهای وابسته و مجموعه متغیرهای مستقل انجام داد. این کار یک تحلیل همبستگی متعارف (کانونی) است که برای سطوح سنجش پایین‌تر به عنوان تحلیل مجراها[1] به حساب می‌آید.

بدین ترتیب عنوان فصل یعنی« شیوه تحلیل به عنوان بازتابی از مسأله تحقیق» حالت نسبی دارد. در کار تحقیق هرگز تناظر یک به یک بین ایده‌های نظری و انتخاب شیوه‌ها وجود ندارد که یک

1. canals analysis
2. Erving Goffman
3. Asylums
4. Ego-identity
5. Myles

ایده نظری خاص به یک شیوه تحلیلی معین منجر شود. محقق ممکن است یک شیوه را رها کند و شیوه‌ای دیگر را برگزیند. باید ایده‌های اصلی مسأله تحقیق حفظ شوند.

۱-۳ مثال‌های تحقیقاتی

۱-۱-۳ تأثیر مؤسسات جمعی بر خودانگاره

اروینگ گوفمن[۲] در کتاب خود تحت عنوان *پناهگاه‌ها*[۳]، مفهوم «مؤسسه جمعی» را طرح کرد. صومعه‌ها، زندان‌ها، سربازخانه‌ها و بیمارستان‌های روانی نمونه‌هایی از مؤسسات جمعی هستند. این مؤسسات به عنوان مکان‌های اقامت و کار مجزا از بقیه جامعه تعریف می‌شوند که به طور رسمی اداره می‌شود و شمار زیادی افراد متحدالشکل، برای مدت زمان قابل ملاحظه‌ای، زندگی بسته‌ای را در آن سپری می‌کنند. از نظر گافمن پیامد زندگی مؤسسه‌ای، ویرانگر است. این گرفتاری با فرایند اجتناب‌ناپذیر جامعه‌پذیری مجدد مشخص می‌شود. افراد یک سری تشریفات تحقیر کننده، شیوه‌های انزوا سازی و شرایط هم شکل شدن را پشت سر می‌گذارند که هدف آن برگرفتن وضع و نقش‌های گذشته فرد از او، و دادن یک هویت جدید به اوست که متناسب با وضع مؤسسه‌ای می باشد، و میزان اطاعت و فرمانبرداری در آن با پاداش‌ها و تنبیهاتی پیوند خورده است. لازم به ذکر است که دیدگاه گافمن درباره مؤسسات کل،گسترشی از نظریه برچسب‌زدن است که در آن بازسازی اجتماعی هویت فرد (توسط دیگران مهم) نشان دهنده تغییر هویت خود[۴] (توسط خود فرد) است.

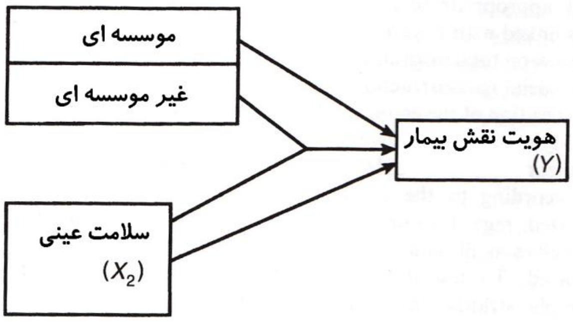
جان اف میلز[۵] (۱۹۷۸) از محققان دانشگاه کارلتون درصدد برآمد به بررسی تجربی نظریه گافمن بپردازد. او به مؤسسه‌های سالمندی که به عنوان مؤسسه‌هایی که براساس مدل پزشکی سازمان یافته بودند توجه کرد. او این فرضیه را مطرح کرد که مؤسسه‌ای شدن بدون توجه به وضع سلامت عینی تدریجاً به سمت خود بیمارانگاری پیش می‌رود و این که برای غیرمؤسسه‌ای بودن یک تصویر کاملاً متفاوتی شکل می‌گیرد. برای آزمون تجربی فرض مؤسسه‌ای کردن، او یک نمونه تصادفی طبقه‌بندی شده بر اساس وضعیت اقامت (مؤسسه‌ای، غیر مؤسسه‌ای) را طرح کرد که از ۳۸۵۱ نفر افراد ۶۵ سال به بالای ایالت مانیتابا تشکیل شده بود. از تمام آزمودنی‌ها براساس یک مقیاس ۱ تا ۱۰ درجه‌ای در مورد وضعیت سلامتی آن‌ها سوال کرد (سلامتی ذهنی). سلامت عینی به وسیله یک مجموعه آزمایش‌ها اندازه‌گیری شد که همراه با مشاهدات دیگر در مجموعه‌ای از شاخص‌های سلامت جمع‌بندی می شد. این شاخص‌ها بوسیله یک تحلیل عامل نوع R مورد تحلیل قرار گرفت و برای به دست آوردن یک راه‌حل تک‌عاملی، نمرات عامل‌ها محاسبه گردید. کنترل جنسیت، و ضعیت تأهل، درآمد و تحصیلات، غیرضروری به نظر می رسید، طوری که این ویژگی‌های زمینه‌ای را می‌شد از تحلیل کنار گذاشت.

طرح ۱-۱-۳

در کنترل وضعیت سلامت عینی، مسأله تحقیق این است که بین ادراک‌های ذهنی افراد سالمند مؤسسه‌ای و غیرمؤسسه‌ای از سلامتی خود، تفاوت معناداری وجود خواهد داشت (سطح بالاتر هویت نقش بیمار برای افراد مؤسسه‌ای):

- مسأله تحقیق یک مسأله وابسته است. متغیر وابسته (Y) عبارت است از سلامت ذهنی. متغیرهای مستقل عبارتند از وضعیت اقامت (X۱: مؤسسه‌ای بودن یا نبودن) و سلامتی عینی (X۲). بنابراین این طرح‌های غیروابسته را می‌توان حذف کرد.
- تعداد متغیرهای وابسته به یک مورد محدود شده است. لذا طرح‌هایی با چندین متغیر وابسته، دیگر مد نظر نیستند.
- متغیر وابسته در سطح سنجش فاصله‌ای اندازه‌گیری شده است. از این رو تحلیل افتراقی را می‌توان کنار گذاشت.
- دو گروه شکل گرفت؛ یکی از سالمندان یک مؤسسه جمعی گافمن و یکی از افراد غیرمؤسسه‌ای. تأثیر مؤسسه‌ای بودن بر الگوهای نقش بیمار با کنترل متغیرهای دیگر مورد مطالعه قرار گرفت. پس ما با یک طرح شبه آزمایشی سر و کار داریم.
- در میان متغیرهای مستقل، ترکیبی از سطوح اندازه‌گیری وجود دارد: X_1 دو بخشی است و X_2 در سطح سنجش فاصله‌ای است. در این طرح شبه‌آزمایشی متغیر X_2 نقش یک متغیر کنترلی مهم را به شکل کواریه بازی می‌کند. ساختار مسأله تحقیق می‌تواند تعاملی باشد، مثلاً آیا تأثیر مؤسسه جمعی بر هویت-خود در سطوح مختلف سلامت عینی فرق دارد.

نتیجه‌گیری: یک طرح شبه‌آزمایشی آنکوا (تحلیل کوواریانس)



۲-۱-۳ اتحادیه صنفی مبارز

کارگران شـــرکت CPC در پرو همراه با کارگران معدن بلیوی به عنوان مبارزترین افراد در آمریکای لاتین مـ شهورند. دی. کرویت و ام. ولینگا[1] سعی کردند این حالت مبارزه‌طلبی را به طور تجربی مورد تحقیق قرار دهند. آن‌ها به دنبال راهی برای ســـنجش بســـنده ی این اتحاد مبارز بودند. تشـــخیص عضـــوی از اتحادیه که ســـهم خود را می‌پردازد و فرد غیر عضـــوی که مشـــارکت ندارد، الزاماً همانند تـ شخیص کارگر مبارز از کارگر سربه راه نیـ ست. در واقع مقوله اعـ ضاء سهیم اتحادیه می‌تواند شامل کارگر فعال و نیز کارگران کمتر فعال باشـــد و گروه غیرعضـــو هم می‌تواند شـــامل افراد غیرفعال و همچنین کارگران مبارز باشد.

برای برر سی این که آیا پرداخت حق عـ ضویت، شاخص معتبری برای مبارز بودن هـ ست یا نه، محققان درباره ۱۳۰۰۰ کارگر شـــرکت CPC اطلاعات تکمیلی لازم را جمع‌آوری کردند. این اطلاعات اضافی از پرونده‌های استخدامی افراد بدست آمد و شامل ارشدیت، مرتبه شغلی، تحصیلات، بدهکاری به شـــرکت، و میزان تخلفات بی‌نظمی بود. فرض بر این بود که کارگران مرتبه بالاتر کمتر مبارز هســـتند، اولاً به دلیل این که ویژگی بازدارندگی و ضـــد اتحادیه‌ای شـــرکت CPC تدریجاً باعث رانده شدن کارگران افراطی شده است که ناشی از مقررات جلوگیری از ترفیع و بی‌توجهی به این‌گونه افراد است، وثانیاً به دلیل این که کارگران با سابقه خدمت طولانی شانس بیشتری برای جذب در سیستم پیچیده و منســـجم خانواده CPC داشـــتند. همچنین فرض بر این بود که کارگران مبارز از افراد باسوادتر، دارای سطوح شغلی پایین‌تر، با بدهی کمتر و تخلفات بیشتر هستند.

طرح ۲-۱-۳

ما تنها یک سرفـصل از بخـشی از یک تحقیق گسترده را عنوان کردیم. مـسأله تحقیق در این جا این ا ست که آیا دـ سته‌بندی قبلی عـضویت یا عدم عـضویت در اتحادیه با تـشخیص بین کارگر مبارز و وام انطباق دارد، در حالی‌که مبارز بودن با شاخص‌های ارشدیت، سلسله مراتب شغلی، سطح تحصیلات، بدهی به شرکت و تخلفات انضباطی سنجیده می‌شود:

●مـسأله تحقیق یک مـسأله وابـستگی ا ست. متغیر وابـسته (Y) وضعیت عـضویت در اتحادیه (عـضو یا غیرعضو) است. متغیرهای مستقل شاخص‌های مبارز بودن را شامل میشوند.

●تعداد متغیرهای وابسته، به یک مورد محدود می‌باشد.

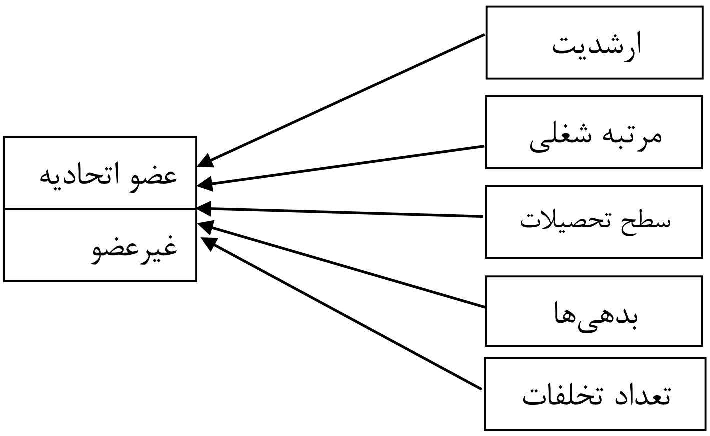
●متغیر وابسته در سطح سنجش اسمی اندازه‌گیری شده است. این متغیر دو بخشی بوده که دو گروه اعضا و غیر اعضای اتحادیه را نشان می‌دهد.

●متغیرهای مستقل ارشدیت، سلسله مراتب شغلی، سطح تحصیلات، بدهی‌ها و میزان تخلفات ($X1$تا $X5$) همگی در سطح سنجش فاصله‌ای اندازه‌گیری شده‌اند.

1. Kruit & Vellinga

●در مسأله تحقیق اثرات تعاملی مد نظر نبوده‌اند. محققان تنها در صدد بررسی این مسأله بوده‌اند که آیا شاخص‌های مبارز بودن به طور کلی(جمع وزن داده شده X متغیر) به دسته‌بندی کارگران به دو گروه منجر خواهد شد که تقریباً با گروه‌های از قبل طرح شده اعضاء اتحادیه و غیر اعضاء منطبق باشد.

نتیجه گیری: یک تحلیل افتراقی دو گروهی



۳-۱-۳ هویت شغلی جنسیتی و ارزیابی نابرابری درآمدهای مردان و زنان

استیون مک‌لاقلین[1] (۱۹۷۸) تحقیقات اخیر پیرامون تفاوت جنسیت در فرایند کسب درآمد را مورد انتقاد قرار داد، زیرا فرد به عنوان واحد تحلیل در نظر گرفته می‌شود و دو تحلیل رگرسیون جداگانه از درآمد، یکی برای مردان و دیگری برای زنان به عمل می‌آید که به وسیله تحصیلات، منزلت شغلی و متغیرهای دیگر تعیین می‌شود. طبق نظر وی این رویکرد منجر به تشخیص اشتباه و «خطای بوم شناسی» می‌گردد. تهدید بالقوه‌ای که متوجه تفسیر افتراقی این یافته‌های سطح فردی است را می‌توان در تفاوت‌های نهفته در مشاغل مختلفی یافت که زنان و مردان اختیار می‌کنند. احتمال دارد میزان متفاوتی از پرداخت‌ها برای مردان و زنان وجود داشته باشد، ولی بخشی از این اختلاف ممکن است ناشی از ویژگی‌های شغلی باشد. بنابراین اگر تفاوت درآمد در وظایف شغلی وجود داشته باشد، درآمد پایین مشاغل اختیار شده به وسیله زنان ممکن است ناشی از این ویژگی‌های شغلی بدون توجه به جنسیت باشد. تحقیقات، شواهدی را بدست داده‌اند مبنی بر اینکه مشاغلی که توسط زنان اشغال شده اند، بیشتر آن‌هایی هستند که به میانگین تحصیلات بالاتری نیاز دارند، اما درعین حال درآمد آن‌ها هم برای زنان و هم مردانی که در این مشاغل کار می‌کنند پایین‌تر از سایر نیروهای کار

1. S. McLaughlin

ا ست. اگر این اختلاف برابر درآمد برای زنان و مردان در م شاغلی که منزلت اجتماعی یک سانی دارند وجود داشته باشد، آنگاه باید سطح پایین دریافت‌ها را به ویژگی‌ها ی دیگر شغلی نسبت داد.

به دلایلی از این قبیل، مک لاقلین نتیجه می‌گیرد که باید شغل و نه فرد را مورد تحلیل قرار داد. او اطلاعات مربوط به میانگین درآمد ۴۰۰۰ شغل(Y)، هویت جنسیتی شغل(مردانه، زنانه، هر دو)، منزلت شغل و تعداد زیادی از ویژگی های شغلی را از فرهنگ مشاغل آمریکا (دایره المعارف فهرست‌های شغلی آمریکا) و دایره سرشماری آمریکا تهیه کرد. قابلیت‌های ثبت شده برای هر شغل بدین شرح بود: پیچیدگی، آموزش‌های لازم، نیازهای هوشی، مهارت‌های اجتماعی، مهارت‌های کلامی و ریاضی، توانایی درک فضایی، درک اشکال، هماهنگی حرکتی، مهارت انگشتان، مهارت دستی، هماهنگی چشم، دست و پا، تشخیص رنگ و همچنین شماری از شرایط کار، مثل نیاز به سر پا ایستادن، مواجهه با سرما و گرما، صداهای گوش خراش و دود و نیاز به کار کردن در داخل خارج یا هر دو.

هدف اصلی تحقیق، انجام تحلیلی روشن بود که در آن تفاوت درآمدهای سه گروه جنسیتی (مرد، زن، ترکیب شده) کنترل و به وسیله منزلت و دیگر ویژگی‌های شغلی اصلاح شود.

طرح ۳-۱-۳

مسأله تحقیق: آیا وقتی‌که منزلت و دیگر ویژگی‌های شغلی کنترل شوند، تفاوت معناداری بین میزان دریافتی سه گروه جنسی (مرد، زن و ترکیبی) وجود خواهد داشت؟

تهیه مقدمات کار:

در مرحله نخست، باید ویژگی‌های متعدد شغلی را به شمار محدودی از ابعاد کاهش دهیم. یک تحلیل عوامل مقدماتی با چرخش واریماکس[1] می‌تواند در این زمینه کمک مؤثری باشد (چرخش متعامد به منظور به دست آوردن ابعاد دو به دوی متغیرهای مستقل با تغییر روشن). یک تحلیل سه بعدی می‌تواند مثلاً به این سه عامل منجر گردد: مهارت‌های شناختی، اجتماعی و دوستی. نمرات عاملی محاسبه شده و عامل‌های سه‌گانه وارد طرح می‌شوند.

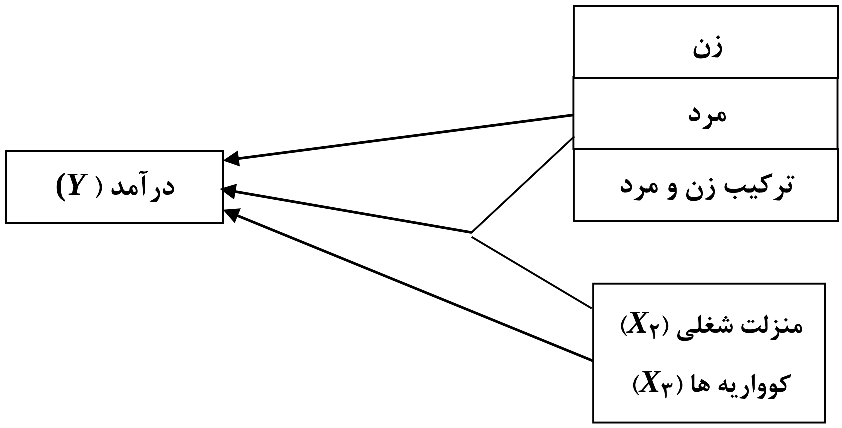
طرح:

- مسأله تحقیق، یک مسأله وابستگی است. متغیر وابسته (Y) درآمد حاصل از شغل و متغیرهای مستقل عبارتند از: جنسیت (X_1)، منزلت شغلی(X_2) و ویژگی‌های شغلی (عامل‌ها، به صورت X_3 نشان داده شده‌اند).
- تنها یک متغیر وابسته وجود دارد.
- متغیر وابسته در سطح سنجش فاصله‌ای اندازه‌گیری شده است.

---
1. varimax rotaion

- سه گروه جنسی وجود دارد: زن، مرد و ترکیب زن و مرد. متغیر مستقل $X_۱$ سه بخشی است. متغیرهای مستقل دیگر $X_۲$ و $X_۳$ به عنوان کوواریه عمل می‌کنند. بنابراین، ترکیبی از سطوح سنجش در بین متغیرهای مستقل وجود دارد.
- وقتی که اثر هویت جنسی بر میزان درآمد در مشاغل مختلف از لحاظ منزلت شغلی و یا ویژگی‌های دیگر متفاوت باشد، یک اثر تعاملی قابل اندازه‌گیری است.

نتیجه‌گیری:یک طرح تحلیل کوواریانس (آنکوا).



۳-۱-۴ ارزیابی‌های دانشجویان از کیفیت آموزش

در دانشگاه‌ها استادان به سه وظیفه اصلی می‌پردازند: آموزش، تحقیق و مدیریت. آموزش اغلب تحت فشار اولویت دادن به تحقیق (انتشار دادن یا تلف شدن!) و به دوش گرفتن وظایف مدیریتی است. از اینرو نظام‌های ارزیابی به ویژه از دهه ۱۹۷۰ توسعه یافتند تا دانشجویان درباره کیفیت تدریس قضاوت کنند.

ریچارد شینگل (۱۹۷۷)از دانشگاه ایالت ویرجینیا، تلاش کرد تا ابزاری برای ارزیابی دانشجویان بسازد. پرسش نامه‌هایی از یک نمونه حدود ۱۰۰۰ نفری از دانشجویان تکمیل گردید که شامل سؤالاتی درباره اطلاعات و دانش استاد در زمینه‌ای که درس میدهد، دربر داشتن اهداف آموزشی دوره، به کار بردن مثال و تصاویر در توضیحات، تأکید بر فهم مطلب به جای حفظ آن، تغییر و تفسیر ایده‌های انتزاعی و نظریه‌ها، شور و اشتیاق استاد، روشن کردن موارد سؤال شده بدون گیج کردن دانشجو، جذابیت، امکان مشاوره در خارج از کلاس، به کار گرفتن کتب و مواد آموزشی، توسعه فکری، و این که دوره تا چه حد فهم و ارزیابی مباحث مربوط به سرفصل‌ها را در آن زمینه خاص تسهیل می‌نماید، تأثیر بر اشتیاق یادگیری و برجسته کردن ارزش درس بود.

محقق امیدوار بود ابعادی از این ســـؤالات را به دســـت آورد که با چهار بعد زیر که در تحقیقات قبلی درباره ارزیابی دانشجویان گزارش شده‌اند، بهترین انطباق را داشته باشد: شایستگی آموزش، ساختار و سازمان دوره، کوششی که استاد از خود نشان می‌دهد و نفعی که دانشجو از گرفتن و طی کردن درس حاصل می‌کند. او واقف بود که این ابعاد مستقل از یکدیگر نیستند، اولاً به این دلیل که کفایت استاد اشتیاق و نفع رساندن او به دانشجو واقعاً زیاد متفاوت نیستند، و ثانیاً به خاطر این که دانشجویان در جواب‌های خود این ابعاد را از هم متمایز نمی‌کنند.

طرح ۴-۱-۳

مســـأله تحقیق عبارت اســـت از کاهش تعداد زیادی داده‌های مربوط به ارزیابی دانشـــجویان به تعداد محدودی ابعاد غیرمستقل‌از هم:

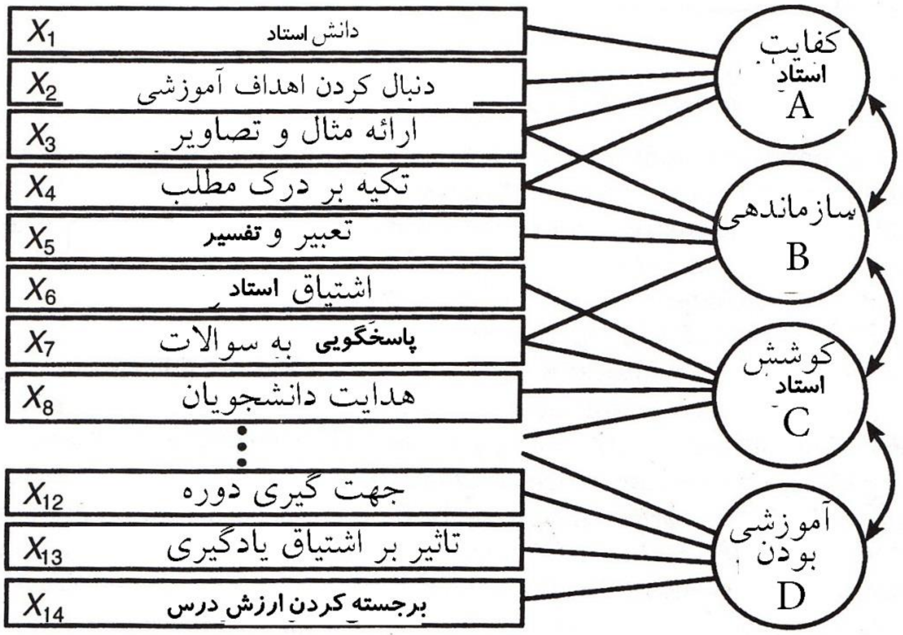
- مسأله تحقیق غیروابسته است. بین متغیرهای وابسته و مستقل تمایزی قائل نشده است.
- سطح سنجش متغیرها: اجازه دهید سطح سنجش همه متغیرها را فاصله‌ای در نظر بگیریم.
- مسأله مشخصاً برگرفته شده از یک نظریه قبلی نیست. امّا انتظار می‌رود ابعاد حاصل از سؤالات با هم همبستگی داشته باشند (متغیرهای مکنون غیرمتعامد).

نتیجه‌گیری: الف- بدون مشخص کردن یک نظریه *از قبل*:

تحلیل عامل اکتشافی با چرخش غیر قائم

ب: با مشخص کردن یک نظریه *از قبل*:

تحلیل عوامل تأییدی (بدون نیاز به چرخش)



۳-۱-۵ تجاوز بین‌نژادی و درون نژادی

گری لافری[1] (۱۹۸۳) به مطالعاتی تجربی اشاره نموده که نشان داده‌اند در نرخ قربانیان سیاه‌پوست مورد تجاوز سفیدپوستان (BW) افزایش قابل توجهی صورت گرفته است. در این مطالعات محققان توجه خاصی به مجازات این جرائم نموده‌اند: مردان سیاه‌پوست متهم به فریب دادن زنان سفیدپوست، مجازات‌های شدیدتری را متحمل شده‌اند تا سایر مظنونین به فریب جنسی.

طبق گفته لافری سوءظن افراطی حمایت از زنان سفیدپوست در مقابل سیاه‌پوستان، یک میراث بردگی آمریکایی است که به کرّات به عنوان نقطه تمرکز مبالغه‌های نژادی پیرامون مردان سیاه‌پوست عمل کرده است. این مطلب می‌تواند توضیح دهد که چرا بسیاری از تحقیقات تجربی درباره تجاوزات بین‌نژادی محدود به سؤالاتی در این باره می‌شود که مراجع قانونی درباره مردان سیاه‌پوست تبعیض قائل می‌شوند و اگر چنین است تا چه حد تبعیض اعمال می‌شود. چنان که تمام مطالعات اساساً میزان بیشتری از قربانیان سیاه‌پوست مورد تجاوز سفیدپوستان(BW) نسبت به سفیدپوستان مورد تجاوز سیاه‌پوستان (WB) ونیز افزایش نرخ تجاوز سفیدها به سیاه‌پوستان در هر سال را نشان

1. G. LaFree

داده‌اند. اما هیچ تحقیقی به این مسأله توجه نکرده که آیا واقعاً تجاوزات بین‌نژادی متفاوت از تجاوزات درون نژادی (WWو BB) بوده است.

این همان چیزی است که لافری می‌خواهد معلوم نماید. داده‌های او شامل ۴۵۳ گزارش تجاوز و سعی در اغوا نمودن میشد، که از بخش آمار جنایی دفتر سرشماری ملی آمریکا استخراج شده بود. او تجاوزات بین سه گروه نژادی را از یکدیگر متمایز کرد:BW،BB،WW. لافری همچنین ویژگی‌های قربانیان (سن، تحصیلات، وضع تأهل) را نیز جمع‌آوری نمود. او اطلاعات کمکی زیر را نیز برای هر گزارش جمع‌آوری کرد: ویژگی‌های قربانیان (سن، تحصیلات، وضعیت تأهل)، زمینه بین فردی جرم (آیا متجاوز و قربانی با هم غریبه بوده‌اند یا آشنا، آیا او حق داشته به عنوان مهمان یا کارگر در صحنه تجاوز بیاید یا به زور وارد شده، آیا حادثه در خانه قربانی اتفاق افتاده یا جای دیگر، در طول روز بوده یا شب، همدست داشته یا نه) و میزان خشونت (جراحت فیزیکی، به کار بردن اسلحه، مقاومت قربانی، نیازمندی به مراقبت‌های پزشکی). در صورت لزوم، کدهای تصنعی ۰ و ۱ به این داده‌ها اختصاص می‌یافت تا همگی در سطح سنجش فاصله‌ای محسوب شوند.

هدف اصلی این تحقیق، آزمودن این موضوع بود که آیا نمرات داده‌های گزارشی، تفاوت معناداری را بین سه گروه تجاوزات نژادی: سیاه- سیاه، سفید- سفید و سیاه- سفید نشان می‌دهد.

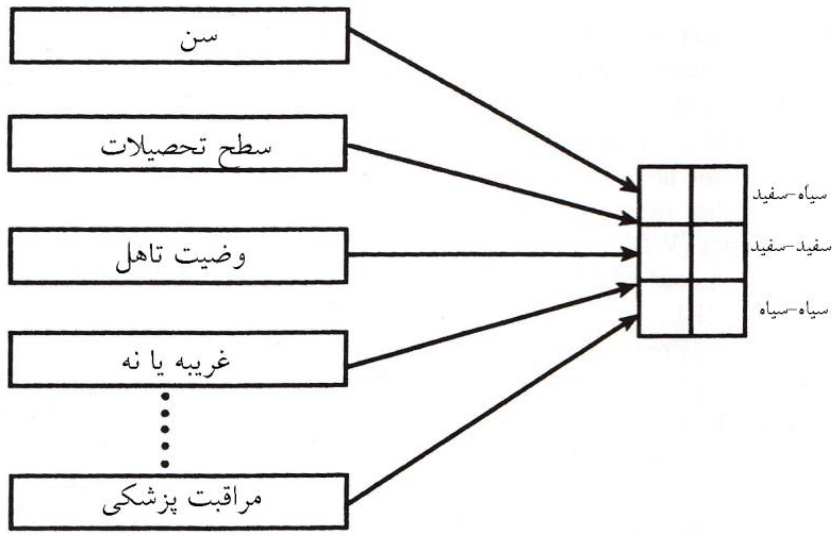
طرح ۵-۱-۳

مسأله تحقیق این است آیا داده‌های گزارشات مربوط به قربانیان، زمینه بین‌فردی و میزان خشونت، تفاوت معناداری را بین سه دسته تجاوزات: یک گروه بین‌نژادی سیاه- سفید و دو گروه درون‌نژادی سفید- سفید و سیاه- سیاه نشان می‌دهد.

- مسأله تحقیق وابسته است. متغیر وابسته (Y) به وسیله سه گروه، سیاه - سفید، سفید- سفید و سیاه - سیاه شکل می‌گیرد. متغیرهای مستقل شامل داده‌های مربوط به گزارشات تجاوز است.
- متغیر وابسته به یک مورد محدود می‌باشد. (تذکر: وقتی‌که سه گروه به وسیله دو کد تصنعی نمایش داده شوند، مدل مربوط را می‌توان دارای دو متغیر وابسته در نظر گرفت).
- متغیر وابسته در سطح سنجش اسمی اندازه‌گیری شده است. این یک متغیر سه‌بخشی است که سه گروه، سیاه- سفید، سفید- سفید و سیاه- سیاه را نشان می‌دهد.
- متغیرهای مستقل همگی در سطح سنجش فاصله‌ای محسوب شده‌اند که با کدهای ۰ و ۱ مشخص می‌گردند. اغلب آن‌ها در اصل دوبخشی هستند.

- در مسأله تحقیق از تأثیرات تعاملی سؤالی نشده است. محققان فقط می‌خواهند بررسی کنند که آیا داده‌های گزارشات (مجموع وزن داده شده X متغیر) تفاوت معناداری را بین سه گروه مفروض ارائه می‌کنند.

نتیجه‌گیری: یک تحلیل افتراقی چندگانه



۶-۱-۳ بسیج سازمانی در یک مجموعه تحقیقات هسته‌ای

کلینگمن[1] (۱۹۷۹) درباره بسیج سازمانی برای یک تحقیق هسته‌ای در آلمان غربی به تحقیق پرداخت. اوبا مطالعه یک نمونه ۲۹۵ نفری از دانشمندان هسته‌ای به آزمون این مطلب پرداخت که این دانشمندان تا چه حد متمایل به تغییر شغل (مثلاً رفتن به دانشگاه برای تدریس، یا کار در یک کارخانه) یا جابه جایی هستند. هدف وی این بود که یک مدل تبیین‌کننده برای تمایل به بسیج شدن را پیدا کند. این فرض که دانشمندان و سایر کارکنان در حال بسیج شدن تابع شرایط یکسانی هستند باید مورد آزمایش قرار می‌گرفت و محقق انتظار داشت نادرستی آن تأیید شود. اطلاعاتی شامل ویژگی‌های خانوادگی، رضایت کلی از کار، رضایت از همکاران و رضایت از مقامات بالاتر باید در برابر عوامل علمی‌تر وزن داده می‌شدند، مثل رضایت درونی از کار، پیش‌دستی برای تحقیقات بنیادی در علوم طبیعی و این برداشت که این مقاصد سازمانی حاصل شدنی هستند. طبق انتظارات قبلی

1.Klingemann

محقق، عوامل درونی- سازمانی(انگیزه محقق، اولویت تحقیقات بنیادی، پیشرفت شخصی و رضایت درونی از کار) تأثیرات قوی‌تری بر بسیج دانشمندان علوم طبیعی دارند تا عوامل بیرونی –سازمانی (سابقه کار، رضایت از همکاران، بالادستان و فشارهای خانوادگی)، درحالی‌که در مورد سایر کارکنان وضعیت برعکس است.

علاوه بر این، در بین این عوامل نیز روابط علت و معلولی برقرار خواهد بود، مثلاً تأثیر پیشرفت شخصی برانگیزهی تحقیق، تاثیر انگیزه‌ی تحقیق بر اولویت تحقیقات بنیادی، تأثیر مدت تحقیق بر رضایت از روابط با همکاران، و(در حالت منفی آن) مدت تحقیق برانگیزه‌ی پیشرفت، مدت تحقیق بر اولویت تحقیقات بنیادی.

تمام متغیرها در سطح فاصله‌ای اندازه‌گیری شده بودند.

هدف تحقیق، آزمودن مدل علت و معلولی کلی بوده که در آن اجزاء روابط علّی برجسته شده‌اند تا تبیینی از تمایل به بسیج شدن سازمانی را به دست دهند.

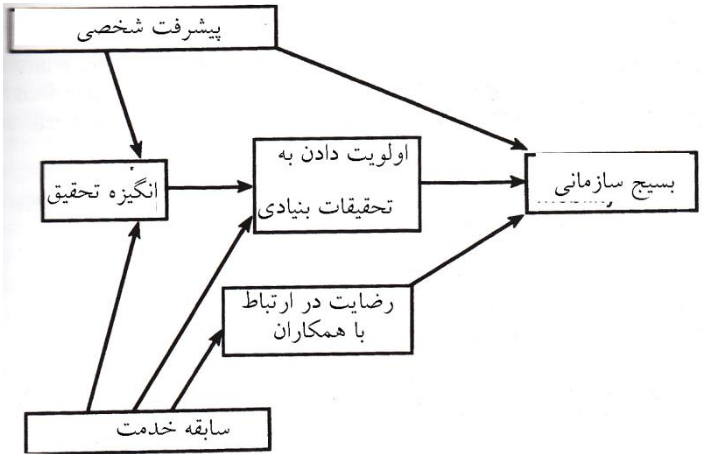
طرح ۶-۱-۳

مسأله تحقیق آن است که بسیج سازمانی از طریق مجموعه کاملاً پیچیده‌ای از عوامل تبیین‌کننده مثل پیشرفت شخصی به واسطه انگیزش و اولویت دادن به تحقیقات بنیادی، سابقه خدمت به واسطه رضایت در روابط با همکاران و همچنین سابقه خدمت (در حال منفی آن) بواسطه انگیزش و اولویت دادن به تحقیقات بنیادی قابل تبیین است:

- مسأله تحقیق وابسته است. متغیر وابسته (Y) عبارت است از تمایل به بسیج سازمانی.
- در میان متغیرهای مستقل نیز وابستگی مفروض است. چنان که علت العلل‌ها مورد تحقیق قرار گرفته‌اند و بنابراین چند مرحله تسلسلی وجود دارد.
- همه متغیرها در سطح سنجش فاصله‌ای اندازه‌گیری شده‌اند.
- تأثیرات تعاملی مورد سؤال نیستند. مدل علی افزایشی است.

نتیجه‌گیری: یک تحلیل مسیر (احتمالاً لیزرل).

طرح، فقط بخشی از تحقیق را نشان می‌دهد.



نمودار تنها بخشی از تحقیق را نشان می‌دهد

۷-۱-۳ اصلاحات در آموزش و پرورش ابتدایی: یک جعبه سیاه

سه محقق بلژیکی به نام‌های آر. واندنبرگ، اچ. دینو و اف. دی رو[1] (۱۹۷۸) به این نتیجه رسیدند که اصلاح و تجدید سازمان آموزش ابتدایی، مانند توسعه برنامه‌های آموزشی همیشه به شکلی که مورد نظر «اصلاحگران» بوده، تحقق نیافته است. این پدیدهی اجرائی نشدن، ناشی از مصلحت اندیشه‌های مدرسه‌های که اصلاحات را می‌پذیرد، همراه با مجموعه‌ای از موانع مربوط به پاسخگو بودن معلمین برای تحقق اصلاحات است. از نظر این محققان فرایند اصلاحات اساساً منطقی و مشخص نیست، بلکه بیشتر یک مصالحه سیاسی- اجتماعی است از آنچه که از اصلاحات مورد نظر بوده و آنچه که نهایتاً تحقق یافته است. این فرایند مصالحه و انتقال، خود یک جعبه سیاه(معمّا) است، همان‌گونه که طرح زیر نشان می‌دهد:

اصلاحات مورد نظر← جعبه سیاه←آنچه که عملاً به اجرا درآمده است. جعبه سیاه در بردارنده عوامل مثبت و منفی‌ای است که در مدرسه عمل می‌کنند و شامل عواملی است که محرک اصلاحات بوده یا بر آن سرپوش می‌گذارند. این عوامل عمدتاً ویژگی‌های معلمین هستند، زیرا آن‌ها هستند که نهایتاً بایستی اصلاحات را تحقق بخشند و به عمل درآورند. نمونه‌ای از عوامل مثبت عبارتند از: همکاری بازرسان مدارس، هم‌قطاران، مدیر، والدین و مراکز روانی بهداشتی- اجتماعی و همچنین نشریات، کتابچه‌های تبلیغاتی، مواد آموزشی و احیاناً آموزش‌های اضافی. بعضی عوامل بازدارنده عبارتند از: زیاد بودن دانش آموزان کلاس، فضای کم، عدم همکاری معلمین، نداشتن اطلاع از اصلاحات، عدم حمایت بازرسان مدارس، ناکافی بودن نشریات، کتابچه و مواد آموزشی و عدم

1. R. Vanderberghe, H. Denoo, & F. De Roo

دســـترســـی به آن‌ها، فقدان آموزش‌های تکمیلی، عدم پشـــتیبانی مالی، ویژگی‌های اجبار کننده برنامه‌های آموزشی و نگرش‌های بدبینانه به اصلاحات آموزشی.

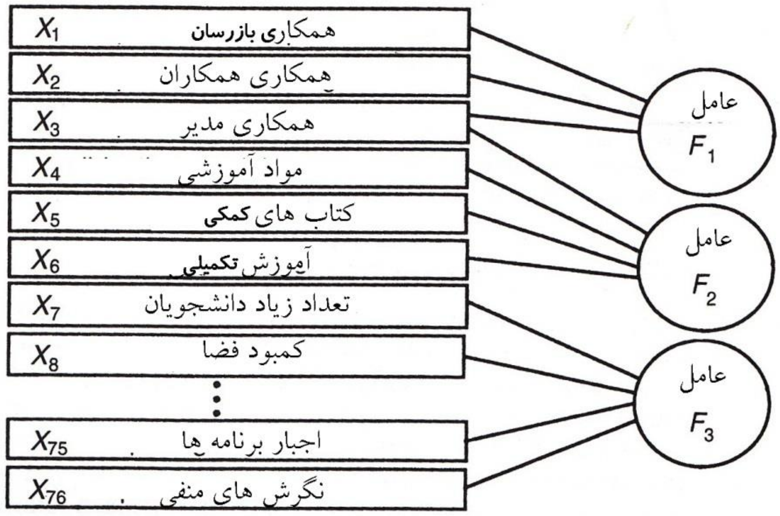
محققان در صدد برآمدند تا بینش بهتری نسبت به این جعبه سیاه حاصل کنند و این هدف را از طریق پرسش از نمونه‌ای تصادفی متشکل از ۱۱۰۰ نفر از معلمین پی گرفتند. از معلمین خواسته شـــد میزان تأثیر هر یک از عوامل (۳۱ عامل مثبت و ۴۵ عامل منفی) را روی یک مقیاس در مورد خودشان، مشخص کنند.

طرح ۷-۱-۳

مســأله تحقیق عبارت اســت از کاهش شــمار زیادی عوامل تحریک کننده یا بازدارنده اصــلاحات تربیتی به تعداد محدودی ابعاد مستقل، به منظور دست یافتن به بینش بهتری در باره جعبه سیاه که از اصلاحات مطلوب تا آنچه به اجرا در می‌آید، امتداد دارد:

- مســأله تحقیق غیر وابســته اســت (وابســته درونی هم نامیده می‌شــود). بین متغیرهای وابســته و مستقل تمایزی قائل نشده‌اند.
- تمام متغیرها در ســطح ســنجش فاصــله‌ای اندازه‌گیری شــده‌اند، به شــکل مقیاس ارائه شــده به معلمین.
- یک خلاء کلی نظریه به صورت آشکارا وجود دارد که به وسیله واژه «جعبه سیاه» بیان شده است.

نتیجه‌گیری: یک تحلیل عوامل اکتشـــافی با چرخش متعامد (متعامد برای به دســـت آوردن ابعاد مستقل).



۸-۱-۳ ارزش و ارزیابی مشاغل

آرن ال. کالبرگ[1] (۱۹۷۷) از دانشـــگاه ایندیا در تحقیق خود پیرامون رضـــایت شـــغلی، دیدگاه‌های مختلفی را پیرامون جامعه‌شناسی شغلی مورد بحث قرار می‌دهد. یک گروه از محققان تلاش کرده‌اند تنوع رضایت شغلی را صرفاً از جنبه شخصیت کارکنان برر سی کنند و گروه دیگر از جنبه ماهیت مشـــاغلی که مردم اختیار می‌کنند. هیچ یک از این دو دیدگاه کفایت نمی‌کند، مثلاً دیدگاه دوم به تفاوت‌های فردی در رضایت که افراد در یک شغل یکسان تجربه می‌کنند، بی‌توجه است.

از این رو، کالبرگ می‌خواهد نگرش جدیدی را وارد کند که بین موضـــوع «ارزیابی» و صـــفت «ارزش» مشاغل تمایز برقرار سازد. سؤال مربوط به «ارزیابی» روی نمونه‌ای متشکل از ۱۴۹۶ نفر از «پیمایش کیفیت و اشتغال» در سال ۱۹۷۳-۱۹۷۲ در ایالات متحده برر سی شد. از این اشخاص خواسته شد به شمار زیادی از ویژگی‌های شغلی نمره‌ای که تصور می‌کنند آن موقعیت شغلی ایجاب می‌کند اختصاص دهند، و میانگین‌ها برای هر شغل محاسبه شد. «ارزش» هر شغل نیز به وسیله گروه مستقلّی از صاحب‌نظران تعیین شد. اینها به ویژگی‌های شغلی یکسان اختصاص داده شدند و افراد باید برای هر شغل نمره ویژگی‌ها را ترکیب می‌کردند.

در این تحقیق آرن کلبرگ در پی برر سی آن بود که آیا نمرات (ارزیابی) کارکنان با نمرات گروه مستقل (ارزش) انطباق دارد. ویژگی‌های شغلی ارائه شده مربوط به موارد زیر بود:

خصـــوصـــیات ذاتی (آیا آن کار خاص جذاب اســـت، به کارکن امکان رشـــد اســـتعدادهایش را می‌دهد؟آیا کارکن می‌تواند نتیجه کار خود را ببیند؟)، راحتی (رفت و آمد راحت به محل کار، اوقات

1. Arne L. Kalleberg

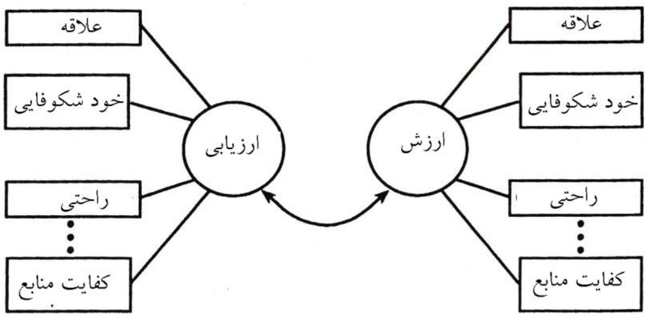
خوش، عاری از جنبه‌های ناسازگاری، محیط فیزیکی خوشایند، نبودن کار خیلی زیاد، زمان کافی برای انجام کار، فرصتی برای از یاد بردن مشکلات شخصی)، جنبه‌های مالی (میزان پرداخت، مزایای جنبی و ایمنی شغلی)؛ دورنمای شغل (آیا وضعیت ترفیع در آن خوب است، آیا ترفیع‌ها بروشنی قابل لمس هستند و آیا کارفرما با پیشرفت هر کسی موافق است؟)، رابطه با همکاران (آیا شغل فرصت دوستیابی به افراد می‌دهد؟آیا برخورد همکاران دوستانه و حمایت کننده است و آیا همکاران احساس خوشایندی را در فرد برمی‌انگیزند؟)، و کافی بودن منابع (آیا پشتیبانی تجهیزات و اطلاعات مورد نیاز حرفه به اندازه کافی وجود دارد؟).

طرح ۸-۱-۳

مسأله تحقیق شامل بررسی رابطه بین دو مجموعه همسان از ویژگی‌های شغل است که یکی به وسیله کارکنان و دیگری به وسیله گروه مستقلی نمره داده شده است. اجزاء تحلیل شغلها هستند:

- مسأله تحقیق غیروابسته است. همبستگی بین ارزش و ارزیابی شغلها مورد تحقیق قرار میگیرد، نه تأثیر علّی یکی بر دیگری. سؤال از متغیرهای مستقل و وابسته نیست.
- دو مجموعه از متغیرها وجود دارند و روابط بین مجموعه‌ها و نه روابط درونی آن ها، مورد مطالعه قرار می‌گیرد.
- مسأله تحقیق با زوج‌های متغیرهای مکنون سر وکار دارد، یکی مجموعه نخست و یکی مجموعه دوم را ارائه می‌کند. زوج نخست متغیرهای مکنون توسط محقق از قبل «ارزش» و «ارزیابی» نامگذاری شده است. به زوج‌های احتمالی دیگر نمی‌توان نامی اختصاص داد تا زمانی‌که نتایج تحلیل مورد بررسی قرار گیرد.
- متغیرها در سطح سنجش فاصله‌ای اندازه‌گیری شده‌اند، بر اساس شرایطی که نمرات روی یک مقیاس فاصله‌ای اندازه‌گیری میشوند.

نتیجه‌گیری: (الف) با متغیرهای سطح سنجش فاصله‌ای: یک تحلیل همبستگی متعارف (کانونی)،
(ب) با متغیرهای سطوح سنجش پایین‌تر:
یک تحلیل کانالز (برای اطلاع از جزئیات این شیوه به گیفی، ۱۹۸۰ رجوع شود).



۹-۱-۳ دسته‌بندی ۱۶ قبیله از بومیان آمریکا

کارل اسکوسلر[1] و هارولد درایور[2] (۱۹۵۶) داده‌های آماری را برای ۱۶ قبیله مجاور هم در شمال غربی کالیفرنیا جمع‌آوری کردند.

از قبل دراین باره نظریه‌ای وجود نداشـــت یا مطالب ناچیزی گفته شـــده بود. محققان فقط می‌خواســـتند فرهنگ بومیان آمریکایی در کالیفرنیا را مورد مطالعه قرار دهند. برای هر یک از ۱۶ قبیله ۲۵۰۰ قلم اطلاعات منظور شـــد. اقلام اطلاعاتی درباره جنبه‌های مهم زندگی اجتماعی بود؛ از قبیل، معاش، مسکن، نقل و انتقال، اسلحه، قضاوت، ازدواج، جنایی، مراسم مذهبی و غیره.

این قبایل را می‌توان به وســیله معدودی اطلاعات درباره پرهیزهای خویشــاوندی بین مادرزن و داماد نشان داد: اصلاً صحبت نکردن با یکدیگر، صحبت کم، نطق جمعی، صحبت از طریق شخص ثالث، اجتناب طولانی از یکدیگر، منع هم‌سفره شدن، منع لبخند زدن.

از آنجا که تنها داشتن یا نداشتن یک صفت را می‌شد مشخص ساخت نه مقدار آن را، یک قبیله به وســیله مجموعه‌ای از ارزش‌ها توصــیف نشــده اســت، بلکه تنها از روی تعداد صــفاتی که داشــته و تعدادی که نداشته توصیف شده است. مثلاً وقتی‌که در قبیله‌ای مادرزن و داماد بتوانند صحبت کنند، ولی نتوانند با یکدیگر غذا بخورند یا به هم لبخند بزنند، به این قبیله نمره ۲ اختصـــاص می‌یابد. درحالی‌که به قبیله دیگری که در آن، همه ی پرهیزهای خویشاوندی هفتگانه صورت می‌گیرد نمره ۷ تخصیص می‌یابد. برای سایر زمینه‌های اجتماعی مثل معیشت، مسکن و غیره نیز همین‌گونه است.

در نتیجه، ضــرایب همبســتگی محاســبه شــده توســط محققان، میزان شــباهت بین زوج‌های اندازه‌گیری شــده را نشــان نمی‌دهد، بلکه همبســتگی بین دو قبیله و تعداد صــفات مربوط به هر دو قبیله را بیان می‌کند. به عبارت دیگر، همبســتگی‌های درونی، بین قبایل بودند نه صــفات. محققان با محاســبه این شــباهت‌ها و بین قبایل بومی آمریکا و محاســبه ماتریس شــباهت‌ها، می خواســتند یک دسته‌بندی دقیق به دست آورند. لذا، هدف آن‌ها بنا نهادن یک طبقه‌بندی طبیعی بود.

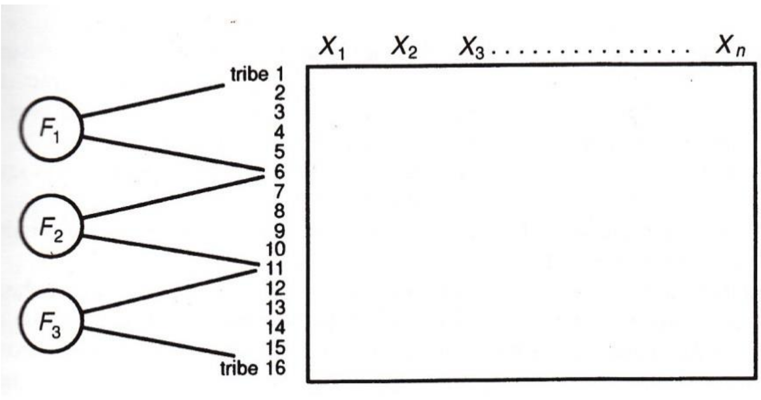
1. Karl Schuessler 2. Harold Driver

طرح ۹-۱-۳

مســـأله تحقیق شـــامل مطالعه شـــباهت‌های بین هر جفت از قبایل ۱۹گانه بومی آمریکا بوده، و با استفاده از نمره تعداد زیادی از ویژگی‌های قبیله‌ای صورت می‌گیرد، و بایستی به دسته‌بندی طبیعی چنین جوامعی منتهی گردد.

- مسأله تحقیق غیر وابسته است. تمایزی بین متغیرهای وابسته و مستقل قائل نشده‌اند.
- نظریه‌ای از قبل ارائه نشـــده اســـت. محققان مایل به آزمودن چیزی نیســـتند بلکه می‌خواهند اندازه‌گیری کنند.
- تحلیل روی متغیرها صورت نمی‌گیرد، بلکه واحدها (قبیلهها) مورد تحلیل قرار می‌گیرند. این کارِ درستی است زیرا تعداد اقلام اطلاعاتی بسیار زیاد امّا تعداد واحدها کم هستند. چنانچه تحلیلی شامل ۲÷ (۲۴۹۹)(۲۵۰۰) همبســـتگی درون اقلام اطلاعاتی بود، همبســـتگی‌ها تنها براســـاس ۱۶ واحد می‌بودکه به نتایج بســـیار غیر پایایی منجر می‌شـــد. هدف ایجاد یک طبقه‌بندی از قبایل (تقســـیمات فرعی در خوشه‌ها) است نه کاهش ۲۵۰۰ قلم اطلاعاتی به تعدادی از ابعاد (کاهش عوامل).

نتیجه‌گیری: یک تحلیل عوامل نوع Q (یا احتمالاً یک تحلیل خوشـــه از واحدها یا یک تحلیل هومالز) تحلیل ستون جلویی ماتریس داده‌ها.



۱۰-۱-۳ نقش سنتی و امروزی زنان در آگهی‌های ازدواج

سوزان بونتپز[1] از نویسندگان مجله «بریجیت» پرسشنامه‌ای در باره نقشی که زن و مرد در آگهی‌های ازدواج بروز می‌دهند تدوین کرد (این مثال از سخنرانی‌های دانشکده، اقتباس و تلخیص شده است). این روزنامه‌نگار بین دو نقش سنتی و جدید تمایز قائل شده است. (۱) نقش سنتی شامل: نیاز به مورد حمایت قرار گرفتن، تأکید بر تبعیت، عاطفه، پرســـتاری و حالات رومانتیک.(۲) نقش جدید

1. S. Bontemps

(مدرن) شامل: دیدگاه عینی، عدم نیاز به حمایت و مراقبت، تأکید بر ایده برابری زن و مرد، همکاری منطقی.

فرضیه روزنامه نگار مذکور این بود که مردان اصولاً نقش سنتی را می‌پذیرند. به عبارت دیگر او یک تأثیر علّی طبیعت الگوی نقش را بر میزان پذیرش توسط مردان فرض نمود. برای آزمودن این تأثیر علّی او ابتدا تمام آگهی‌های زنان را به دو دسته سنتی و مدرن تقسیم کرد. در ادامه چند نمونه از آن‌ها ارائه می‌شود. آگهی۱ (سنتی): مورد نیاز: شانه‌های قوی برای حمایت از زنی نحیف، سن ۳۲ سال، قد ۱/۵۶، جذّاب باکره، با خصوصیات زنانه، باریک اندام، اما نه در حد ژست های مدل‌های نقاشی و تئآتر.چه مرد عاقل و ملایم و با شخصیتی در جستجوی زنی سر براه برای مشارکت در شادی‌ها و غم‌ها ست. آگهی ۲ (سنتی): مخلوقی زنانه، سن ۲۶، قد ۱/۶۵ ، باکلاس، دلربا، سرزنده، حمایت مردی را برای زناشویی می‌طلبد.آگهی۳ (مدرن): معلم زن، شاغل، سن ۲۵ سال، قد ۱/۶۸ ، به دنبال شریک ازدواج منطقی و باجنبه است که فعالیت حرفه‌ای را بپذیرد. آگهی۴(مدرن): فردی ۳۶ ساله، قد۱/۶۰، باریک اندام، پز شک، باذوق و ا ستعداد، علاقه‌مند به طبیعت و تکنولوژی، تئآتر و سیاست، شوهری با مسؤولیت را خواستار است.

از هر یک از این دو گروه، نمونه‌ای به شیوه نمونه‌گیری همتاسازی و تصادفی انتخاب گردید. نهایت تلاش لازم بعمل آمد تا دو گروه از لحاظ متغیرهای کنترل کننده‌ای مثل قد، سن، شغل و ابزار آگهی یک‌سان با شند. تعداد مردان پا سخگو به هر آگهی شمارش شدند و برر سی شد که آیا تعداد مردانی که به آگهی‌هایی پاسخ داده‌اند که در آن زنان نقش سنتی را به خود گرفته‌اند به طور معناداری بالاتر است.

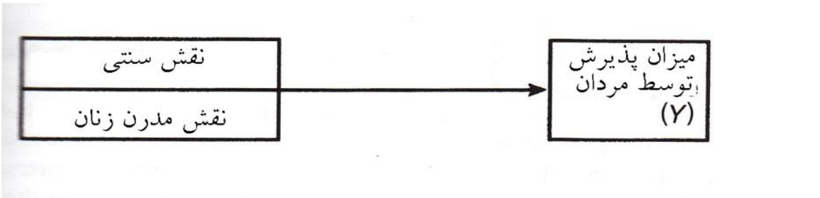
طرح ۱۰-۱-۳

فرض این است که میانگین تعداد مردانی که به نقش سنتی زن پاسخ داده‌اند به طور معناداری بالاتر از آگهی‌های با نقش مدرن برای زنان است:

- مسأله تحقیق وابسته است.متغیر وابسته (Y) میزان پذیرش مردان است که در عمل به صورت تعداد کسانی‌که به یک آگهی ازدواج پاسخ گفته‌اند اندازه‌گیری می‌شود.
- متغیر مستقل، ماهیت الگوی نقش (سنتی یا مدرن) است. واحدهای تحلیل شامل آگهی‌هاست.
- متغیر وابسته به یک مورد محدود می‌باشد. لذا به طرح‌های مربوط به بیش از یک متغیر وابسته کاری نداریم.
- متغیر وابسته در سطح سنجش فاصله‌ای اندازه‌گیری می‌شود. لذا، تحلیل متمایزکننده کنار گذاشته می‌شود.

- دو گروه تشکیل شده است؛ یکی شامل آگهی‌هایی که نقش سنتی زنان را مجسم می‌نماید و یکی آگهی‌هایی که نقش مدرن آنان را بیان می‌کند. بنابراین سؤال از طرح شبه آزمایشی است (شبه، به خاطر این که نمونه‌گیری تصادفی واقعی صورت نگرفته است، به دلیل این که تحقیق قبلی درباره نگرش مردانه میسّر نیست و به خاطر این که محرک توسط خود محقق اعمال نشده است). متغیر مستقل معرف دو گروه دو بخشی است.
- در این مثال ساده، فرض بر این است که دو گروه از لحاظ متغیرهای کنترلی مثل قد، سن، شغل و طول آگهی، توزیع یکسانی را نشان می‌دهند. اگر این متغیرها صریحاً به شکل کوواریه‌هایی وارد تحلیل شوند، اجرای یک طرح «آنکوا» یا تحلیل کوواریانس مناسب خواهد بود. اما در این جا به یک تحلیل علّی دو متغیره اکتفا می‌شود.

نتیجه‌گیری: یک طرح شبه‌آزمایشی؛ آزمون تی استیودنت روی تفاوت میانگین‌ها.



۱۱-۱-۳ غیبت به دلیل بیماری

اچ. فیلیپسن[1] تحقیقی را پیرامون علل تفاوت میانگین غیبت در ۸۳ کارخانه متوسط در نترلند (۱۹۶۹) به اجرا در آورد. او تحلیلی انجام داد که متغیر وابسته آن (Y) فراوانی بیماری بود(میانگین تعداد بیماری‌های گزارش شده برای هر فرد در طول سال) و بعضی متغیرهای مستقل عبارت بودند از: X_1= چگونگی تکنولوژی خط تولید (میزان مکانیزه بودن/اتوماتیک عمل کردن)؛ X_2= سیستم شیفت‌کاری (درصد کارکنان شیفتی)؛ X_3= سطح تخصصی کار (میزان آموزش یا تحصیلات مورد نیاز برای کار)؛ X_4= محول کردن به کارکنان غیرمسئول (میزان سپردن مسؤولیت‌ها به زیردستان)؛ X_5= استقلال در انجام معاملات (یک نمره خودمختاری در ارتباط با بازار که در یکسوی بردار یک شرکت دارای مسئولیت محدود قرار دارد و مستقل عمل می‌کند و در جانب دیگر یک بنگاه یا مؤسسه محلی با وابستگی‌های زیاد)؛ X_6= شرایط سود و مدت قرارداد(مرخصی استعلاجی با حقوق برابر بیمارکه دریک انتها صنایعی هستند که قرارداد طولانی مدت می بندند و در جانب دیگر صنایعی که کارگر ضرر و زیان قطعی را متحمل می شود)؛ X_7= ارتباط با سازمان بیمه مؤسسه (نمره‌ای که در آن یک انتهای آن مؤسساتی هستند که بیماری مستخدم توسط سازمان بیمه کنترل می شود و در انتهای دیگر مؤسساتی هستند که خود سازمان آن را کنترل می‌کند)؛ X_8=دوره خدمت (در صد کارگران با سابقه خدمت کمتر از یکسال)؛ و X_9 =خصوصیات شهری (میزان شهری بودن جامعه‌ای که کارخانه

1. H. Philipsen

در آن بنا شده است به عنوان مقیاس طرز فکر کلی جمعیت: در شهرها و سعت نظر بیشتری درباره بیماری وجود دارد).

متغیر X_1 شاخصی از روابط پایدار کاری است، X_2 شاخص عدم تمایل به کار، X_3، X_4 و X_5 شاخص‌های فرصت‌های خودشکوفایی و ارتباط اجتماعی، X_6 و X_7 جنبه‌های اقتصادی و بیمه فرصت غیبت و X_8 و X_9 (به شکل منفی) شانس کنترل‌های اجتماعی روی غیبت را نشان می‌دهند.

فیلیسپن مایل بود یک مدل چندگانه علّت و معلولی را برای تبیین میزان بیماری (Y) در کارخانجات متوسط نترلند پیدا کند.

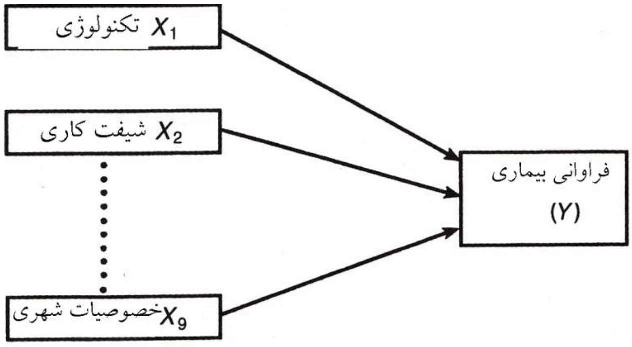
طرح ۱۱-۱-۳

مسأله تحقیق عبارت است از پیدا کردن توضیحی برای تفاوت میانگین تعداد بیماری‌های گزارش شده در صنایع حد وسط با استفاده از ۹ عامل علّی که در سطح این کارخانجات مشاهده شده است:

- مسأله تحقیق وابسته است. متغیر وابسته (Y) میزان بیماری است که به شکل میانگین تعداد بیماری های گزارش شده برای هر شخص در سال سنجیده شده است. متغیرهای مستقل، ۹ عامل علّی (X_1 تا X_9) هستند.
- متغیرهای وابسته به یک مورد محدود شده است. بنابراین طرح‌های مربوط به چند متغیر وابسته را می‌توان کنار گذاشت.
- متغیر وابسته در سطح سنجش فاصله‌ای است، لذا تحلیل متمایزکننده را می‌توان نادیده گرفت.
- مسأله تحقیق از یک متغیر سؤال (غیبت به دلیل بیماریY) شروع می‌شود نه یک رابطه مورد سؤال.
- تمام متغیرهای مستقل در سطح سنجش فاصله‌ای اندازه‌گیری شده‌اند (می‌توان آن‌ها را به صورت کمّی در نظر گرفت چون دو بخشی و با کدهای ۰ و ۱ هستند).
- در مسأله تحقیق اثرات تعاملی مورد نظر نیستند. مدل مورد نظر بی‌تردید یک مدل افزایشی است.

(**تذکر:** این موضوع محقق را از لزوم آزمون اثرات تعاملی ممکن در داده‌های تجربی معاف نمی‌دارد. همین طور انجام آزمون‌های دیگر خطی بودن، متجانس بودن و الگوی تصادفی باقیمانده‌ها اجتناب ناپذیر است).

نتیجه‌گیری: یک تحلیل رگرسیون چندگانه (احتمالاً تحلیل مسیر در صورتی‌که روابط دوسویه وابستگی بین عوامل علّی مورد توجه باشد).



۳-۱-۱۲ آیا افراد بیکار از لحاظ اجتماعی در انزوا هستند؟

دی. هاتمن[1] و آ. جی. استیجن(۱۹۹۰) محققان دانشگاه اراسموس روتردام مطالعات اخیر پیرامون دستمزدبگیران سطح پایین و بیکاران، و بویژه این فرضیه که شرایط این گروه جمعیتی منجر به کاهش مشارکت اجتماعی آنان می‌شود را مورد انتقاد قرار دادند. حتی بعضی محققان صحبت از تنگدستی مدرن می کنند. از دید آنان محرومیت نسبی و مخصوصاً درآمد پایین باعث کاهش ارتباط اجتماعی و مشارکت‌های اجتماعی- فرهنگی می‌شود: فعالیت‌های اوقات فراغت و فرصت‌ها محدود گشته و عضویت در انجمن‌ها و اجتماعات ترک می شود. دیگران معتقدند فقدان مشارکت اجتماعی ناشی از مشکل وضعیت مالی نیست، بلکه بیشتر ناشی از نیاز به کاهش تنش روانی است: ارتباط آنان به خصوص با افراد بیکار دیگر عملاً قطع می‌شود. بعضی دیگر حتی یک دیدگاه با ساختار گسترده‌تر را دنبال می‌کنند و ادعا می کنند افراد بیکار به طور هدفمند از روابط اجتماعی کناره‌گیری نمی‌کنند، بلکه مجبور به این گونه عمل کردن می‌شوند، زیرا فرصت‌های واقعی کمی برای حفظ روابط اجتماعی دارند.

هاتن و استیجن کوشیدند تا حقیقت این انزوای اجتماعی را آشکار کنند. برای این که وقتی‌تعدادی از متغیرهای زمینه‌ساز مهار شوند، ممکن است ارتباط بین بیکاری و انزوای اجتماعی محو شود؛ متغیرهایی که به مفهوم بوردیو از سرمایه فرهنگی (سطح تحصیلات، فرهنگ و مشارکت اجتماعی والدین) و به ترکیب خانواده (تعداد فرزندان، تک والدینی) و همچنین به سن مربوطند. مثلاً در زمینه سرمایه فرهنگی از یک سو انتظار می‌رود کسانی‌که از سطح تحصیلات پایینی برخوردارند شانس بیشتری برای بیکار شدن داشته باشند و یا از کمترین منافع اجتماعی برخوردار باشند، و از جانب دیگر انتظار این است که سرمایه فرهنگی کم منجر به مشارکت اجتماعی گردد. بر این اساس انزوای اجتماعی افراد بیکار و دستمزدبگیران کم درآمد باید در امتداد یک سبک زندگی به حساب آید که از دوران قبل از نیازمندی ریشه گرفته است.

1. D. Houtman & A. J. Steijn

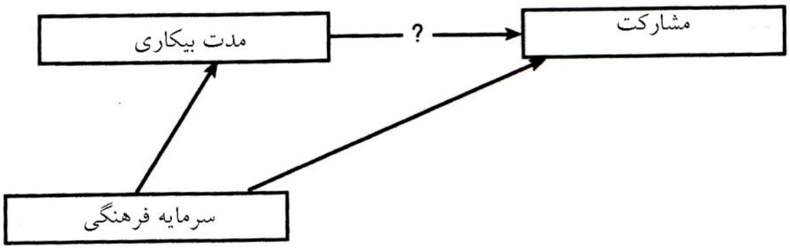
در تحقیق تکمیلی، این بحث به مدت بیکاری (به جای نسبت اشتغال / بیکاری) و تأثیر فرض آن بر مشارکت اجتماعی بسط داده خواهد شد.

طرح ۱۲-۱-۳

مسأله تحقیق این است که آیا رابطه بین بیکاری (و مدت بیکاری) و مشارکت اجتماعی را باید یک اثر علّی مستقیم به‌حساب آورد یا این که آن را نتیجه فرهنگی به دست آمده از خانواده دانست:

- مسأله تحقیق وابسته است متغیر وابسته (Y) مشارکت اجتماعی است.
- تاثیر علت و معلولی متغیرهای مستقل بیکاری و مدت بیکاری بر Y با کنترل سرمایه فرهنگی، مورد آزمون قرار می‌گیرد:
- مسأله رابطه X و Y سئوال اساسی تحقیق است (علّی غیر واقعی) نه مسأله متغیر Y.
- متغیر وابسته Y، در سطح سنجش فاصله‌ای اندازه‌گیری شده است.
- متغیر مستقل بیکاری را می‌توان یک متغیر دو بخشی به حساب آورد (شاغل / بیکار). محققان تمایز دیگری نیز قائل شده‌اند که بیکاران را به دو بخش RWW و ARW (قوانین تأمین اجتماعی هلند) تقسیم می‌کند، طوری که یک متغیر سه بخشی حاصل می‌گردد. امّا این چندان با اهمیت نیست. چیزی که مهم است در اینجا این است که نه تنها بیکاران بلکه شاغلین هم مورد بررسی قرار می‌گیرند تا امکان مقایسه فراهم شود.
- متغیر مستقل «مدت بیکاری» از تحقیق تکمیلی در سطح سنجش فاصله‌ای اندازه‌گیری شده است.
- متغیر کنترلی «سرمایه فرهنگی» عاملی است که از یک تحلیل عامل روی ویژگی‌های زمینه‌ساز، نتیجه شده و نمرات عاملی برای آن محاسبه شده‌اند. بنابراین متغیر مذکور در سطح سنجش فاصله‌ای می‌باشد.

نتیجه‌گیری: (الف) برای تحقیق در سه گروه بیکاری: یک طرح تحلیل کوواریانس (آنکوا).
(ب) برای تحقیق مکمل آن پیرامون مدت بیکاری: یک تحلیل همبستگی تفکیکی به کار برده می‌شود. نمودار روابط علّی مورد دوّم در این جا رسم شده است.



۱۳-۱-۳ سطح پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان خارجی

ام جی دی جونگ[1] (۱۹۸۲) از دانشگاه اراسموس روتردام پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان خارجی ۱۵ ساله در رتردام را تحت عنوان «آن‌ها چه پیشرفتی داشته‌اند؟» مورد تحلیل قرار داد. یک مقیاس در زمینه سطح پیشرفت تحصیلی (Y) ساخته شد که ترکیبی از سال‌های تحصیل و نوع مدرسه آنان را در بر می‌گرفت. ملّیت دانش‌آموزان در سه گروه تعیین شد: سورینامی‌ها، کشورهای جنوب اروپا (ایتالیا، پرتقال، اسپانیا و غیره) و گروه کشورهای جهان سوم (بخصوص ترکیه و مراکش). انتظار این بود که میانگین سطح پیشرفت تحصیلی برای سورینامی‌ها بالاترین باشد، زیرا مشکلات زبانی نداشتند، و برای جهان سومی‌ها در پایین‌ترین سطح باشد، به دلیل این که با جوامع هلندی اختلاف فرهنگی زیادی داشتند. دو گروه نیز از لحاظ «مدت اقامت» ایجاد شد: ۱=حضور داشتن قبل از سال ۱۹۷۳، ۲= ساکن شدن در سال ۱۹۷۳ یا بعد از آن. بحث این بودکه پیشرفت در مدرسه نیاز به مقداری زمان و مدتی اقامت دارد تا طی آن پیشرفتی حاصل شود. علاوه بر این دو گروه وضعیت اجتماعی - اقتصادی نتیجه دو بخش کردن شاخصی بود که بر اساس سطح شغل و تحصیلات پدر و مادر، تعداد کتاب‌های موجود در منزل و مدت زمانی که دانش آموزان در منزل می‌گذرانند، طرح شده بود. انتظار می‌رفت دانش‌آموزان طبقات اجتماعی- اقتصادی بالاتر از سطح پیشرفت بالاتری در مدرسه برخوردار باشند. اضافه بر عواملی که تاکنون ذکر شد، یعنی تأثیر ملیت، مدت اقامت و وضعیت اجتماعی - اقتصادی بر پیشرفت تحصیلی، بعضی روابط سطح بالای تعدیل کننده نیز مورد انتظار بود. نمونه‌ای از آنان تأثیر ترکیبی ملیت و مدت اقامت بر پیشرفت تحصیلی بود. به طور مثال، پیشرفت بهتر دانش‌آموزان سورینامی‌که از شاگردان اهل جنوب اروپا و گروه جهان سومی‌ها پیشی می‌گیرند، در مورد مدت کوتاه اقامت چنین است نه برای مدت‌های طولانی اقامت. در مدت زمان طولانی دانش‌آموزان جنوب اروپا خود را به دانش‌آموزان سورینامی می‌رساندند. طوری که هر دو گروه پیشرفت داشتند. انتظار می‌رفت گروه جهان سومی‌ها هنوز هم به مدت زمان بیشتری، یعنی بیش از آنچه در این تحقیق به کار می‌رفت، برای اقامت نیاز داشته باشند تا این برابری را کسب نمایند.

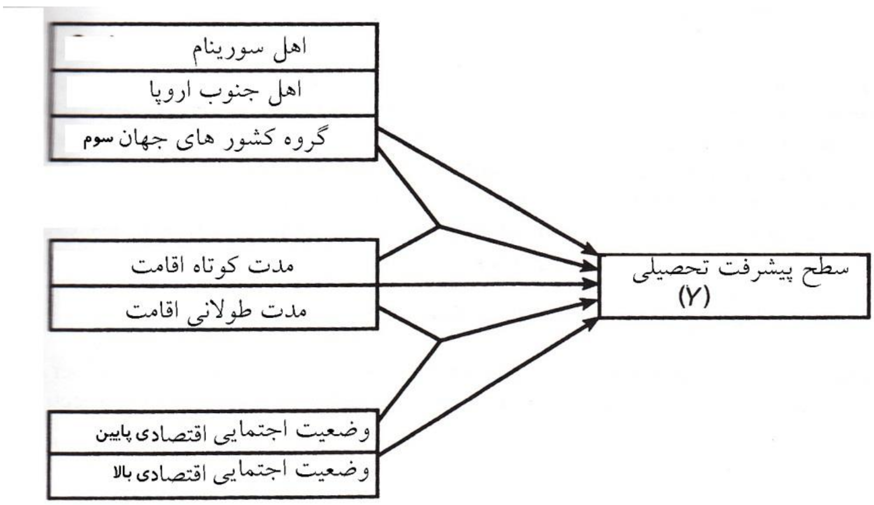
1. M. J. De Jong

طرح ۱۳-۱-۳

مسأله تحقیق این است که میانگین سطح پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان خارجی ۱۵ ساله در سه گروه ملیتی، دو گروه مدت اقامت، و دو گروه وضعیت اجتماعی- اقتصادی با یکدیگر تفاوت معناداری دارد. از این گذشته ترکیب این گروه‌ها با یکدیگر تبیین بیشتری را فراهم می‌کند:

- مسأله تحقیق یک مسأله وابستگی است. متغیر وابسته(Y) سطح پیشرفت تحصیلی است. متغیر مستقل را ملیت، مدت اقامت و وضعیت اجتماعی- اقتصادی تشکیل می‌دهند.
- تعداد متغیرهای وابسته محدود به یک مورد است. از این رو از طرح‌های مربوط به متغیرهای وابسته‌ی بیشتر چشم پوشی می‌شود.
- متغیر وابسته در یک سطح سنجش فاصله‌ای اندازه‌گیری شده است.
- متغیرهای مستقل، مقیاس‌های اندازه‌گیری اسمی هستند. ملیت سه بخشی است. مدت اقامت و وضعیت اجتماعی -اقتصادی دو بخشی هستند. این بخش‌ها معرف گروه‌ها هستند. بنابراین با یک طرح سه طرفه[1] سر و کار داریم، زیرا سه متغیر مستقل داریم. ما یک طرح سه طرفه ۲×۲×۳ داریم، زیرا متغیرهای مستقل شامل یک متغیر سه بخشی و دو متغیر دو بخشی می‌شوند.
- اثرات تعاملی در مسأله تحقیق پیش‌بینی شده‌اند.

نتیجه‌گیری: یک طرح سه طرفه ۲×۲×۳ تحلیل واریانس.



1. three-way
2. Johannes Siegrist & Klaus Dittman

۱۴-۱-۳ خستگی ذهنی بیماران دچار حملات قلبی

محققان، جوهانز سیگرسیت و کلاز دیتمن[۲] از تحقیقات جامعه‌شناسی پزشکی در رابطه با سبب‌شناسی حملات قلبی ناخشنود بودند. تحقیقاتی که با متغیرهای بدون انعطافی مثل طبقه اجتماعی، انزوای اجتماعی و بسیج اجتماعی سر وکار دارند، متأسفانه سهم کمی در دانش ما نسبت به تکوین بیماری دارند. متغیرهای اساسی مثل به هم ریختن ذهنی، راحتی در برخورد با موقعیت های بحرانی، حمایت اجتماعی و آسیب‌پذیری، در بسیاری از مطالعات نادیده گرفته می‌شوند و به تعامل بین مشکلات مزمن و تعارض در محیط‌های خصوصی و شغلی از یک سو و تغییرات نسبتاً حاد از سوی دیگر، در عبارات مفهومی و همچنین عملیاتی بهای کافی داده نمی‌شود.

این محققان مطالعه‌ای را طرح کردند که در آن این اندازه‌های خستگی ذهنی به‌حساب آید. آن‌ها ۱۹۰ مرد آلمانی زبان را که شاغل بودند و بین ۳۰ تا ۵۵ سال سن داشتند در دو گروه سازمان دادند. یکی از این گروه‌ها متشکل از نمونه‌ای تصادفی از بیماران حمله قلبی بودند (کسانی‌که یک حمله را پشت سر گذاشته بودند) و گروه دیگرمتشکل از افرادی بود که از لحاظ سیستم گردش خون مشکلی نداشتند. اطلاعاتی در زمینه ارزشمندی بعضی پدیده‌ها از نظر فرد در طول زندگی شخصی او از قبیل، سابقه سایر بیماری‌ها، تصادفات، قربانی سرقت، مرگ نزدیکان، از دست دادن شغل، تغییرات مهم در محیط کار، جابجایی، شکست‌های مالی، قطع روابط خصوصی، تعارضات حاد در خانواده یا حلقه دوستان صمیمی جمع‌آوری شد. بین موارد مربوط به خود شخص و آن هایی که به اعضای خانواده و دوستان مربوط می‌شد، تمایز قائل شدند تا نقطه تمرکز خود و غیرخود از یکدیگر تفکیک و کنترل گردد. مقاطع زمانی اتفاق افتادن پدیده‌ها نیز دقیقاً ثبت شد.

هر چند داده‌های مربوط به خستگی (مقدار وقایع ناگوار، ویژگی وقایع ناگوار، توزیع در زمان و خستگی ذهنی) در حقیقت مقدم بر بروز بیماری بودند، امّا هرگز به عنوان متغیرهای وابسته‌ای که در گذشته به دست آمده‌اند، مورد توجه قرار نگرفته بودند. محققان به بررسی این موضوع پرداختند که آیا تفاوت معناداری بین میانگین خستگی ذهنی دو گروه با کنترل جایگاه خود در برابر موارد دیگر وجود دارد یا نه.

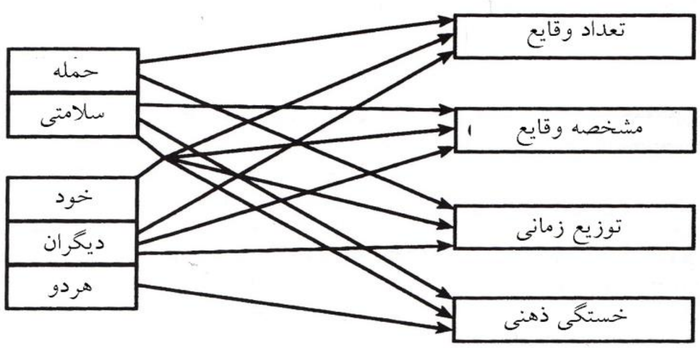
طرح ۱۴-۱-۳

مسأله تحقیق این است که با کنترل جایگاه خود و غیر خود، تفاوت معناداری بین بیماران دارای سابقه حمله قلبی و گروه اشخاص بدون مشکلات گردش خون وجود خواهد داشت، البته با در نظر گرفتن تعداد وقایع ناگوار، ویژگی وقایع ناگوار، توزیع در زمان و خستگی ذهنی (فشار بیماران مبتلا به حمله قلبی ، وقایع تا حدی ناگوار، ناگوارتر و بسیار ناگوار و شدید، به فاصله کوتاهی از حمله قلبی و یک خستگی ذهنی زیادتر):

- مسأله تحقیق وابسته است. بین متغیرهای مستقل و وابسته تمایزی برقرار شده است.

- چندین متغیر وابسته با سطح سنجش فاصله‌ای وجود دارد: تعداد و ویژگی وقایع ناگوار، توزیع زمانی و خستگی ذهنی (به دست آمده در گذشته!).
- متغیر مستقل دو بخشی، از دو گروه تشکیل شده است: بیماران دچار حمله قلبی و اشخاص سالم. طرح، نیمه آزمایشی است. تذکر: مشکل آن است که محققان به ناچار خود را به بیمارانی که دچار حمله قلبی شده بودند محدود کرده بودندکه این می‌تواند نتایج را دچار سوگیری کند.
- متغیر کنترلی براساس تمایز دو گروه اشخاصی شکل گرفته است که در یک گروه، حوادث برای خود شان اتفاق افتاده، و در گروه دیگر برای خانواده یا دوستان شان اتفاقی افتاده بود. افرادی‌که با هر دو نوع حادثه روبه رو شده بودند، گروه سوم را تشکیل می‌دادند. بنابراین متغیر کنترلی یک متغیر سه بخشی است. اثرات تعاملی هم امکان‌پذیر است.

نتیجه‌گیری: یک طرح (نیمه‌آزمایشی) تحلیل واریانس چندگانه (مانوا).



۲-۳ نظریه وابستگی: دستکاری‌های محققان

با نظریه وابستگی شروع می‌کنیم که یک نظریه علّی در علم سیاست بین‌الملل است. نشان خواهیم داد که چگونه محقق چندین دستکاری را در عمل به اجرا در می‌آورد. ما این عقیده که «تنها و تنها یک شیوهی تحلیل چند متغیری برای یک مسأله تحقیق مناسب است» را رد می‌کنیم. در واقع انتخاب یک شیوه مناسب تحلیل، یک امر نسبی است.

در ابتدا فهرستی از ایده‌های مرتبط با نظریه وابستگی را ارائه می‌کنیم.

دانشمندان توجه خود را معطوف به این سؤال کرده‌اندکه عوامل مؤثر بر رشد اقتصادی کشورها کدامند. در دهه‌های ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ تأکید بر رویکرد غیراقتصادی بود: نظریه وابستگی آندره گاندرفرانک[1]. این تئوری می‌گوید علل عدم پیشرفت کشورهای جهان سوم در ویژگی‌های خاص آن‌ها نیست، بلکه ناشی از ساختار سیستم اقتصاد جهانی است، مثلاً در اختلاف بین‌المللی نیروی کار.

1. Andre Gunder Fran   2. Hettene   3. Bodenheimer

رویکرد وابســـتگی، مفاهیم مختلف زیادی را شـــامل می‌شـــود، از قبیل، کل‌گرایی در برابر جزء گرایی، تأکید بر عوامل خارجی در برابر عوامل داخلی، تحلیل ســـیاســـی- اجتماعی در برابر تحلیل اقتصادی، تضاد ناحیه‌ای یا منطقه‌ای در مقابل تضاد طبقاتی، پیشرفت در مقابل عدم پیشرفت، آزادی بی‌قید و شـــرط در برابر جبرگرایی (رجوع کنید به هتن[2]،۱۹۸۲). به هر حال اگر خود را در ابتدا به جنبه‌های اقتصادی محدود کنیم، هنوز ریشه‌ی مشترک ویژه‌ای را می‌توانیم تشخیص دهیم.

یک تمایز بین کشورهایی که حکم مراکز یا ابر شهرها را دارند از یک‌سو و کشورهای پیرامونی یا اقماری از سوی دیگر قائل شده‌اند. بین هر دو نوع کشورها با نظام‌های دوگانه، روابط وابستگی وجود دارد نه وابستگی درونی. «وابستگی» چنین بیان شده است: « شرایطی که در آن اقتصاد یک گروه معین از کشورها وابسته به رشد و توسعه‌ی یک اقتصاد دیگر است، که اقتصاد خودی تابع آن است ...که این حالت ســاختار خاصــی از اقتصــادجهانی را شــکل می‌دهد طوری‌که باعث می‌شــود بعضــی کشــورها، تعیین کننده ســایرین باشــند و امکانات توســعه را برای اقتصــادهای تابعه محدود کنند» (بودنهایمر[3]، ۱۹۷۳).

این وابستگی منجر به عدم توسعه کشورهای تابعه می‌شود، زیرا کشورهای محوری قادرند ارزش افزوده را از آن‌ها بگیرند و به خود اختصاص دهند. بنابراین توسعه یافتگی و عدم توسعه دو روی یک سکه‌اند، که یکی بدون دیگری وجود نخواهد داشت.

توصــیه عملی بســیاری از نظریه پردازان وابســتگی به کشــورهای جهان ســوم درباره ســیاســت اقتصادی شامل کناره‌گیری از سیستم اقتصاد جهانی با قطع روابط اقتصادی با کشورهای محوری بوده است، به نحوی که روابط وابستگی شکسته شود.

عمومی‌ترین فرضیه‌ای که از نظریه وابستگی می‌توان استنتاج نمود آن است که افزایش وابستگی باعث رشد نایافتگی می شود، به عبارت دیگر میزان وابستگی در جهان سوم بر سطح پیشرفت تأثیر منفی دارد.

گریستوفر چیس- دان[1] (۱۹۷۵) بین سه مکانیزمی که این رابطه علّی را روشن‌تر می‌کنند تمایز قائل می‌شود. (۱) استثمار کشورهای محور از طریق مبادلات نابرابر، سود بازگشت سرمایه و اعتبارات به کشورهای محور نمود پیدا نمی‌کند. این استثمار منجر به فروکش کردن منابع بسیاری می‌گردد که برای توسعه ضروری هستند. (۲) به کمک اعتبارات خارجی امکان تأمین هزینه‌های زیربنایی لازم برای توسعه میسر می‌گردد. (۳) یک انتقال فن‌آوری، عادات جدید کار، اشکال سازمان‌دهی منطقی جدید و مفاهیم جدیدی برای توسعه اقتصادی ضروری هستند وجود دارد که از کشورهای محوری به کشورهای تابعه انتقال می‌یابد.

---

1. Christopher Chase-Dunn
2. Hout

۳-۲-۱ یک تحلیل علّی

با استفاده از داده‌های تجربی کشورها می‌توان فرضیه‌های زیادی را در زمینه آزمون نظریه همبستگی بنا نهاد. هاوت[۲] (۱۹۸۴) در تز دکترای خود سعی کرد این نظریه را در نه فرضیه اساسی خلاصه کند. چهار مورد از این زمینه ها را در اینجا بازگو می‌کنیم:

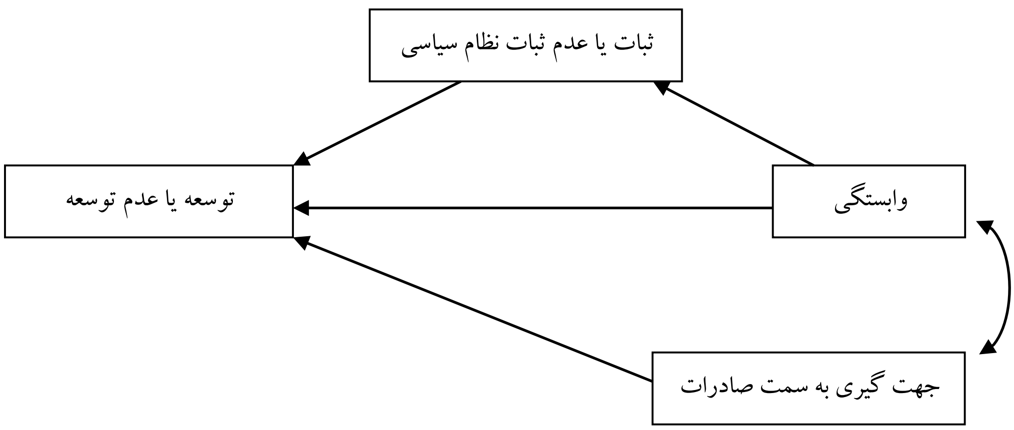
۱- همچنان‌که وابستگی کشورهای اقماری به کشورهای صنعتی افزایش می‌یابد، کشورهای اقماری به طور فزاینده‌ای توسعه نایافته می‌مانند.

۲- همچنان‌که وابستگی کشورهای اقماری افزایش می‌یابد ثبات نظام سیاسی آن‌ها افزایش می‌یابد.

۳- ثبات نظام سیاسی بر توسعه، تأثیر منفی دارد.

۴-وقتی که کشورهای اقماری جهت‌گیری بیشتری به سمت صادرات پیدا می‌کنند، رشد اقتصاد ملّی بیشتر دچار عدم تعادل می‌شود.

این چهار فرضیه را می‌توان در یک مدل علّی به هم ربط داد که با استفاده از تحلیل مسیر (یا لیزرال) آزموده می‌شوند:



۳-۲-۲ مدل‌های اندازه‌گیری

مفاهیم اساسی به کار رفته در نظریه وابستگی یعنی «میزان وابستگی» و «درجه رشد یافتگی» بسیار پیچیده هستند. مثلاً مؤلفان بسیاری ابعاد مختلفی از مفهوم وابستگی را نشان داده‌اند: وابستگی به سرمایه و تجارب خارجی (کافمن، کرفوتسکی، جیلر)، وابستگی به وام ها و سرمایه‌ها (چیس- دوان)، وابستگی به قدرت اقتصادی و بازارها(مک گوان،ا سمیت)؛ وابستگی مالی- فنی و فرهنگی (دوان و دیگران).

با بکار بردن تحلیل عوامل می‌توان بررســی کرد که تا چه حد ابعاد نظری تشــخیص داده شــده توسط این مؤلفان به طور تجربی مورد تأیید قرار می‌گیرد. برای این منظور شاخص‌های زیادی را باید تدارک دید. هات، داده‌های زیر را جمع‌آوری کرد:

۱- صادرات به عنوان درصدی از تولید ناخالص ملی (GNP)،
۲- صادرات تخصص با توجه به کالاها،
۳- واردات به عنوان درصدی از تولید ناخالص ملّی (GNP)،
۴- قرض های خارجی از دولت،
۵- کل سرمایه‌گذاری‌های مستقیم خارجی،
۶- سرمایه‌گذاری مستقیم خارجی در صنعت،
۷- سرمایه‌گذاری مستقیم خارجی در بخش معدن و نفت،
۸- سرمایه‌گذاری مستقیم خارجی در بخش کشاورزی،
۹- کل سرمایه‌گذاری‌های ثابت توسط مؤسسات چند ملیتی،
۱۰-اختراعات ثبت شده در خارج.

یک تحلیل عاملهای اصــلی با چرخش مایل به راه حل دو عاملی منجر شــد که یکی از ابعاد آن وابستگی مالی، سرمایه‌ای و تکنولوژیکی (بارهای بالا در شاخص‌های ۴ تا ۱۰)، و بعد دوم وابستگی به تجارب بود (شاخص‌های ۱ تا ۳).

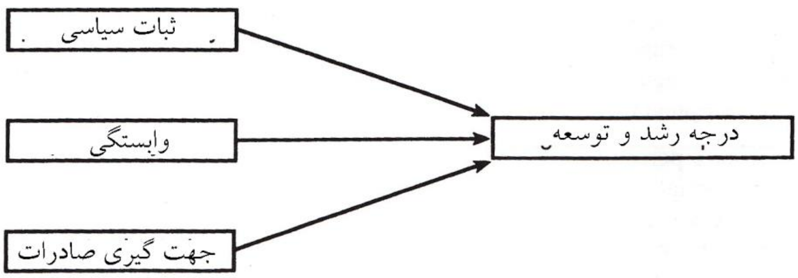
به همین ترتیب، چندین شــاخص برای مفهوم «درجه پیشــرفت» می‌توان تدارک دید. هرچند مفهوم توســعه معمولاً با اســتفاده از داده‌های مربوط به «تولید ناخالص ملی» یا ســرانه تولید ناخالص ملی محاسبه می‌شود، اما در دهه‌های اخیر تردیدهایی به وجود آمده است، زیرا این مفهوم چندوجهی است. شاخص‌های دیگری که ذکر شده‌اند عبارتند از: سرانه مصرف انرژی، سطح سواد، سطح سرمایه ناخالص داخلی، سهم کالاهای سرمایه‌ای، تعداد افراد ۱۵ سال به بالای در حال تحصیل، تعداد افراد ۱۵ سال به بالای در حال آموزش حرفه‌ای، سرانه مصرف کالری، امید به زندگی و حمایت‌های پزشکی که برا ساس تعداد تخت‌های بیمار ستانی موجود برای هر ۱۰۰۰ نفر افراد ساکن سنجیده می شود. تحلیل اجزاء ا صلی این شاخص‌ها منجر به یک راه حل تک بعدی گردیده ا ست، به طوری‌که مفهوم «توسعه» را می‌توان تک بعدی در نظر گرفت.

۳-۲-۳ تحلیل علّی بدون مراحل تسلسلی

اگر فرض کنیم که مفاهیم اصــلی نظریه علّی به دقت اندازه‌گیری شــده‌اند و هر بعد به وســیله یک متغیر جداگانه بیان شده باشد، آنگاه می‌توان یک تحلیل علّی را به وسیله شیوه تحلیل مسیر، صورت داد. وقتی‌که چندین شاخص در مدل از قبل پیش‌بینی شده با شند، مفاهیم «وابستگی» و «تو سعه»

را می‌توان به عنوان متغیرهای مکنون در نظر گرفت، آنگاه مدل علّی پیچیده‌تر شـــده و نیازمند بکار گرفتن شیوه ی پیشرفته‌تری مثل لیزرل خواهد بود.

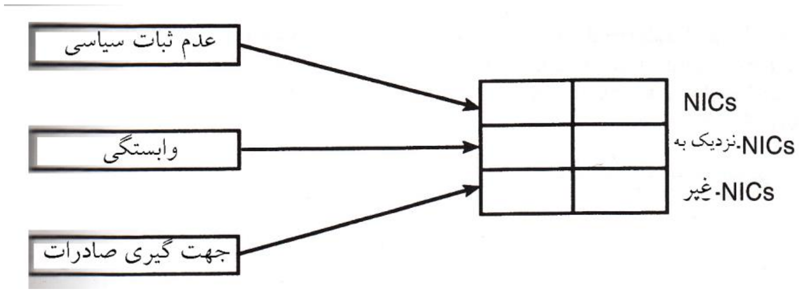
از ســـوی دیگر یک محقق می‌تواند همچنین تصـــمیم بگیرد که یک تحلیل مکانیزم‌های علّی، بســـیار پیچیده اســـت و کار خود را به تحلیل عواملی که بر «درجه رشـــد و توســـعه» اثر می‌گذارند، محدود کند: وابستگی (یا دو بعد وابستگی)، ثبات سیاسی و جهت‌گیری به سمت صادرات. این به یک تحلیل رگرسیون چندگانه منتهی می شود که روابط علّی بین متغیرهای مستقل در آن مورد بررسی قرار نمی‌گیرند:



۴-۲-۳ درجه رشد به عنوان یک متغیر سه بخشی

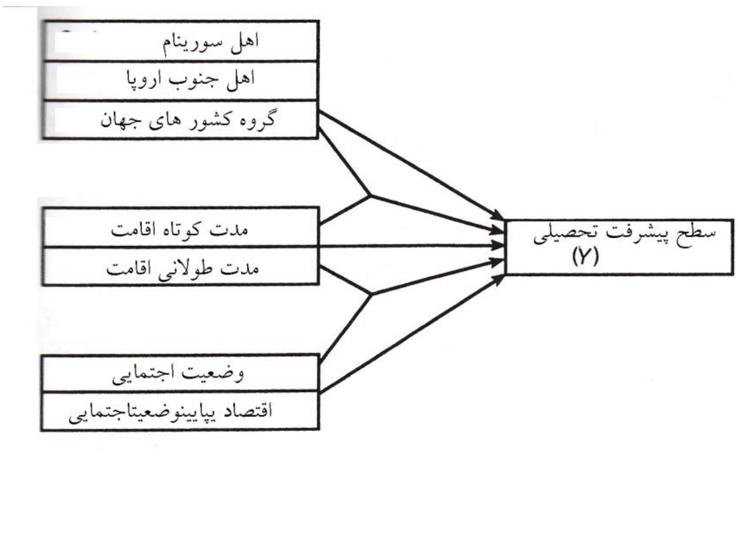
به جای اندازه‌گیری متغیر وابسته «درجه رشد و توسعه» در سطح سنجش فاصله‌ای، محقق می‌تواند روش زیر را نیز اعمال کند. چنین نیســـت که کشـــورهای جهان ســـوّم همگی از یک گروه متجانس باشند. این موضوع از روی پدیده NICs (کشورهای تازه درحال صنعتی شدن/ صنعتی) نشان داده می‌شود. NICs کشورهایی هستند که می‌توان آن‌ها را به عنوان بخش رو به افزایش از تولید جهانی در بخش صنعت بحساب آورد. نمونه‌ای از آن‌ها کشورهای برزیل، مکزیک،کره و تایوان هستند. مقوله نزدیک به NICs به وسیله کشورهای شیلی، اندونزی، مورو، پرو، تونس و اروگوئه نشان داده می‌شود.

اگر نظریه وابستگی درست باشد این کشورهای NICs و نزدیک به NICs خود را از سیستم جهانی مجزا می‌کنند، مثلاً کمتر وابسته می‌شوند. برای آزمون ارزش این رویکرد می‌توان بررسی کرد که آیا تفاوت معناداری بین میانگین‌های متغیرها (وابستگی و غیره) در سه گروه کشورهای NICs ، نزدیک به NICs و کشـــورهای کمتر توســـعه یافته وجود دارد یا نه. این شـــامل یک تحلیل چندگانه خواهد بود:



۵-۲-۳ درجه رشد و توسعه به شکل «کم» و «زیاد»

به جای متغیر وابستگی، محقق همچنین می‌تواند متغیر وابسته را به شکل دوبخشی یا سه‌بخشی جمع کند. این جمع کردن همیشه برای داده‌های سطح سنجش فاصله‌ای بدیهی نیست. به جز مواردی که دلایل نظری قابل قبولی وجود دارد، عموماً بهتر است ابعاد متنوع یک متغیر را تا حد امکان وارد تحلیل کرد، هم به لحاظ اجتناب از سوگیری نا شی از جمع کردن و هم به این منظور که اطلاعات را از دست ندهیم. اگر محقق به هر حال بر این باور است که مفهوم «وابستگی» به معنی سؤال از صورت واقعی مسأله نیست، بلکه کنابه از «وابستگی کمتر » یا «وابستگی بیشتر» است آنگاه خلاصه کردن به یک متغیر دوبخشی می‌تواند مورد توجه قرار گیرد. نظیر همین کار را می‌توان درباره متغیر سیاسی انجام داد، مثلاً در شکل سه بخشی با ثبات، نه چندان با ثبات و بی‌ثبات. زمانی‌که متغیر وابسته «توسعه» در سطح سنجش فاصله‌ای است به یک طرح تحلیل واریانس دو طرفه ۲ x ۳ منتهی می‌گردد. اگر «جهت گیری به سمت صادرات» به عنوان یک کوواریه در نظر گرفته شود که در سطح سنجش فاصله‌ای باقی مانده است یک طرح تحلیل کوواریانس را خواهیم داشت. اثرات تعاملی می‌توانند اثر وابستگی بر توسعه را به گونه متفاوتی برای درجات ثبات سیاسی نشان دهند.



۳-۲-۶ مدلی با چند متغیر وابسته

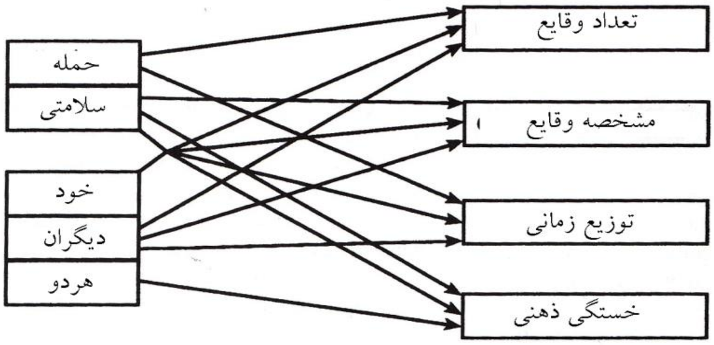
یک محقق ممکن است با بیش از یک متغیر وابسته مواجه گردد، مثلاً میزان وابستگی کشورهای تابعه به کشورهای محوری نه تنها میزان توسعه را تحت تأثیر قرار می‌دهد، بلکه رشد و توسعه را نیز دچار عدم تعادل می‌کند (یک «خرده فرهنگ» که جهت‌گیری آن به سمت تعداد کمی از محصولات تولیدی است) و از این گذشته منجر به عدم تساوی اقتصادی بیشتری در درون کشورهای تابع می‌گردد. برای این که همه این ها را در یک مدل واحد آزمایش کنیم که شامل دو گروه وابستگی و سه گروه از لحاظ وضعیت ثبات سیاسی می‌باشد یک طرح تحلیل واریانس چندگانه (مانوا) دوطرفه پدید می‌آید. چنان چه جهت‌گیری صادرات هم به عنوان کوواریه وارد کنیم. طرح مورد نظر تحلیل کوواریانس چندگانه (مانکوا) می‌باشد.

۳-۲-۷ یک مجموعه وابستگی و یک مجموعه توسعه

متغیرهای وابسته طرح تحلیل واریانس چندگانه یا تحلیل کوواریانس چندمتغیره را می‌توان به صورت یک مجموعه در نظر گرفت. و اگر متغیرهای مستقل با سطح سنجش فاصله‌ای اولیه آن‌ها را هم بتوان به عنوان یک مجموعه گرفت، آنگاه یک تحلیل همبستگی متعارف (کانونی) را می‌شود اجرا کرد (برای سطوح سنجش پایین‌تر به جای آن یک تحلیل کانالز قرار می‌گیرد). چنین تحلیل همبستگی متعارفی برای آزمون فرضیه کلّی هم می‌تواند به کار برده شود؛ مثلاً تداعی بین وابستگی و توسعه که هر دو مفهوم (مرکزی) اصلی توسط شاخص‌های چندگانه‌ای اندازه‌گیری می‌شوند و نهایتاً ممکن است به چند بعد تقسیم شوند.

نمونه‌ای از چنین الگوی مفهومی در تحقیق آلسکولر[1] (۱۹۷۶) یافت می‌شود. او مفاهیم تابعی بودن و رکود را به کار برد که به ترتیب با وابستگی و توسعه (نایافتگی) مترادفند.

1. Alschuler



آلسکولر چهار شاخص را در رابطه با مفهوم تابعی بودن در نظر گرفت:

۱- تمرکز کالاهای تجاری (ccg: صادرات سه دسته مهمترین کالاها نسبت به کل صادرات).

۲- تمرکز شریک تجاری (cbp: صادرات به بهترین شریک تجاری نسبت به کل صادرات).

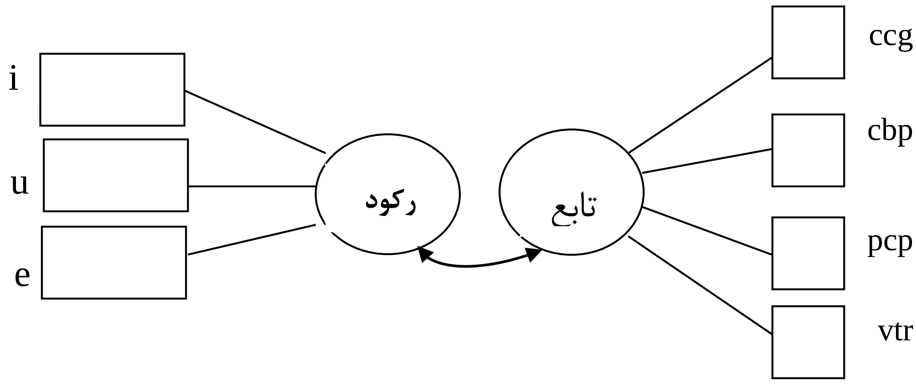
۳- تمرکز سرمایه (pcp: درآمد پرداختی به کشورهای خارجی نسبت به درآمد ملی).

۴- تجارت عمودی[vtr:(a+b+c+d)/(a+b-c-d) درحالی‌که a= ارزش واردات مواد خام، b= ارزش صادرات مواد تولیدی، c= ارزش صادرات مواد خام، d=ارزش واردات مواد تولیدی] برای مفهوم رکود سه شاخص منظور گردید:

۱- رشد درآمد(i:BNPΔ در سرمایه)؛

۲- رشد شهرنشینی(a: تغییرات رشد جمعیت در محله‌های دارای بیش از ۲۰۰۰ سکنه).

۳- رشد تعلیم و تربیت (u: تغییرات درصد جمعیت در سطوح ابتدایی و غیره).



دراین تحلیل متعارف (کانونی) بدیهی اســـت که یک تأثیر علّی "تابعی بودن" بر" رکود" فرض شود، امّا اگر به بیان دقیق کلمه، این شیوه به طور نامتقارن طرح نشده است، چنان که یک ضریب همبستگی کانونی، مقیاسی متقارن است که رابطه علّی را نشان نمی‌دهد.

بخش دوم

از روش شناسی به تحلیل

در سه فصل نخست مروری غیر تخصصی بر شیوه‌های موجود تحلیل چندمتغیره داشتیم. در فصل ۱ هشت نوع مسأله تحقیق مشخص گردید و فرمت اساسی آن‌ها توسط نمودارهایی که ترسیم کننده روابط علّت و معلولی بود ارائه گردید. در فصل ۲ یک نظام نماد سازی شخصی به کار گرفته شد تا شیوه‌های کلاسیک تحلیل چندمتغیره دسته‌بندی شود به طوری که با فرمت مربوطه همخوانی داشته باشند.

سپس به بحث پیرامون ارتباط لازم بین مسئله‌های تحقیق فصل ۱ و شیوه‌های تحلیل در فصل ۲ پرداختیم که محقق در روبرو شدن با انتخاب یک شیوه مناسب برای مسأله تحقیق خود باید این ارتباط را برقرار سازد. در فصل ۳ مسأله انتخاب مناسب با مثال‌های دیگری از تحقیقات علوم اجتماعی توضیح داده شد.

مثال‌های تحقیقاتی

در فصل‌های بعدی روی این موضوع‌ها از جنبه آماری- فنی کار شده است. برای این منظور مثال‌های فصل ۱ را مورد استفاده قرار خواهیم داد. شیوه کار به این ترتیب است. ابتدا از مثال مربوط به شوخی و مزاح به عنوان شیوه تأثیرگذاری و نفوذ اجتماعی شروع می‌کنیم. این مثالی از ساده‌ترین مسأله تحقیق است، زیرا فرمت اساسی تنها شامل دو ویژگی است: شوخی(مزاح) و امتیاز تجاری.

در پی آن، تحقیق مربوط به علل افزایش بی‌فرزندی می‌آید. ساختار مربوط اکنون دیگر به اندازه بار نخست ساده نیست، زیرا تنها یک عامل علّی وجود ندارد، بلکه چندین عامل مورد توجه قرار گرفته‌اند.تحقیق بعدی راجع به روابط بین اعتقادات مسیحیت و یهودستیزی است. این مسأله تحقیق نیز نسبت به مثال مربوط به شوخی و مزاح از سادگی کمتری برخودار است، زیرا متغیرهای دیگری آشکارا به شمای دو متغیری آن اضافه شده‌اند که به عنوان متغیرهای پیش‌بین که خارج از رابطه علّی هستند (رابطه مصنوعی) یا به عنوان متغیرهای واسطه‌ای که به تبیین ارتباطات علّی کمک می‌کنند (رابطه علّی غیر مستقیم)، محسوب می شوند. در تحقیق بعدی در باره انگیزش درونی گسترش تازه‌ای صورت گرفته است، به طوری‌که نه تنها تعداد زیادی عامل مورد توجه قرار گرفته‌اند، بلکه ترکیب تعاملات آن‌ها نیز در تبیین انگیزش درونی مد نظر قرار گرفته است. مثال تحقیقاتی مربوط به همسایگان فقیر و غنی است که از لحاظ اصولی تفاوتی با تحقیق مربوط به بی‌فرزندی ندارد. در اینجا نیز تعدادی عوامل فنی مدنظر قرار گرفته‌اند که با هم تبیینی از فقر را در برابر ثروتمندی ارائه می‌کنند. چیزی‌که در اینجا تازگی دارد متغیر وابسته‌ای است که به عنوان دسته‌هایی از تعدادی گروه‌ها، مورد توجه قرار گرفته است. به این معنی که متغیر وابسته در سطح سنجش پایین‌تری قرار دارد.

در سه مثال آخر به سراغ ایده علیّت می‌رویم. در این راستا با تحقیق ساختار مکنون روابط بین متغیرها در درون یک مجموعه سروکار خواهیم داشت. چنان که در سازگاری زنا شویی و

ســـبک های تزیین اتاق نشـــیمن وجود دارد. یا ســـاختار مکنون بین چند مجموعه را مد نظر قرار می‌دهیم مانند آنچه در تحقیق رابطه بین عدم تساوی اقتصادی و عدم ثبات سیاسی بررسی شد.

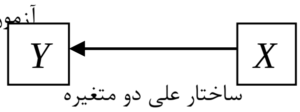
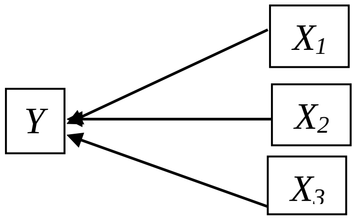
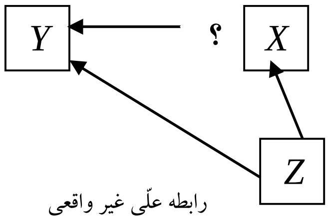
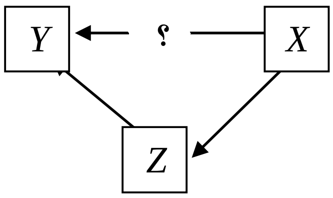
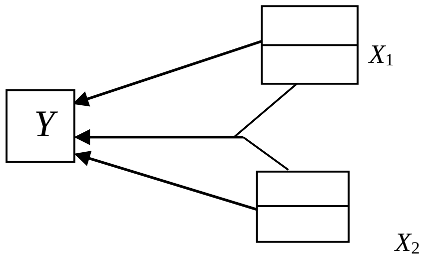
شیوه‌های تحلیل

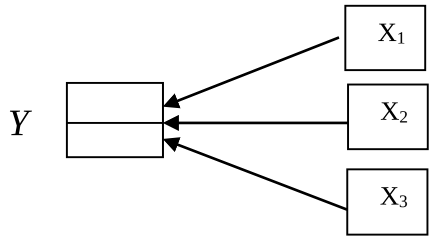
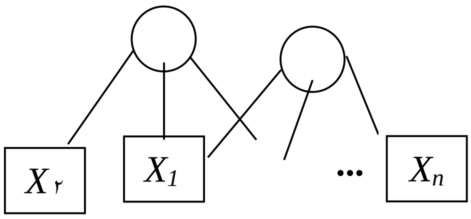
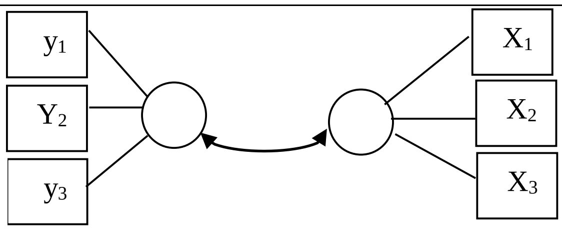
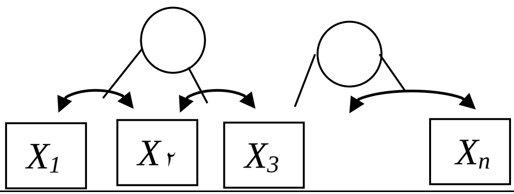
برای هر کدام از این مثال‌ها شیوه تحلیل مناسبی وجود دارد. شیوه مناسب برای مثال شوخی و مزاح، طرح آزمایشی کلاسیک با یک آزمون ساده t یا آزمون دیگری پیرامون تداعی بین دو متغیراست، بستگی به سطح سنجش متغیرها دارد. گسترش متغیرها در تحقیق مربوط به بی‌فرزندی به چندین متغیر مستقل ما را به سمت تحلیل رگرسیون چندگانه سوق می‌دهد. اگر گستردگی متغیرها همراه با افزودن تعداد متغیرهای کنترلی باشد، مثل تحقیق مربوط به یهودستیزی، شیوه مناسب برای تحلیل، همبستگی تفکیکی است. در تحقیق مربوط به انگیزش درونی اثرات تعاملی مورد توجه است، لذا روش مناسب، تحلیل واریانس یا کوواریانس می باشد. از طریق تحلیل رگرسیون هم این کار میسر است، چون این تحلیل را هم بدست می‌دهد. تحقیق مربوط به تمایز بین همسایگان (شهروندان) فقیر و غنی با شیوه تحلیل افتراقی اجرا شده است. این شیوه به وسیله تحلیل رگرسیون چندگانه که متغیر وابسته در آن به صورت دو بخشی وارد می‌شود نیز قابل اجراست.

ساختار مکنون سازگاری زناشویی به وسیله شیوه تحلیل عوامل مورد تحقیق قرار گرفته است. از آنجا که تحلیل عوامل، منحصربه یک روش نیست، بلکه تحلیل‌های متعددی دارد و بسیار گسترده است، می‌توان از دنیای گسترده شیوه‌های تحلیل عاملی صحبت کرد. این را در فصول آینده دقیقاً شرح خواهیم داد.

در مواردی که جستجو برای یک ساختار مکنون با داده های مشابه آغاز می‌شود، همچون تحقیق مربوط به «سبک‌های تزیین اتاق نشیمن»، شیوه مناسب، مقیاس‌بندی چند بعدی است. در اینجا نیز می‌توان از دنیایی گسترده سخن گفت. در تحقیق از ساختار مکنون روابط بین دو یا چند مجموعه از عامل ها مثل یک مجموعه عوامل عدم تساوی اقتصادی و یک مجموعه ویژگی های عدم ثبات سیاسی، یک تحلیل همبستگی متعارف (کانونی) را اجرا می‌کنیم.

این نتایج به طور خلاصه، در طرح شماتیک زیر آمده است:

مثال تحقیقی	فرمت اساسی	شیوه تحلیل
مزاح و امتیاز تجاری	 ساختار علی دو متغیره	آزمون تداعی بین دو متغیر
علل بی فرزندی	 ساختار علی همگرا	تحلیل رگرسیون چندگانه
اعتقادات مسیحیت و یهودستیزی	 رابطه علّی غیر واقعی  رابطه علّی غیر مستقیم	تحلیل همبستگی تفکیکی
پاداش‌های خارجی و انگیزش	 ساختار تعاملی	تحلیل واریانس و کووایانس

مثال تحقیقی	فرمت اساسی	شیوه تحلیل
همسایگان فقیر و غنی	 ساختار افتراقی	تحلیل افتراقی دو گروهی
سازگاری زناشویی	 ساختار مکنون	تحلیل عوامل
عدم تساوی اقتصادی و عدم ثبات سیاسی	 ساختار کانونی(متعارف)	تحلیل همبستگی کانونی (متعارف)
سبک‌های تزیین اتاق نشیمن		تحلیل مقیاس بندی چند بعدی ساختار مکنون تشابهات

مجموعه‌های کوچک داده‌ها

در فصل‌های آینده شیوه‌های تحلیل چند متغیره با دست محاسبه می شوند و مجموعه‌های کوچک داده‌ها بکار برده می‌شوند، مثلاً مجموعه‌ای از هشت واحد و سه متغیر به کار می‌رود تا خواننده بتواند هر مرحله از محاسبات را بازبینی کند.

روش کار به این ترتیب است: عناوین اصلی سؤال تحقیق را به اختصار توضیح می‌دهیم و با فرض این که متغیرها به خوبی شکل عملیاتی به خود گرفته و شیوه مناسب برگزیده شده است، ماتریس داده‌ها را (به شکل خلاصه و دستکاری شده آن) نوشته و تحلیل کلّی را با دست انجام می‌دهیم. توجه خاص و دقیقی تغییر نتایج به دست آ»ده شده است. از آن به بعد ضرورت دارد برای شیوه مورد بحث، شرح کوتاهی از موقعیت بیان شود، امّا از مقدمه‌چینی‌ها و بحث‌های طولانی اجتناب خواهد شد. بعد از بیان توضیحات محاسباتی، نتایج به دست آمده از کامپیوتر نیز ارائه خواهد شد تا نشان دهیم که نتایج حاصل از کامپیوتر هم دقیقاً همان نتایج حاصل از محاسبات دستی هستند. از این طریق ما درصدد هستیم که استفاده گسترده و غیرضروری از کامپیوتر را منع کنیم.

دانش ریاضی مورد نیاز

دانش ریاضی مورد نیاز برای خواندن موفقیت‌آمیز بخش دوم کتاب، خیلی محدود است. در واقع، داشتن آگاهی درحد جبر دوره دبیرستان و آمار مقدماتی و ابتدایی توصیفی و استنباطی سال‌های اول هر دانشگاهی برای این منظور کفایت می‌کند. در بخش ضمیمه خلاصه‌ای از سرفصل‌های مهم مفاهیم آورده شده است. برای توضیحات بیشتر به کتاب وان رایج (۱۹۶۸)، هیز (۱۹۷۲)، بلالاک (۱۹۶۰) و گرین (۱۹۷۶ و۱۹۷۸) مراجعه کنید.

جبر ماتریسی

هر جا که جبر ماتریسی مد نظر باشد، ما فرض را بر این می‌گذاریم که خواننده در این زمینه دانش قبلی ندارد. بنابراین، ساده‌ترین شیوه‌ها- رگرسیون چندگانه، تحلیل واریانس، عناصر خاصی از تحلیل افتراقی دوگروهی- به سبک معمول جبری ارائه می‌گردند.برای شیوه‌های تحلیلی پیچیده‌تر - تحلیل واریانس چند متغیره، تحلیل افتراقی چندگانه، تحلیل همبستگی متعارف (کانونی) و غیره- می‌توان این توضیحات جبری را اساس کار قرار داد. حجم صحفات کتاب هم خواه ناخواه افزایش خواهدیافت. توضیحات مربوط به ماتریس‌ها، توضیحات جبری فشرده‌ای خواهد بود. به این خاطر در قسمت ضمیمه مربوط به دستورالعمل‌های ماتریسی، نحوه تعیین ارزش ساختاری هر ماتریس را بیان می‌کنیم. برای فهم بیشتر مطالب، مطالعه کتاب گرین (۱۹۷۶) توصیه می‌گردد.

البته در این باره ما همواره با این سؤال مواجه بوده‌ایم که ضرورت بیان ماتریس‌های جبری چیست. جواب ساده این است که ضرورتی وجود ندارد. این روش چیزی اضافه بر رویکرد جبری معمول ندارد. مزیت آن در فشردگی و قابلیت انجام محاسبات به صورت دستی است. لذا حجم کمتری از کتاب را اشغال می‌کند. به طور مشخص: یک ماتریس متشکل از ۵۰ سطر و ۵۰ ستون است و به صورت اختصار با یک حرف برجسته **X** نشان داده می‌شود، همین و بس.

از این طریق ما امیدواریم این برداشـــت را که ماتریس جبری ظرفیتی بیش از آنچه به طور معمول می‌توان انجام داد دارد و نیز این که کامپیوتر ما را قادر به انجام بیش از آنچه به وسیله دست می‌توان انجام داد، می نماید، درهم شکنیم.

فصل ۴

طرح آزمایشی: تأثیر شوخی و مزاح بر امتیاز تجاری

۱-۴ آزمایش معیار

در تحقیق بررســـی اثر شـــوخی بر امتیاز تجاری طی مذاکرات، محققان یک طرح تجربی را به کار گرفتند. در آن آزمایش اســـتاندارد به بیان دقیق‌تر، دو متغیر در تحلیل‌ها درگیر بودند: اســـتفاده از شوخی (X) و امتیاز تجاری (Y). عامل علّی X در اینجا دو بخشی است، شامل: شرایط وجود شوخی و شرایط عدم شوخی. عامل تأثیرپذیر Y در سطح سنجش کمّی است که به عنوان میزان دلار واگذار شده از طریق شوخی، در مقایسه با حداکثر دلاری که می‌توانست واگذار شود، سنجیده شد. نمرات این امتیاز نسبی از ۰ تا ۱ متغیر بود.

ایده در یک طرح آزمایشی این است که آیا X علت Y است و اگر همه علل دیگر Y، ثابت نگه داشته شوند آنگاه تغییری که با دستکاری X صورت می‌گیرد (جک گفتن درباره قورباغه دست‌آموز) باید با تغییر معناداری در Y (امتیاز نسبی) همراه باشد. این تغییر در Y باید حتماً بعد از دستکاری X صـــورت گیرد نه قبل از آن. بنابراین دو گروه وجود دارد: یک گروه تجربی که در آن X دســـتکاری می شود و یک گروه کنترل که در آن دستکاری‌ای صورت نمی‌گیرد. برای این که مطمئن با شیم دو گروه قبل از اعمال X ، از لحاظ Y تفاوتی ندارند، باید Y از لحاظ تمام علل ممکن دیگر یکســـان باشند. این همسان سازی از طریق انتخاب تصادفی و یا همتا سازی، عملی می‌گردد. با یک بررسی مقدماتی روی Y این کار قابل کنترل اســـت. پس از دســـتکاری X تغییر در Y فقط باید در گروه آزمایشی اتفاق بیفتد و در گروه کنترل تغییری رخ ندهد.

۲-۴ نشانگان oxo

به تقلید از کوک و کامبل[1] (۱۹۷۹) نشانه OXO برای آزمایش استاندارد به کار گرفته شد. R برای نشـان دادن انتخاب تصـادفی اسـت، یعنی افراد کاملاً به طور تصـادفی به گروه‌های آزمایش و کنترل تخصیص داده می شوند. M برای همتا سازی است، یعنی دو گروه *از قبل* از لحاظ عامل‌هایی که باید همسان‌سازی شوند کنترل شوند. O نشانه مشاهده Y و O_i نشانه i اُمین مشاهده است.

طرح به دست آمده به شکل زیرا ست که ردیف بالا نشانه گروه آزمایشی و ردیف پایین نشانه گروه کنترل است و در آن توالی زمانی طرح، از چپ به راست در نظر گرفته شده است.

R/M	O_1	X	O_2

1. Cook & Campell

R/M	$O_{1'}$	$O_{2'}$

۴-۳ تحلیل چند متغیری تلویحی (ناآشکار)

طرح فوق روشن می‌سازد که چرا آزمایش استاندارد فقط با یک تحلیل دو متغیره سر وکار دارد و چرا یک تحلیل آشـــکارچند متغیری به کار نرفته اســـت. عواملی که از لحاظ آن‌ها دو گروه نباید تفاوت معناداری قبل از دخالت X داشته باشند تنها به طور تلویحی حضور دارند. این مطلب در ایده انتخاب تصادفی و همتاسازی بیان شده است.

در شیوه انتخاب تصادفی کسی حتی نمی‌داند همتاسازی در مورد چه عامل‌هایی صورت گرفته ا ست. تنها، عامل شانس تعیین کننده ورود به گروه‌ها ست و این اطمینان حا صل می شودکه تفاوت بین دو گروه در تمام عامل‌های ممکن فقط ناشی از تصادف است.

در عمل همتاسازی، میزان معینی از ناآشکار بودن از بین رفته است. برای همتاسازی عامل سن، طرح آزمایشی طوری پیش برده می‌شودکه حضور فرد ۱۸ ساله‌ای در گروه آزمایشی با حضور فرد ۱۸ ساله دیگری در گروه کنترل همراه باشد و الی آخر(همتاسازی دقیق). اگرچه هدف، همین همتاسازی دقیق ا ست، اما همواره امکان آن وجود ندارد. در این صورت می‌توان رویکرد ساده‌تری را پیش گرفت تا توزیع سنی در گروه‌ها، تفاوت معناداری ندا شته با شد. همچنین می‌توان ترکیبی از همتا سازی و تخصیص تصادفی را به کار برد. امّا رویکرد هر چه با شد، نکته مهم این ا ست که عامل‌هایی که شیوه همتا سازی در صدد کنترل آنها ست آ شکارا وارد یک تحلیل چند متغیره نـشده‌اند. در ست ا ست که توزیع سنی در ابتدای آزمایش، همتاسازی شده ا ست، امّا اثر علّی سن (امتیازات بالاتر برای ا شخاص مســن‌تر در مقایســه با جوان‌ترها) مورد توجه قرار نگرفته اســت. این کار تنها تأثیر شــوخی بر امتیاز تجاری را باقی می‌گذارد.

۴-۴ بررسی مقدماتی

دو گروه باید از قبل نه تنها در متغیرهای مداخله‌گر مثل ســن و جنس، ســطح تحصــیلات و غیره با یکدیگر همسان شوند بلکه از لحاظ خود متغیر وابسته هم باید چنین باشند.

در انتخاب تصــادفی، تفاوت‌های معنادار بین دو گروه- شــامل متغیر وابســته‌ی امتیاز تجاری- جبران شــده اســت. بنابراین بررســی مقدماتی در اینجا ضــرورت ندارد، زیرا تفاوت O_1-$O_{1'}$ در طرح OXO از حد شــــانس فراتر نمی‌رود. از این رو پژوهش را می‌توان به آزمون تفاوت بین O_2 و$O_{2'}$ محدود کرد. چنان چه بین دو گروه از لحاظ آمادگی برای امتیازات تجاری از قبل تفاوتی وجود داشته با شد (O_1و$O_{1'}$)، آنگاه یک برر سی مقدماتی لازم بود تا تفاوت‌های اولیه O_1 و $O_{1'}$ با تفاوت‌های بعد از آزمایش O_2 -O_{2}' مورد مقایـسه قرار گیرد. این مقایـسه نتایج با نتایج مقدماتی همچنین زمانی که میزان تأثیر شــوخی مورد اندازه‌گیری قرار می‌گیرد، لازم اســـت. این کار از طریق تحلیل کوواریانس

اعمال خواهد شـــد. اما در این حال، در واقع ســـه متغیر در تحلیل وجد دارند: امتیاز قبل از محرک آزمایشی O_1، امتیاز بعد از محرک آزمایشی O_2 و خود محرک X .

در این فصل تنها با ساده‌ترین طرح آزمایشی بدون پژوهش مقدماتی کار خواهیم کرد.

۴-۵ همبستگی دو متغیری

شـــیوه‌های مورد اســـتفاده در ســـاده‌ترین طرح آزمایشـــی با دو متغیر ســـر وکار دارند. برای آزمون همبستگی، بسته به سطح سنجش هر یک از متغیرها روش‌های زیادی وجود دارد که دارد. اگر دو متغیر دست‌کم در سطح سنجش فاصله‌ای اندازه‌گیری شده باشند، همبستگی دو متغیری و تحلیل رگرســیون مناســب هســتند. این موضــوع را در فصــل آینده به عنوان مقدمه‌ای بر تحلیل رگرســیون چندگانه مرور می‌کنیم. اگر هر دو متغیر در ســـطح ســـنجش پایین‌تری، یعنی رتبه‌ای یا اســـمی اندازه‌گیری شده باشند، شمار زیادی مقیاس‌های سنجش همبستگی همراه با آزمون‌های معناداری مربوطه برای آن وجود دارد.

در مثال مربوط به مزاح و شوخی، متغیر وابسته Y کمّی و متغیر مستقل X دو بخشی است. این معمول‌ترین شرایط برای طرح‌های آزمایشی است. شیوه مورد استفاده در این حالت، آزمون t تفاوت میانگین‌هاست. این آزمون در ادامه به اختصار توضیح داده شده است و از طریق آن آمادگی لازم برای توضیح تحلیل افتراقی دوگروهی حاصل می‌شود.

جدول ۱-۴ ماتریس داده‌ها

X	Y
۱	۰/۶۰
۱	۰/۷۰
۱	۰/۶۰
۱	۰/۵۰
۱	۰/۶۰
۰	۰/۵۰
۰	۰/۴۰
۰	۰/۴۰
۰	۰/۳۰
۰	۰/۴۰
۰	۰/۵۰
میانگین	$\overline{Y} = ۰/۰۵$
تغییرات	$\sum(Y-\overline{Y})^{۲} = ۰/۱۴$
واریانس	$S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum(Y-\overline{Y})^{۲} = ۰/۰۱۴$

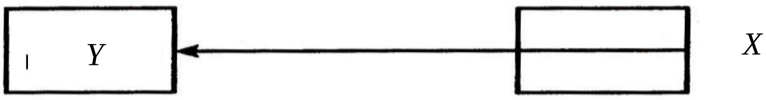
۴-۶ ماتریس داده‌ها

متغیر شوخی X دارای دو مقوله است: شرایط دربردارنده شوخی و شرایط بدون شوخی. اینها به‌ترتیب ناظر برگروه آزمایشی و گروه کنترل و کدهای۱ و هستند. امتیاز نسبی Y این است که متغیری کمی با نمرات بین ۰/۰۰ تا ۱/۰۰ است. ماتریس داده‌ها(ی فرضی) برای یک گروه آزمایشی پنج نفره و یک گروه کنترل شش نفره در جدول ۱-۴ آمده است.

اعداد کوچک در نظر گرفته شده اند تا خواننده بتواند آن‌ها را با دست بررسی کند. اندازه گروه‌ها نیز نامساوی در نظر گرفته شده است، چیزی‌که عموماً اتفاق می‌افتد.

۴-۷ نمودار علّی

نمودار علّی که با مسأله تحقیق انطباق یافته، ساختار علّی دو متغیره‌ای است که در شکل ۱-۴ نشان داده شده است. عامل علّی X دو بخشی است. عامل تأثیرپذیر Y کمّی می‌باشد.



شکل ۱-۴ طرح علّی

شـیوه مناسـب برای حالتی که متغیر وابسـته کمّی و متغیرهای مسـتقل در سـطح پایین‌تری اندازه‌گیری شده باشند، تحلیل واریانس است. در مواردی که تنها یک متغیر مستقل وجود دارد آن را تحلیل واریانس یک طرفه گویند. چنانکه این متغیر مسـتقل واحد، دارای دو مقوله باشـد، می‌توان از آزمونt اسـتفاده نمود. درنتیجه آزمون t سـاده‌ترین شـکل تحلیل واریانس،یعنی تحلیل واریانس یک طرفه با متغیر مستقل دوبخشی است.

۴-۸ آزمون t برای تفاوت میانگین‌ها

ما می‌خواهیم برر سی کنیم که آیا میانگین امتیاز تجاری در گروه آزمای شی (X=۱) به طور معناداری بالاتر از میانگین امتیاز تجاری در گروه کنترل اسـت (X=۰). برای این که منظور خود را در اینجا بهتر بیان کنیم ماتریس داده‌ها را از نو مرتب می‌کنیم.گروه‌ها را پشـت سـر هم قرار می‌دهیم، افراد را برحسـب میزان امتیازشـان مرتب می‌کنیم و برای هر نمره امتیاز، تعداد افرادی‌که آن میزان امتیاز را کسب کرده‌اند در مقابل نمره مشخص می‌کنیم. به این ترتیب دو توزیع فراوانی را مطابق جدول ۲-۴ خواهیم داشت

.

جدول ۲-۴ توزیع‌های فراوانی

امتیاز تجاری (متغیر Y)	گروه کنترل (X=0) شرایط بدون شوخی	گروه آزمایشی (X=1) شرایط شوخی
۰/۳۰	۱	–
۰/۴۰	۳	–
۰/۵۰	۲	۱
۰/۶۰	–	۳
۰/۷۰	–	۱
$\overline{Y} =$ ۰/۴۲	$\overline{Y} =$ ۰/۶۰	
$\sum(Y-\overline{Y})^{۲}$=۰/۰۲	$\sum(Y-\overline{Y})^{۲}$=۰/۰۳	
$S_y^2 =$ ۰/۰۲	$S_y^2 =$ ۰/۰۰۶	

بین میانگین‌ها تفاوت وجود دارد: ۰/۱۸=۰/۴۲-۰/۶۰. دو گروه نابرابر هستند: $n_۰$=۶ و ۵ =$n_۱$.

پراکندگی‌ها یکسـان نیسـتند: واریانس‌ها ۰/۰۰۶ و ۰/۰۰۵ می‌باشـند. برای اجرای صـحیح یک آزمون t، توزیع‌ها باید تقریباً بهنجار باشند (در حالتی که گروه‌ها کوچک باشند) و واریانس‌ها نباید به طور معناداری متفاوت باشند. برای هر دو شرایط چندین شیوه آزمون وجود دارد که به ترتیب آزمون بهنجار بودن و آزمون متجانس بودن (تجانس واریانس‌ها) هـ ستند. به فرض این که این شرایط برقرار باشد، محاسبات به صورت زیر است.

یک میانگین (معدل کل) برای دو پراکندگی محاسبه می‌شود:

$$s_w^2 = \frac{\text{واریانس گروه ۱ + واریانس گروه ۰}}{(n_0-1)+(n_1-1)} = \frac{۰/۰۳ + ۰/۰۲}{(۶-۱)+(۵-۱)} = ۰/۰۰٦$$

برای بدسـت آوردن توزیع نمونه‌کیری، تمام جفت‌هایی که به طور نظری می‌توان از یک انتخاب اسـتخراج کرد و نمونه‌های مسـتقل (با اندازه‌های $n_۱$ و $n_۰$) از یک جمعیت (مثلاً جمعیتی که در شرایط فرض H_0 تفاوت بین میانگین‌های دو نمونه کاملاً تصادفی باشد) را در نظر می‌گیریم. برای هر کدام از جفت نمونه‌های بی شـمار، تفاوت میانگین امتیاز در نظر گرفته شـد. بدین ترتیب یک توزیع نمونه‌گیری از تفاوت میانگین‌ها به دسـت می‌آوریم. واریانس چنین توزیع نمونه‌گیری برابر با مجموع واریانس‌های دو توزیع نمونه‌گیری از میانگین‌ها به طور جداگانه(یکی برای نمونه‌های با اندازه $n_۰$ و یکی برای نمونه‌های با اندازه $n_۱$) خواهد بود، بنابراین:

$$\sigma_{diff}^2 = \sigma^2 / n_o + \sigma^2 / n_1$$

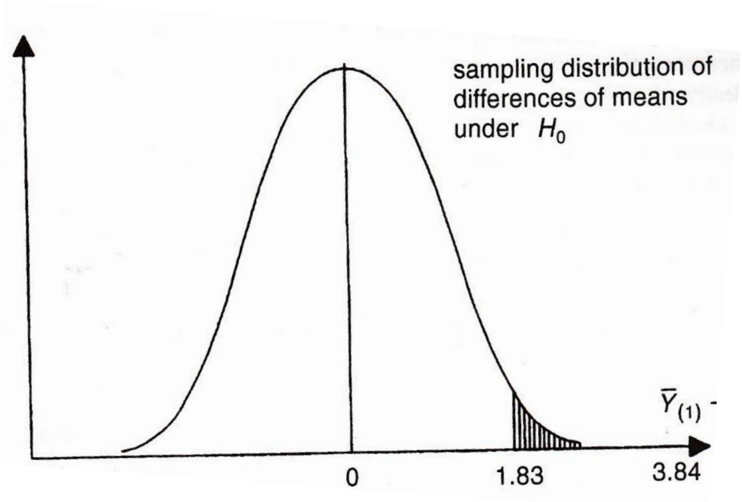
عبارت σ^{2}، یعنی واریانس نظری جمعیت، ســوای اینکه هر دو نمونه براســاس فرض صــفر (H_{0}) استخراج خواهند شد، نامعلوم است، لذا برآورد می شود. برآورد کننده در این مورد معدل کل s_{W}^{2} است که در بالا محاسبه گردید. به منظور استفاده از جدول‌ها، ما استانداردسازی را به کار می‌گیریم: میانگین توزیع نمونه‌ای تفاوت میانگین‌ها (که در شرایط H_{0} برابر صفر است) از هر یک از اختلاف میانگین‌ها کسر می‌شود و حاصل بر خطای معیار σ_{diff} (که برابر است با ریشه دوم واریانس برآورده شــده توزیع نمونه‌ای) تقســیم می‌گردد. به جای نمرات z معیار، نمرات t را به دســت می‌آوریم، زیرا توزیع نمونه‌گیری تفاوت میانگین‌ها، دارای توزیع بهنجار نیست، بلکه به شکل توزیع t است (به شکل ۲-۴ رجوع کنید). دلیل این کار آن اســـت که واریانس جمعیت باید تخمین زده شـــود، و همچنین گروه‌ها کوچک هستند و این باعث انحراف از توزیع بهنجار می شود.حال اگر نمره t را برای جفت‌های نمونه محاسبه کنیم، می‌توانیم آن را در یک توزیع نمونه‌گیری قرار داده و به یک نتیجه‌گیری برسیم.

$$t=\frac{\left|\bar{y}_{(1)}-\bar{y}_{(0)}\right|-0}{\left(\frac{s^{2}w}{n_{0}}+\frac{s^{2}w}{n_{1}}\right)^{1/2}}=\frac{|0.60-0.42|-0}{\left(\frac{0.006}{6}+\frac{0.006}{5}\right)^{1/2}}=3.84$$

در حــالــت از پــیــش فــرض شــــده خــطــای نــوع اول $\alpha=$ ۰/۰۵ و درجــه آزادی ۹=(۱-۵)+(۱-۶)= $(n_{0}-1)+(n_{1}-1)$و اســـتفاده از آزمون یک دامنه در جدول ارزش‌های بحرانی t به مقدار ۱/۸۳۳ =t^{*} برمی‌خوریم. قدر مطلق t که ما محاســـبه کردیم (یعنی ۳/۸۴ که قدری با میزان محاسبه شده به وسیله کامپیوتر ۴/۱۳ فرق دارد که ناشی از خطای گرد کردن است) بالاتر از مقدار t جدول است و بنابراین در ناحیه رد (فرض صفر) واقع شده است. بنابراین در سطح احتمال *از قبل* تعیین شده ٪۹۵ در باره عدم خطا، بین میانگین امتیاز تجاری در شرایط شوخی و غیرشوخی تفاوت معناداری وجود دارد (حتی با این گروه‌های کوچک).

توزیع نمونه گیری تفاوت

میانگین‌ها تحت فرض H_0



t برای $(\overline{Y}_{(1)} - \overline{Y}_{(0)})$

شکل ۲- ۴ منحنی توزیع t

۹- ۴ طرح آزمایشی پژوهش عملی

تحلیل آزمایشی واقعی بسیار پیچیده‌تر از تمرین ما در این فصل است. اُکوین و آرونوف[1] (۱۹۸۱) در تحقیق ا صلی بر روی اثر شوخی و مزاح، در واقع کنترل آ شکاری بر روی چندین عامل مداخله‌گر به عمل آوردند. در بحث پیرامون تحلیل همبستگی تفکیکی، چگونگی آنرا توضیح خواهیم داد. آن‌ها همچنین به جستجوی اثرات تعاملی پرداخته‌اند که در فصل تحلیل واریانس و کوواریانس به آن خواهیم پرداخت. علاوه براین، این دو، چند متغیر وابسته را در تحلیل‌های خود دخالت داده‌اند؛ مثل زمان مذاکره، خنده ی بلند و استفاده از کلمات به وسیله آزمودنی‌ها در حین آزمایش. چنین تحلیلی با چندین متغیر واب سته در ف صل مربوط به تحلیل واریانس و کوواریانس چند متغیره مورد بحث قرار می‌گیرد. درحقیقت این شیوه‌ها در طرح‌های آزمایشی به کار برده می‌شوند. بنابراین، این که فقط دو متغیر در شکل آزمایشی در تحقیق مورد تحلیل قرار می‌گیرد، نباید زیاد دقیق فرض شود. هدف این است که تنها دو ویژگی در منطق آزمایشی مورد توجه قرار گیرند و سایر عوامل کنترلی به عنوان زمینه‌ساز درنظر گرفته شوند. از لحظه‌ای که این متغیرهای زمینه‌ساز آشکارا وارد تحلیل می‌شوند، ما وارد تحلیل چند متغیری می‌شویم.

تحلیل آزمایشی همیشه از طرح OXO (مشاهده- محرک- مشاهده) مربوط به آزمایش استاندارد تبعیت نمی‌کند.گونه‌های بسیاری وجود دارد که در کتاب کوک و کامبل (۱۹۷۹) به طور مبسوط درباره آن‌ها بحث شده است. به منظور اجتناب از تداخل اثر آزمون، بررسی مقدماتی را می‌توان کنار گذاشت. برای پرهیز از رقابت جبرانی بین گروه‌ها، گروه کنترل را می‌توان کنار گذاشت یا محرک را

---
1. O’Quin & Aronoff

به گونه‌ای به گروه کنترل ارائه کرد تا رقابت جبرانی را دفع کند. مثلاً اضـــافه کردن گروه‌ها بدون تحقیق مقدماتی، امکان اندازه‌گیری اثر آزمون را فراهم می‌سازد، علاوه بر این، تحلیل‌های سری زمانی و نیز طرح‌هایی با مداخله مکرّر طرح شده‌اند که گروه کنترل در بعضی مراحل آن‌ها داخل می شود و در بعضی مراحل نمی‌شود.

از این رو نباید از آزمایش «خاص» صحبت کنیم، بلکه بهتر ا ست واژه کلی شبه آزمایش را به کار ببریم. کتاب کوک و کامبل در این مورد مرجع خوبی اســـت که این عنوان را توضـــیح داده است.

۴-۱۰ برون‌داد نرم افزار spss تحت ویندوز برای آزمون *t* استودنت

برای مثال کوچگ قبلی در باره اثر شـــوخی بر امتیاز تجاری، اینک نتایج به دســـت آمده از نرم افزار آماری spss for windows را مرور می‌کنیم. خواننده می‌تواند نتایج محاســـبات دســـتی را با نتایج حاصل از کامپیوتر مقایسه و صحت آنرا معلوم کند.

باز کردن بخش spss

پس از قرار گرفتن در محیط ویندوز با دوبار کلیک کردن بر روی آیکون (شـــمایل) spss وارد این نرم‌افزار می‌شویم. به محض ورود به این بخش، به طور خودکار قسمت ویرایشگر داده‌های آن به شکل جدول مخصوصی برای ورود داده‌ها گشوده می‌شود.

در این حالت دو کار می‌توان انجام داد.

انتخاب و بازکردن یک فایل موجود داده‌ها

اگر فایل داده‌ها از قبل موجود باشد، به صورت زیر می‌توان آن را در اختیار گرفت: ابتدا روی واژه file کلیک کنید، ســـپس روی واژه open و بعد روی واژه data. آنگاه روی علامت ▽ کلیک نموده تا نوع فایلی که داده‌ها در آن ذخیره شـــده‌اند (sys.* وsav.* .)را پیدا کنیم و با کلیک بر روی آن، فایل مورد نظر را پیدا نموده و روی آن کلیلک می‌کنیم، مثلاً humour.sys. بعد روی کلید واژه ok کلیک می‌کنیم و با در اختیار گرفتن فایل داده‌ها، می‌توانیم شیوه آماری مورد نظر را اجرا کنیم.

ایجاد یک فایل جدید داده‌ها

چنانچه فایل داده‌ها از قبل ت شکیل ن شده با شد، ابتدا باید داده‌ها را وارد کرد. برای این کار تحت نام هر متغیر که در صفحه spread sheet معین می‌شود، داده‌های مربوط به آن را یکی یکی وارد می‌کنیم و هر بار کلید Enter را فشـــار می‌دهیم. وقتی که ســـتون اول مربوط به متغیر اول تکمیل گردید با ا ستفاده از کلیدهای تغییر مکان نما مثل → و ↑ ، به خانه بالای ستون دوّم رفته و داده‌های مربوط به متغیر بعدی را به همین ترتیب وارد می‌کنیم.

سیستم به طور خودکار نام‌هایی از قبیل var00001 ، var00002 برای متغیرها در نظر می‌گیرد. چنان چه بخواهید این نام‌ها را تغییر دهید، روی نام متغییر دوبار کلیک کنید، دریچه‌ای باز می‌شود تا نام جدیدی را بدان اختصاص دهید (مثلاً X برای متغیر شوخی و Y برای متغیر امتیاز تجاری). سپس روی واژه Type کلیک کرده و با باز شدن دریچه مربوط به نوع متغیر، عددی یا اسمی بودن متغیر را مشخص می‌کنیم. پیش‌فرض سیستم به گونه‌ای است که متغیرها را عددی می‌پندارد، چنانچه لازم باشد می‌توان آن را تغییر داد.

پیش فرض سیستم برای فرمت متغیرها F8.2 است، یعنی پهنای ۸ با دو رقم اعشار. برای هر متغیر ۸ ستون، پنج ستون برای وارد کردن بخش صحیح ارقام و دو تا برای دو رقم اعشار و یک رقم هم برای نشانه اعشاری عدد، منظور می‌شود. برای تغییر پهنه یک متغیر روی آن کلیک کرده و تغییرات دلخواه را متناسب با متغیر مورد نظر اعمال می‌کنیم. در مثال فوق می‌توان فرمت X را F1.0 و فرمت Y را F3.1 در نظر گرفت و مثلاً یک مقدار Y را به صورت 0.6 وارد کرد یا اگر بخواهیم با دو رقم اعشار، باشد، مثل 0.06 فرمت Y را F4.2 تعیین می‌کنیم. برای اختصاص برچسب به متغیرها روی عبارت مربوط (labels) کلیک کرده و برچسب آن را تایپ می‌کنیم (مثلاً humour برای X و financial concession برای Y) و سپس روی واژه ok کلیک می کنیم تا نام متغیر، نوع آن و برچسب مورد نظر به آن اختصاص یابد.

پس از این کار به صفحه ورود داده باز می گردیم و می‌توانیم همین کار را برای متغیرهای دیگر تکرار نماییم و نام، نوع، فرمت و برچسب آن‌ها را مشخص کنیم.

اکنون می‌توانیم فایل داده ها را در حافظه ذخیره کنیم. برای این کار روی واژه ی file کلیک نموده و با باز شدن دریچه مربوط، روی واژه save کلیک نموده و با در نظر گرفتن نام و نوع فایل و دایرکتوری‌محل‌ذخیره آن،فایل‌موردنظرذخیره‌شده‌واجرای‌شیوه های آماری مورد نظر ممکن می‌گردد.

اجرای شیوه آماری

برای اجرای یک آزمون t، روی واژه Analyze در بالای صفحه نمایش کلیک نموده و قسمت compare means را نیز به همین ترتیب فعال می‌کنیم. سپس قسمت Independent –samples T Test را فعال می‌کنیم در سمت چپ یک دریچه source variable list ظاهر می‌شود روی متغیر گروه‌بندی (X) و سپس روی علامت ▷ کلیک می‌کنیم . همین کار را هم در مورد متغیر آزمون (Y) انجام می‌دهیم. حالا هر دو متغیر انتخاب شده‌اند، اما متغیر گروه‌بندی را هنوز تعریف نکرده‌ایم. برای این کار دوباره روی متغیر گروه‌بندی کلیک نموده و با برجسته کردن و کلیک کردن روی عبارت Define Groups، عدد 1 را برای گروه واجد شوخی تایپ می‌کنیم. سپس روی ارزش مربوط به گروه بدون شوخی 2 بار کلیک کرده و مقدار 0 را برای آن تایپ نموده و با کلیک روی واژه continue مقادیر معین شده را وارد می‌کنیم.

اگر بخواهیم امکانات دیگری هم وجود دارد که تحت عنوان options می‌توان آن ها را انتخاب نمود و به کار بست، سپس برای اجرای آزمون t روی واژه continue کلیک و با بازگشت به قسمت اوّل و کلیک روی واژه ok آزمون را اجرا نمود. اکنون spss شیوه آماری را اجرا نموده و در دریچه‌ای نتایج آزمون t استیودنت را نمایش می‌دهد و نمایش می‌دهد. در صورت نیاز می‌توان با کلیک روی نشانه های مربوط به جهت، نتایجی را که از دید پنهان هستند نمودار ساخت.

اجرای شیوه های آماری به وسیله دستورات spss

کسانی که با دستورات spss آشنایی کافی دارند و مایلند مستقیماً دستورات را تایپ کنند، می‌توانند به جای موارد بالا به طریق این عمل کنند: روی واژه file کلیک کنید. سپس روی واژه New و بعد spss syntax .درنتیجه دریچه مخصوص تایپ دستورات ظاهر شده و می‌توانید مثل حالت +spss/pc دستورات را تا یپ کنید. برای آزمون t دستورات لازم در ادا مه آ مده است. پس از آن مکان نما را به خط اول انتقال داده و روی علامت $\triangleright$ در دریچه دستورات کلیک می‌کنید (برای spss for windows) و نتایج را مثل حالت قبل دریافت می نمایید.

ذخیره سازی نتایج

ذخیره سازی نتایج حا صله را نباید از یاد برد. روی واژه file و سپس save as کلیک کنید و نوع فایل را با پسوند*lst*. مشخص نمایید. مثلا *humar.lst* . سپس با تعیین مسیر و دایرکتوری مورد نظر با کلیک روی واژه ok ذخیره‌سازی را کامل کنید. حال اگر می خواهید از محیط spss خارج شوید در قسمت file روی وازه Exit کلیک کنید. در این هنگام سیستم از شما درباره تمایل به ذخیره سازی محتویات پنجره‌های باز شده سؤال می‌کند که روی واژه No کلیک می‌کنید چون قبلاً آن‌ها را ذخیره کرده اید.

«عبارتی» که در دریچه دستورات تایپ می‌شود شامل موارد زیر است:

1-list.
2-T-test Groups=*X* (0.1)/
3-variables=*Y*.

با دستور list، ماتریس داده‌ها درخواست شده است.

د ستورات ۲ و ۳ آزمون t را درخوا ست می‌کند. د ستور ۲ نشان می‌دهد که متغیر شوخی X معرف گروه‌هاست. اعداد ۰و ۱داخل پرانتز به ترتیب ارزش‌های حداقل و حداکثر را نشان می‌دهند. البته این مقادیر را به همان شکل موجود در ماتریس داده‌ها یعنی به شکل۱و۲ هم می‌توان در نظر گرفت.

در نتایج حاصل از کامپیوتر یک آزمون F هم دیده می‌شود. این یک آزمون تجانس(متجانس بودن واریانس ها) است. چنان که می‌دانیم واریانس‌ها نباید تفاوت معناداری داشته باشند. بنابراین باید توجه داشت که سطح معناداری تجربی نباید کمتر از α=۰/۰۵ در نظر گرفته شده باشد. درواقع باید

بیشتر باشد. چنانکه ملاحظه می‌شود در این مسأله عدد بدست آمده برابر ۰/۹۲۹ بوده و از لحاظ عدم تجانس مشکلی وجود ندارد.

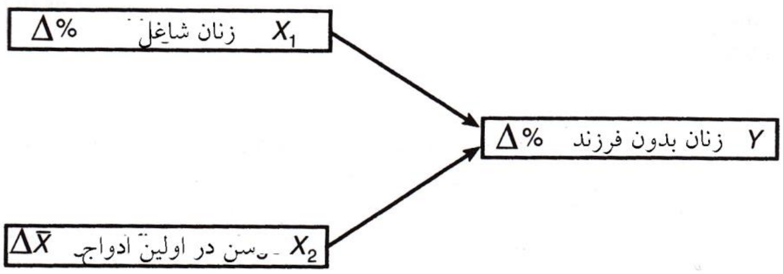
```
X  Y

1 .6
1 .7
1 .6
1 .5
1 .6
0 .5
0 .4
0 .4
0 .3
0 .4
0 .5

Number of cases read =      11   Number of cases listed =      11
Independent samples of  X        HUMOUR

Group 1:  X  EQ 0          Group 2:  X  EQ 1

t-test for:  Y          FINANCIAL CONCESSION

                    Number              Standard    Standard
                   of Cases     Mean    Deviation     Error

      Group 1          6       .4167       .075        .031
      Group 2          5       .6000       .071        .032

                 | Pooled Variance Estimate | Separate Variance Estimate
                 |                          |
   F    2-Tail   |   t    Degrees of 2-Tail |   t     Degrees of   2-Tail
 Value  Prob.    | Value   Freedom   Prob.  | Value    Freedom     Prob.
                 |                          |
 1.13    .929    | -4.13      9      .003   | -4.16      8.83      .003
```

فصل ۵

تحلیل رگرسیون چندگانه: علل بی‌فرزندی

۵-۱ مسأله تحقیق و نمودار علّی

در تحقیق مربوط به علل بی‌فرزندی، چندین عامل دخالت دارند که روی هم پدیده افزایش درصد زنان بدون فرزند (Y) را طی سالهای ۱۹۷۰-۱۹۶۰تبیین می‌نماید. برای رعایت سادگی ما این عوامل را به دو عامل علّی محدود می‌کنیم: تغییرات درصد مشارکت در نیروی کار طی آن دهه (X_1) و تغییرات میانگین سن اولین ازدواج در آن دهه (X_2).درنتیجه سه متغیر در تحلیل‌ها درگیر هستند، یک متغیر وابسته Y و دو متغیر مستقل X_1 و X_2. هر سه متغیر در سطح سنجش فاصله‌ای اندازه‌گیری شده‌اند. شیوه تحلیل برای چنین حالتی، تحلیل رگرسیون چندگانه است. فرمت اساسی در این مورد، ساختار علّی همگراست که در نمودار زیر ارائه شده است.



۵-۲ ماتریس داده‌ها

واحد مورد بررسی، گروه‌های زنان سفید پوست هم سنی است که حداقل یک‌بار ازدواج کرده‌اند. در مجموعه کوچک داده‌های(فرضی) ما (جدول 5-1) $n = ۱۰$ واحد یا گروه درنظر گرفته شده است.

متغیر X_1 تغییرات بین درصد زنان شاغل در سال ۱۹۷۰ و سال ۱۹۶۰ را نشان می‌دهد.

متغیر X_2 تفاوت بین میانگین سن اولین ازدواج را در سال ۱۹۷۰ و سال ۱۹۶۰ نشان می‌دهد.

متغیر وابسته Y تفاوت بین درصد زنان بدون فرزند در سال ۱۹۷۰ در مقایسه با سال ۱۹۶۰ است.

جدول ۱-۵ ماتریس داده‌ها

	$X_۱$	$X_۲$	Y
	۱	۱	۲
	۲	۶	۳
	۳	۳	۲
	۴	۲	۲
	۵	۲	۴
	۶	۵	۱۰
	۶	۹	۱۲
	۷	۴	۸
	۹	۱	۳
	۹	۷	۱۴
میانگین	$\overline{X}_1 = ۵/۲$	$\overline{X}_2 = ۴$	$\overline{Y} = ۶$
مجموع مجذورات	$\sum(X_1 - \overline{X}_1)^2 = ۶۷/۶$	$\sum(X_2 - \overline{X}_2)^2 =$ ۶۶	$\sum(Y - \overline{Y})^2 =$ ۱۹۰
واریانس	$S_1^2 = ۷/۵۱$	$S_2^2 = ۷/۳۳$	$S_y^2 = ۲۱/۱۱$
انحراف استاندارد	$S_1 = ۲/۷۴$	$S_2 = ۲/۷۱$	$S_y = ۴/۵۹$

۳-۵ تحلیل رگرسیون دو متغیری: تأثیر شاغل بودن روی بی‌فرزندی

برای آمادگی پیدا کردن جهت درک رگرسیون چندگانه ابتدا مختصری درباره همبستگی ساده و تحلیل رگرسیون دو متغیری صحبت می‌کنیم. متغیرهای $X_۱$ و Y را انتخاب می‌کنیم و تأثیر افزایش نسبت زنان شاغل را بر افزایش نسبت زنان بدون فرزند مورد مطالعه قرار می‌دهیم .

نمودار علّی در این حالت نمودار ساده $X_۱ \rightarrow Y$ است و ماتریس داده‌ها تنها شامل دو ستون $X_۱$ و Y می‌باشد.

۱-۳-۵ مدل مورد نظر

مسأله تحقیق را به صورت بررسی اثر شاغل بودن بر بی‌فرزندی در نظر می‌گیریم. فرض بر این است که افزایش مختصری در درصد زنان شاغل، با افزایش کمی در درصد زنان بدون فرزند همراه است و یک افزایش قابل ملاحظه در یکی، افزایش قابل ملاحظه‌ای را در دیگری طبق یک الگوی پایدار به همراه دارد. این نظر را باید فرمول‌بندی کرد. بدین ترتیب چنانچه الگوی مورد نظر یک خط تقریباً مستقیم (صعودی) باشد می‌توان آن را به وسیله مدل خطی بیان کرد.

این مدل برای جمعیت فوق به صورت زیر است:

$$\mathrm{Y}_i = \beta_o + \beta_{y۱} \times \mathrm{X}_{i۱} + \varepsilon_i$$

در این فرمول Y متغیر وابسته، X_1 متغیر مستقل، i واحد مورد نظر در تحلیل؛ β_o ثابت خط، یعنی ارزش Y در حالی که X_1 برابر صفر است، یا میزان افزایش در بی‌فرزندی زمانی که مشارکت در نیروی کار افزایشی نمی‌یابد؛ β_{y1} ضریب رگرسیون یعنی میزان تغییر Y به ازاء یک واحد تغییر در X_1 ، یا اندازه تغییر در متغیر بی‌فرزندی به ازاء هر واحد تغییر در مشارکت در نیروی کار؛ ε میزان خطا، یعنی عبارتی که اضافه می‌شود، زیرا مدل خطی به ندرت می‌تواند به طور کامل Y را پیش‌بینی کند، بلکه همواره میزانی از خطا وجود دارد، به عبارت دیگر مدل احتمالی است نه قطعی.

متغیر مستقل X_1 در این مدل ثابت فرض شده، یعنی نمرات X_1 معلوم فرض شده‌اند. برای هر ارزش ثابت X_1 مقدار مورد انتظار Y روی خط مستقیم واقع شده است. این ارزش مورد انتظار Y با نماد $E(Y)$ یا $\hat{Y}$ نشان داده می‌شود. عبارت $E(Y)$ به معنای «برآورد Y» است و $\hat{Y}$ نشان می‌دهد که مقدار Y برآورد شده است. $\hat{Y}$ را برآورد Y یا «Y کلاه‌دار» می‌خوانیم. بدین ترتیب فرمول قبلی به صورت زیر در می‌آورید:

$$E(Y) = \hat{Y}_i = \beta_O + \beta_{y1} X_{i1}$$

تفاوت بین Y_i و $\hat{Y}$ همان میزان خطاست:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

مقادیر مشاهده شده Y_i حاصل‌جمع یک بخش ثابت $\beta_o + \beta_{y1} X_{i1}$ و یک بخش تصادفی ε_i است. خطاهای ε_i باید از یک الگوی تصادفی پیروی کنند. بدین معنا که این مقادیر در اطراف خط مستقیم به صورت تصادفی با یک ارزش مورد انتظار $E(\varepsilon_i) = 0$ ویک واریانس ثابت σ^2_e پراکنده شده‌اند.

تا اینجا مدل مربوط به جمعیت، مورد بحث قرار گرفت و از حروف یونانی β_0، β_{y1} و ε استفاده شد.

امّا زمانیکه برآورد بعمل می‌آید، تحلیل براساس نمونه‌ای از واحدها صورت می‌گیرد. آنگاه مدل به صورت زیر باحروف لاتین نوشته می‌شود:

$$Y_i = b_o + b_{y1} X_{i1} + e_i$$

$$E(y_i) = \hat{y}_i = b_0 + b_{y1} x_{i1}$$

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

۵-۳-۲ رویکرد هندسی

مدل خطی را می‌توان به صورت مختصات دکارتی با یک محور X_1 افقی و یک محور Y عمودی هم نشان داد. از جدول داده‌ها ده جفت اعداد $(X_1، Y)$ را به دست آوردیم: (۱،۲)، (۳و۲) ، (۲و۳) ... (۱۴،۹). وقتی‌که این جفت‌ها را در نظام مختصات رسم می‌کنیم توده‌ای از نقاط به دست می‌آید که نمودار پراکنش[1] نامیده می‌شود.

بازبینی این نمودار پراکنش اوّلین کاری است که همیشه باید انجام دهیم. زیرا چنان چه این نقاط از الگوی خطی تبعیت نکنند، باید کار را با یک مدل غیرخطی آغاز نمود. مسأله دیگر این است که پراکندگی ارزش‌های Y برای هر یک از ارزش‌های X_1 باید تقریباً یکسان باشد (فرض متجانس بودن). همچنین باید ببینیم آیا واحدهایی از تحلیل وجود دارند که از الگوی خطی انحراف داشته باشند یا نه. چنین واحدهایی را «دورافتاده‌ها[2]» می‌نامند. بسته به موضوع تحقیق می‌توان آن‌ها را به طور جداگانه مورد تحلیل قرار داد یا این که از فهرست داده‌ها حذف نمود. علاوه بر مسأله غیرخطی بودن، نامتجانس بودن و وجود موارد دور افتاده، ممکن است با مسائل بسیار دیگری در نمودار پراکنش مواجه شویم. شکل گرفتن خوشه‌ها حاکی از گروه‌های جداگانه در فهرست داده‌ها می‌باشد. خطوط موازی گاهی نشانه یک متغیر مکنون و خطوط غیرموازی نشانه اثر تعاملی است. از طریق تحلیل باقی مانده می‌توان به مطالعه منظم الگوی خطی پرداخت که در بخش‌های بعدی درباره آن بحث خواهد شد. اجازه دهید در ابتدا به یک دید ساده بسنده کنیم.

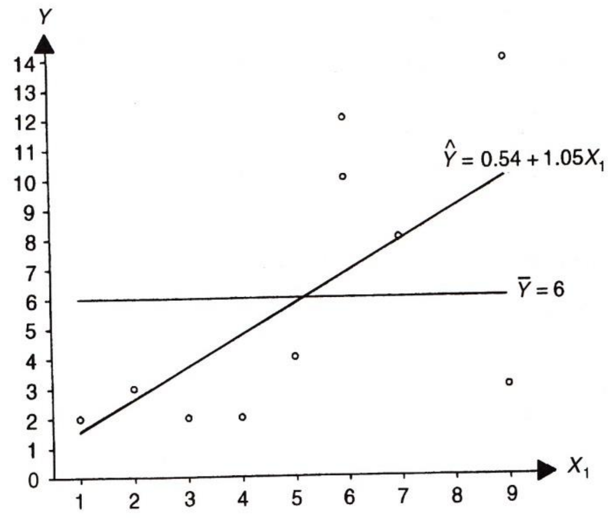
این کار را با ده جفت $(X_1، Y)$ شروع می‌کنیم. در شکل ۵-۱ نمودار پراکنش ده نقطه را می‌بینیم که تا حدودی از الگوی خطی مورد نظر پیروی می‌کنند.

زوج (۹،۳) به نظر می‌رسد یکی از نقاط دورافتاده باشد: دهه افزایش زنان شاغل و دهه افزایش زنان بدون فرزند.جدا از این نقطه دورافتاده، الگوی فوق تقریباً خطی است گرچه دو گروه در سمت چپ و پایین خط و سمت راست و بالای خط قابل مشاهده است. این ناشی از عدم پیوستگی مقادیر Y است: افزایش زنان بدون فرزند از ۴٪ به ۸٪ و سپس به ۱۴٪ . مقادیر بین ۴ و ۸ درصد پدیدار نیستند.

چنانکه این شکل‌گیری گروهی ناشی از متغیر (دوبخشی) دیگری باشد، مثلاً بخش پایین نمودار پراکنش با یکی از مقوله‌های آن ارتباط داشته باشد، آنگاه این متغیر باید وارد تحلیل گردد. در آن صورت ممکن است چنین مشخص شود که زوج (۳،۹) چندان هم که در مرحله نخست به نظر می‌رسید مجزّا نیست. بدین ترتیب تحلیل به دو جزء تحلیلی جداگانه قابل تقسیم خواهد بود، یکی برای گروه پایین و دیگری برای گروه بالا (شکل۲-۵). برای گروه پایین تقریباً بین X_1 و Y رابطه‌ای وجود ندارد و بطوری که با هر افزایشی که در شاغل بودن از ۱٪ به ۹٪ رخ دهد، افزایش بی‌فرزندی در حدود ۲٪ تا ۴٪ باقی می ماند. برای گروه بالا رابطه قوی ای وجود خواهد داشت، زیرا افزایش

1. scatter diagram 2. outliers

نســبت جمعیت شــاغل از ۶٪ به ۹٪ با افزایش در نســبت جمعیت بدون فرزند از ۱۰٪ به ۱۴٪ همراه است، البته یک کاهش به ۸٪ هم وجود دارد.



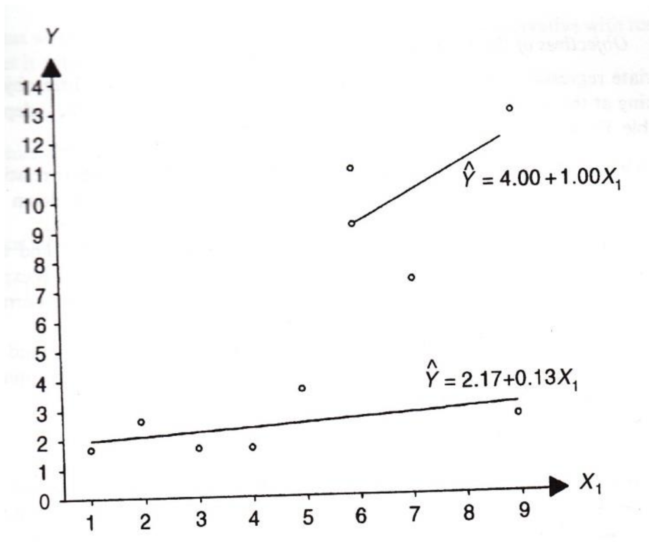
شکل ۱-۵ نمودار پراکنش اشتغال (X_1) ونداشتن فرزند(Y)

این تحلیل‌های فرعی حالت فرضی داشت و البته در صورتی معنادار است که اطلاعات مورد نیاز درباره گروه های فرضی که برای تعبیر و تفسیر لازم است، در دسترس باشد. بسیار احتمال دارد که دید انسان به خطا رفته و گروه هایی که واقعاً وجود ندارد را ببیند.گذشته از این ها، خود متغیرها هم ممکن اســـت منجر به الگویی نامتجانس و ناآشـــنا گردند. در مثال ما،گروههای ظاهری که شـــکل گرفته‌اند می‌توانند ناشــی از عدم پیوســتگی متغیر Y باشــند نه این که ضــرورتاً عامل مکنون دیگری تأثیر گذاشته باشد.

بنابراین هر تحلیل دو متغیره باید در ابتدا توســـط یک تحلیل جداگانه از هر یک از متغیرها مورد بررسی قرار گیرد.

برمی‌گردیم به نمودار پراکنش کلی و فرض می‌گیریم که این نمودار یک الگوی خطی را نشـــان می‌دهد،حالا ســعی می‌کنیم خط مســتقیمی را پیدا کنیم که با این نمودار پراکنش بهترین انطباق را داشته باشد. در نظام مختصات خط $\hat{Y} =$ ۰/۵۴+۱/۰۵ X_1 را رسم کردیم . محاسبات آن را در این جا ادامه می‌دهیم. بعضی نقاط(۲و۱)، (۳،۲) و(۸،۷) خیلی به خط مستقیم نزدیک هستند. بعضی نقاط خیلی از آن دورترند، مثلاً زوج (۳،۹) را درنظر بگیرید: برای $X_1 =$ ۹ مقدار واقعی Y برابر ۳ بوده و Y برآورده شـــده براســـاس خط رگرســـیون (۹) ۰/۵۴+۱/۰۵ = $\hat{Y}$ می‌باشـــد. انحراف نقطه از خط رگرســیون مقدار خطای ۶/۹۹- = ۹/۹۹- ۳ = $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$است. این مقدار خطا منفی اســت، زیرا

نقطه (۳،۹) زیر خط رگرسیون قرار دارد. از سوی دیگر نقطه (۱۴،۹) بالای خط رگرسیون قرار دارد و مقدار خطای مربوط به آن $e_i = Y_i - \hat{Y}_i =$ ۱۴ - ۹/۹۹ = ۴/۰۱ مثبت است.



شکل ۲-۵ نمودار پراکنش اشتغال (X_1) ونداشتن فرزند(Y): دو تحلیل فرعی

مقادیر خطا یکدیگر را جبران می‌کنند بطوری که جمع جبری ده خطای مثبت و منفی برابر با صفر است: $\sum ei =$ ۰.

در هر حال، این واقعیت که $\sum ei =$ ۰ و سیله ب سنده‌ای برای یافتن تابع رگر سیون خطی که بهترین انطباق را با نمودار پراکنش داشته باشد، نیست. برای اینکه خطوط مستقیم دیگری هم وجود دارند که برای آنها $\sum ei =$ ۰ می‌با شد. اما انطباق با نقاط با خطای بی شتری مواجه ا ست. یک مثال افراطی از چنین خطی تابع $\hat{Y}=$ ۶ اســت که در شــکل۱-۵ نشــان داده شــده، این تابع از میانگین $\bar{Y}$ می‌گذرد و با محور X_1 موازی است. برای چنین تابعی رابطه بین X_1 و Y صفر خواهد بود، زیرا در این جا یک افزایش در X_1 نه افزایش و نه کاهشی در Y به‌همراه دارد.

بنابراین نیاز به ملاک دیگری برای فهم بهترین انطباق داریم. این ملاک حداقل مجذورات ا ست که در محاسبه تابع رگرسیون مورد بحث قرار خواهد گرفت.

۳-۳-۵ اهداف این روش آماری

تحلیل رگر سیون دو متغیره به عنوان یک روش محا سبه برای سه هدف زیر به کار می‌رود. با نگاهی به مثال بی‌فرزندی و محدود کردن آن به یک متغیر مستقل X_1 اهداف مزبور بدین قرار است:

۱- یک تابع $Y_1 = b_0 + b_{Y_1}X_{i1}$ را درنظر می‌گیریم که رابطه خطی بین X_1 و Y را بهتر از هر تابع دیگری بیان می‌کند. هدف محاسبه ضریب رگرسیون b_{Y1} و ثابت رگرسیون b_0 است.

۲- مقدار همبســـتگی بین X_1 و Y را مورد بررســـی قرار می‌دهیم و می‌خواهیم بدانیم از جنبه پیش‌بینی، چه بخشـــی از واریانس Y توســـط واریانس X_1 تبیین می‌گردد. این هدف را تحت عنوان محاسبه ضریب همبستگی r_{y1} و مجذور آن r_{y1}^2 خلاصه می‌کنیم.

۳- تحقیق می‌کنیم که آیا رابطه بین X_1 و Y را که در نمونه مورد بررسی مشاهده شده می‌توان به جمعیت مربوطه تعمیم داد. این هدف را به کاربردن یک آزمون معناداری رابطه گویند.

۴-۳-۵ محاسبه تابع رگرسیون

در قسمت فوق گفته شدکه جمع جبری مقادیر خطا با توجه به بهترین خط رگرسیون انطباقی، برابر صفر است، اما در بسیاری از خط‌های مستقیم دیگر نیز جمع جبری خطاها صفر است. برای پیدا کردن بهترین خط به ملاک دیگری نیاز داریم. ملاک‌های بسیار دیگری را می‌توان درنظر گرفت. یکی از ملاک‌هایی که کاربرد گسترده‌ای دارد ملاک کمترین مجذورات متداول[1] (OLS) است، طبق این ملاک مجموع مجذورات خطاها $\sum ei$ باید حداقل باشد.

می‌دانیم که مجذور یک عدد همواره مثبت اســـت و از این رو مجموع $\sum e^2$ هم مثبت اســـت. درحالی‌که مجموع $\sum ei$ صـــفر اســـت، چون خطاهای مثبت و منفی یکدیگر را خنثی می‌کنند. البته می‌توان مجموع مقادیر مطلق خطا $\sum |ei|$ را به حداقل رســـاند، اما مجذورات مزایایی دارند که مقادیر مطلق ندارند.

اکنون معیار کمترین مجذورات (OLS) را برای تابع $Y = b_o + b_{y1}x_1 + e$ به کار می‌بریم و b_0 و b_{y1} را محاسبه می‌کنیم (به منظور سادگی، اندیس‌های i کنار گذاشته شده اند).

$$e = \overline{Y} - \hat{Y}$$
$$e = Y - (b_o + b_{y1}X_1) = Y - b_0 - by_1X_1$$
$$e^2 = Y^2 - b_o^2 + b_{y1}^2X_1^2 - 2b_0Y - 2by_1X_1Y = 2b_ob_{y1}X_1$$
$$\sum e^2 = \sum Y^2 + \sum b_0{}^2 + \sum b^2y_1X_1^2 - 2\sum b_0Y - 2\sum by_1X_1Y + 2\sum b_0b_{y1}X_1$$

این مجموع مجذورات بایستی به حداقل برسد. این کار با مساوی صفر گرفتن مشتق‌های جزئی و حل معادلات انجام می‌گیرد. به‌عبارت دیگر ما ابتدا b_0 را ثابت فرض می‌گیریم،و با توجه به b_{y1} مشتق‌گیری می‌کنیم. آن را مساوی صفر نموده و حل می‌کنیم:

$$\delta_{by_1}(\sum e^2) = 2by^1\sum X_1^2 - 2\sum X_1Y + 2b_0\sum X_1 = O$$

و نتیجه می‌گیریم:

1. ordinary least squares line criterion

(۱) $$b_o = (\sum X_1 Y - b_{y_1} \sum X_1^2) / \sum X_1$$

بعد از آن $b_{y۱}$ را ثابت گرفته،با توجه به b_0 مشتق می‌گیریم.آن را برابر صفر گرفته و حل می‌کنیم:

$$\delta b_o(\sum e^2) = 2nb_0 - 2\sum Y + 2by1\sum X_1 = 0$$

و در نتیجه

(۲) $$b_o = (\sum Y - b_{y1}\sum X_1)/n$$

با مساوی گرفتن حاصل معادلات (۱) و (۲) در معادله‌ای با $b_{y۱}$ مجهول:

$$(\sum X_1 Y - b_{y1}\sum X_1^2)/\sum X_1 = (\sum Y - b_{y1}\sum X_1)n$$
$$n\sum X_{1y} - nb_{y1}\sum X_1^2 = \sum Y\sum X_1 - b_{y1}\sum X_1 \sum X_1$$
$$n\sum X_1 Y - \sum Y \sum X_1 = nb_{y1}\sum X_1^2 - b_{y1}(\sum X_1)^2$$
$$b_{y1} = \frac{n\sum X_1 Y - \sum Y \sum X_1}{n\sum X_1^2 - (\sum X_1)^2}$$
$$\boxed{b_{y1} = \frac{\sum X_1 Y - n\overline{Y}\overline{X1}}{\sum X_1^2 - n\overline{X}_1^2}}$$

این فرمولی محا سباتی ا ست که عمدتاً برای محا سبه ضریب رگر سیون بکار می‌رود. ب سادگی می‌توان نشان داد که این فرمول با فرمول شناخته‌شده‌تری که در آن کوواریانس $X_۱$ و Y بر واریانس $X_۱$ تقسیم شده، یکسان است:

$$\boxed{b_{y_1} = \frac{\sum (X_1 - \overline{X}_1)(Y - \overline{Y})}{\sum (X_1 - \overline{X}_1)^2}}$$

حال از روی فرمول (۲) می‌توان b_0 را به دست آورد.

$$b_o = (\sum Y - b_{y1}\sum X_1)/n$$
$$\boxed{b_o = \overline{Y} - by_1\overline{X}_1}$$

بمنظور اعمال این فرمول‌ها در تحقیق بی‌فرزندی، محاسـبات $\overline{X}_1$ ، $\overline{Y}$، $\sum X_1^2$ و $\sum X_1 Y$ را در جدول ۲-۵ جمع می‌کنیم:

پس از محاســبه $b_{y۱}$ و b_0 می‌توانیم مقادیر مورد انتظار $\hat{Y}_i = b_0 + b_{y1}X_{i1}$ را برای هر واحد تحلیل و هم چنین باقی‌مانده های $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$ تعیین کنیم. مجذور $e_i^۲$ باقی مانده ها برای محاسبات بعدی اضافه شده است. تابع رگرسیون عبارت است از: $\hat{Y} = ۰/۵۴ + ۱/۰۵ X_1$.

مقدار ثابت b_0=۰/۵۴ مقدار Y است وقتی که X_1 صفر باشد: وقتی که تغییر در نسبت زنان شاغل در یک دهه ایجاد نشود، نسبت زنان بدون فرزند ۰/۵۴٪ افزایش می‌یابد.

ضریب رگرسیون b_{y1} = ۱/۰۵ بیان‌گر میزان تغییر Y به ازاء هر واحد افزایش در X_1 است: چنان‌چه یک واحد تغییر در نسبت زنان شاغل طی یک دهه حاصل شود، انتظار می‌رود نسبت زنان بدون فرزند در یک دهه ۱/۰۵ واحد افزایش یابد. مثلاً در جدول فوق ملاحظه می‌شودکه افزایش X_1 از ۳ به ۴، افزایش $\hat{y}$ از ۳/۶۹ به ۴/۷۴ را به همراه دارد؛ و افزایش X_1 از ۶ به ۷ با افزایش $\hat{Y}$ از ۶/۸۴ به ۷/۸۹ همراه است.

همچنین ملاحظه می‌شود که مجموع $\sum ei$ باقی مانده برابر صفر است. انحراف معیار آن S_e برابر ۳/۵۸ است که میزان پراکندگی نقاط نمودار پراکنش را در اطراف خط رگرسیون نشان می‌دهد. مادامی‌که این انحراف از S_y= ۴/۵۹ کمتر باشد، بین X_1 و Y یک رابطه خطی وجود دارد.

مجموع مجذورات خطا $\sum e^2$ برابر ۱۱۵/۴۳ است و از سایر مجذورات توابع خطی مشابه کمتر است که ناشی از ملاک کمترین مجذورات (OLS) می باشد.

جدول ۲-۵ محاسبه تابع رگرسیون

	X_1	Y	X_1^2	X_1Y	$\hat{Y}$	e	e^2
	۱	۲	۱	۲	۱/۵۹	۰/۴۱	۰/۱۷
	۲	۳	۴	۶	۲/۶۴	۰/۳۶	۰/۱۳
	۳	۲	۹	۶	۳/۶۹	۱/۶۹	۲/۸۵
	۴	۲	۱۶	۸	۴/۷۴	۲/۷۴	۷/۵۱
	۵	۴	۲۵	۲۰	۵/۷۹	۱/۷۹	۳/۲۰
	۶	۱۰	۳۶	۶۰	۶/۸۴	۳/۱۶	۹/۹۸
	۶	۱۲	۳۶	۷۲	۶/۸۴	۵/۱۶	۲۶/۶۲
	۷	۸	۴۹	۵۶	۷/۸۹	۰/۱۱	۰/۰۱
	۹	۳	۸۱	۲۷	۹/۹۹	۶/۹۹	۴۸/۸۸
	۹	۱۴	۸۱	۱۲۶	۹/۹۹	۴/۰۱	۱۶/۰۷
مجموع	۵۲	۶۰	۳۳۸	۳۸۳		۰	۱۱۵/۴۳
میانگین	۵/۲	۶/۰				۰	
انحراف معیار	۲/۷۴	۴/۵۹				۳/۵۸	

$$b_{y1} = \frac{383 - 10(6.0)(5.2)}{338 - 10(5.2)^2} = 1.05$$

$$b_0 = 6.0 - 1.05(5.2) = 0.54$$

۵-۳-۵ توان رابطه و واریانس تبیین شده

اینک هدف دوم تحلیل واریانس دو متغیره را مورد بحث قرار می‌دهیم: محاسبه مقدار همبستگی و میزان واریانس تبیین شده که به ترتیب به وسیله ضریب همبستگی r_{y1} و مجذور آن صورت می‌گیرد. از دومی آغاز می‌کنیم زیرا چنانکه خواهیم دید تفسیر مجذور ضریب همبستگی بیشتر قابل فهم است. مجذور ضریب همبستگی که ضریب تعیین[1] هم نامیده می‌شود، بین ۰ تا ۱ تغییر می‌کند و به دو طریق: به عنوان یک اندازه پیش‌بینی و به عنوان یک اندازه از واریانس تبیین شده، می‌توان آن را تفسیر نمود. تفسیر پیش‌بینی نخست به صورت زیر است.

ما سعی داریم تا افزایش در بی‌فرزندی Y را بر اساس افزایش نیروی کار X_1 برای یک واحد تحلیل که به طور تصادفی انتخاب شده است، پیش‌بینی کنیم. اگر هیچ گونه اطلاعاتی در زمینه X_1 از آن واحد تحلیل در اختیار نداشته باشیم، آنگاه $\bar{Y}$ بهترین پیش‌بینی در این باره است. احتمال خطای این پیش‌بینی را می‌توان با تغییرات مقادیر Y در اطراف میانگین نشان داد: $\sum(Y-\bar{Y})^2$.

اگر اطلاعات X_1 را در اختیار داشته باشیم با اتّکا به خط رگرسیون می‌توان اقدام به پیش‌بینی نمود.آنگاه ما مقدار $\hat{y}_i$ را روی خط رگرسیون پیش‌بینی می‌کنیم که همان مقدار x_{il} در تحلیل واحد i است.احتمال خطای این پیش‌بینی به وسیله تغییرات مقادیر Y در اطراف مقادیر $\hat{y}$ خط رگرسیون نشان داده می‌شود: $\sum(Y-\hat{Y})^2$. اگر این مقدار خطا کمتر از مقدار خطای اولیه باشد، آنگاه تابع رگرسیون،پیشرفتی را در پیش‌بینی نشان می‌دهد.

اختلاف $\sum(Y-\bar{Y})^2-\sum(Y-\hat{Y})^2$ تقلیل میزان خطاست. وقتی که این مقدار کاهش را بر کل احتمال خطا تقسیم کنیم، کاهش نسبی احتمال خطا بدست می‌آید که همان r_{y1}^2 است.

$$r_y^2 1=\frac{\sum(Y-\bar{Y})^2-\sum(Y-\hat{Y})^2}{\sum(Y-\bar{Y})^2}$$

در تحقیق بی‌فرزندی در یافتیم که $\sum(Y-\hat{Y})^2=\sum e^2=115/43$.تغییرات Y در اطراف میانگین برابر $\sum(Y-\bar{Y})^2=190$ است. نتیجه می‌گیریم: $r_{y1}^2=(190-115/43)/190=0/39$.

این بدان معناست که در پیش‌بینی واریانس بی‌فرزندی طی یک دهه اگر متکی به نیروی کار باشیم، در مقایسه با زمانی که به آن تکیه نکنیم، احتمال خطا به نسبت ۳۹٪ کاهش می یابد، اصطلاحاً چنین تفسیری را تفسیر کاهش نسبی خطا می‌نامند.

تفسیر دوم از لحاظ واریانس تبیین شده است که با تقسیم تغییرات کل Y به دو بخش به دست می‌آید: بخشی که ناشی از خود خط رگرسیون است (تغییرات تبیین شده، مجموع مجذورات رگرسیون SSR) و بخش باقی مانده تغییرات در اطراف خط رگرسیون (واریانس تبیین نشده، مجموع

1. determination coefficient

مجذورات خطا SSE).این تقسیم معادل همان SST=SSB+SSW است که در قسمت ضمیمه کتاب به طور مفصل شرح داده شده است.

$$\text{SST} \quad = \quad \text{SSR} \quad + \quad \text{SSE}$$

$$\sum(Y-\bar{Y})^{۲}=\sum(\hat{Y}-\bar{Y})^{۲}+\sum(Y-\hat{Y})^{۲}$$

کل = تبیین شده + تغییرات تبیین نشده

۱۹۰ = ۷۴/۵۷ + ۱۱۵/۴۳

وقتی‌که تغییرات تبیین شده را بر تغییرات کل تقسیم کنیم، بخشی از تغییرات بی‌فرزندی را که به وسیله نیروی کار تبیین می‌شود به دست می‌آوریم که r_{y1}^2 است.

$$r_{y1}^2=\frac{\sum(\hat{Y}-\bar{Y})^2}{\sum(Y-\bar{Y})^2}=\frac{74.57}{190}=۰/۳۹$$

بیشتر کتاب‌ها اصطلاح واریانس تبیین شده را به جای تغییرات تبیین شده به کار می‌برند. اما اگر ما فرمول r_{y1}^2 را بگیریم و صـــورت و مخرج آن را بر درجات آزادی $n=۱$ تقســـیم کنیم، بجای تغییرات، واریانس‌ها را به دست خواهیم آورد. بدنبال آن r_{y1}^2را می‌توان بخشی از واریانس Y تفسیر نمود که به وسیله $X_۱$ توضیح داده می‌شود.

از این مطالب در می‌یابیم که مجذور ضـریب همبســتگی را بخوبی می‌توان تعبیر و تفســیر نمود، خواه به صورت مقیاس پیش‌بینی (تفسیر کاهش نسبی خطا) و یا به صورت بخشی از واریانس (یا تغییرات) تبیین شده باشد. این واقعیت که می‌توان چنین تفسیرهای خوبی به عمل آورد، ناشی از تقسیم انباشتی واریانس کل $\sum(Y-\bar{Y})^{۲}$ به دو بخش تبیین شده $\sum(\bar{Y}-\hat{Y})^{۲}$ و بخش باقیمانده $\sum(Y-\bar{Y})^{۲}$ است، جائی که حاصل ضرب مضاعف $۲\sum(\hat{Y}-\bar{Y})(Y-\hat{Y})$ تجزیه می‌شود(از یک ســو به دلیل اینکه ارزش $\hat{Y}-Y$ برای هر مقدار $X_۱$ ثابت اســت و می‌تواند به قبل از علامت جمع، انتقال یابد، و از سوی دیگر به خاطر این که $\sum(Y-\hat{Y})=۰$ است).

اینگونه تقسیم «انباشتی» به دو قسمت حاصل جمع بخش تبیین شده و بخش تبیین نشده بدون دو برابر کردن حاصــلضــرب، برای تغییرات یا واریانس کل امکان‌پذیر اســت، اما برای انحراف معیار نیست. به این دلیل که مجذور $r_{y۱}$ بخوبی قابل تفسیر است ولی خود ضریب همبستگی $r_{y۱}$ چنین نیست. ضریب همبستگی بین ۱- و ۱+ تغییر می‌کند. ضریب همبستگی صفر $(r_{y1}=۰)$ به معنای نبودن رابطه بین Y و $X_۱$ اســت. مقدار $r_{y1}=۱$ نشــان دهنده یک رابطه مثبت کامل، $r_{y1}=-۱$ نشان‌دهنده یک رابطه منفی کامل است. در مثال فوق $r_{y1}=۰/۶۳$ به دست آمد که نشان دهنده

یک رابطه مثبت متوسط بین تغییرات بی‌فرزندی و تغییرات نسبت نیروی کار است (هراندازه یکی بیشتر باشد دیگری هم بیشتر و هر اندازه یکی کمتر باشد دیگری هم کمتر خواهد بود).

۶-۳-۵ تعبیر و تفسیر ضریب همبستگی

در قسمت بالا گفتیم که ضریب همبستگی گشتاوری r_{y1} نسبت به مجذور خود، کمتر قابل تفسیر است. در عین حال استفاده‌های زیادی هم از آن می‌توان بعمل آورد. در اینجا به سه جنبه از آن بسنده می‌کنیم: r_{y1} به عنوان کوواریانس تصحیح شده برای واریانس‌ها، r_{y1} به عنوان کوواریانس متغیرهای استاندارد شده و r_{y1} به عنوان میانگین هندسی ضرایب رگرسیون.

در ابتدا از فرمول قبلی به آسانی می‌توان دریافت که r_{y1} برابر است با نسبت تغییرات همگام[1] به ریشه دوم حاصل‌ضرب تغییرات. این مطلب در پایین نشان داده شده است.

$$r_{Y1}^2 = \frac{\sum(\hat{Y}-\bar{Y})^2}{\sum(Y-\bar{Y})_2}$$

$$= \frac{\sum(b_{\cdot} + b_{Y1}\bar{X}_1\bar{Y})^2}{\sum(Y-\bar{Y})^2}$$

$$= \frac{\sum(\bar{Y} - b_{Y1}\bar{X}_1 + b_{Y1}X_1 - \bar{Y})^2}{\sum(Y-\bar{Y})^2}$$

$$= \frac{b_{Y1}^2\sum(X_1-\bar{X}_1)^2}{\sum(Y-\bar{Y})^2}$$

$$= \frac{\left[\sum(X_1-\bar{X}_1)(Y-\bar{Y})\right]^2\sum(x_1-\bar{x}_1)^2}{\left[\sum(X_1-\bar{X}_1)^2\right]^2\sum(Y-\bar{Y})^2}$$

$$= \frac{\left[\sum(X_1-\bar{X}_1)(Y-\bar{Y})\right]^2}{\sum(X_1-\bar{X}_1)^2\sum(Y-\bar{Y})^2}$$

$$r_{y1} = \frac{\sum(X_1-\bar{X}_1)(Y-\bar{Y})}{[\sum(X_1-\bar{X}_1)^2\sum(Y-\bar{Y})^2]^{1/2}} = \frac{\text{تغییرات همگام } X_1 \text{ و } Y}{[(\text{تغییرات } Y)(\text{تغییرات } X_1)]^{1/2}}$$

---

1. covariation

صورت در این فرمول، تغییرات همگام $X_۱$ و Y است که نشان می‌دهد در چه جهتی (مثبت یا منفی) و تا چه حد $X_۱$ و Y با هم تغییر می‌کنند. اگر مرکز ثقل ($\bar{Y},\bar{X}_1$)در نظام مختصات $X_۱ - Y$ را رسم کنیم، آنگاه یک رابطه مثبت به معنای آن است که نقاط نمودار پراکنش عمدتاً در بالا و سمت راست و پایین و سمت چپ این نقطه قرار گرفته‌اند، زیرا تفاضل مثبت $X_۱ - \bar{X}_۱$ با تفاضل مثبت $Y - \bar{Y}$ و تفاضل منفی با تفاضل منفی آن همگام بوده، در نتیجه حاصل‌ضرب ($X_۱ - \bar{X}_۱)(Y - \bar{Y}$) مثبت می‌شود. برای یک همبستگی منفی، تفاضل مثبت در یک متغیر با تفاضل منفی در دیگری همگام خواهد بود.

مخرج در فرمول فوق تصحیحی از میزان پراکندگی هر یک از متغیرها در اطراف میانگین‌شان است. تبدیل آن به نمرات استاندارد در نقطه نظر دوم نشان داده خواهد شد.

ضریب همبستگی همچنین کوواریانس متغیرها در حالت استاندارد شده (نمرات z $z_۱$ و z_y)است. این مطلب از بازنویسی فرمول فوق به شکل زیر فهمیده می‌شود.

$$r_{Y۱} = \frac{\sum (X_۱ - \bar{X}_۱)(Y - \bar{Y})}{[\sum (X_۱ - \bar{X}_۱)^۲ \sum (Y - \bar{Y})^۲]^{۱/۲}}$$

$$= \frac{[1/(n-1)]\sum (X_1 - \bar{X}_1)(Y - \bar{Y})}{\{[1/(n-1)]\sum (X_1 - \bar{X}_1)^2 [1/n(n-1)]\sum (Y - \bar{Y})^2\}^{1/2}}$$

$$= \frac{۱}{n-۱} \frac{\sum (X_۱ - \bar{X}_۱)(Y - \bar{Y})}{s_۱ s_y}$$

$$= \frac{۱}{n-۱} \sum \frac{X_۱ - \bar{X}_۱}{s_۱} \frac{Y - \bar{Y}}{s_y}$$

$$\boxed{r_{y۱} = \frac{۱}{n-۱} \sum z_۱ z_۲}$$

بدین ترتیب ضریب همبستگی، کوواریانس نمرات z است. این فرمول نقش مهمی در اشتقاق‌های اساسی تحلیل‌های چند متغیره ایفا می‌کند.

از نقطه نظر سوم، ضریب همبستگی $r_{y۱}$ میانگین هندسی (ریشه دوم حاصل‌ضرب) دو ضریب رگرسیونی $b_{y۱}$ و $b_{۱y}$ است.

ضریب رگرسیون $b_{y۱}$ یک اندازه همبستگی نامتقارن با Y به عنوان متغیر وابسته و $X_۱$ به عنوان متغیر مستقل می‌باشد. تابع رگرسیون $Y = ۰/۵۴ + ۱/۰۵ x_1 + e$ در بالا محاسبه گردید. اگر متقابلاً $X_۱$ به عنوان متغیر وابسته و Y به عنوان متغیر مستقل درنظر گرفته شوند، تابع

رگرسیون دیگری $X_1 = b_0 + b_{1y}Y + e$ با ضریب رگرسیون دیگر $b_{\text{۱}y}$ به دست می‌آید. به راحتی می‌توان محاسبه نمودکه این تابع $X_1 =$ ۲/۹۶ + ۰/۳۷ $Y + e$ است.

اکنون مشخص می‌گردد که حاصل ضرب $b_{y\text{۱}}$ و $b_{\text{۱}y}$ با ضریب تعیین برابر است (مجذور ضریب همبستگی): ۰/۳۹=(۰/۳۷)(۱/۰۵). ضریب همبستگی r_{y1} ریشه دوم (جذر) این حاصل‌ضرب است. از این فرمول است که اشتقاق‌های اساسی را برای $b_{y\text{۱}}$، $b_{\text{۱}y}$ و r_{y1} به شرح زیر به دست می‌آوریم.

$$b_{y\text{۱}} = \frac{\sum (X_\text{۱} - \bar{X}_\text{۱})(Y - \bar{Y})}{\sum (X_\text{۱} - \bar{X}_\text{۱})^\text{۲}} = \frac{\text{تغییرات همگام}}{\text{تغییرات } X_1}$$

$$b_{\text{۱}y} = \frac{\sum (X_\text{۱} - \bar{X}_\text{۱})(Y - \bar{Y})}{\sum (Y - \bar{Y})^\text{۲}} = \frac{\text{تغییرات همگام}}{\text{تغییرات } Y}$$

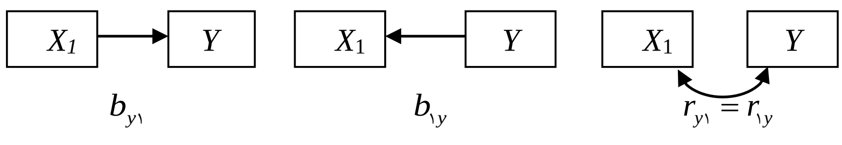
$$r_{y1} = \frac{\sum (X_1 - \bar{X}_1)(Y - \bar{Y})}{[\sum (X_1 - \bar{X}_1)^2 \sum (Y - \bar{Y})^2]^{1/2}} = \frac{\text{تغییرات همگام}}{[(\text{تغییرات } X)(\text{تغییرات } Y)]^{\text{۱/۲}}}$$

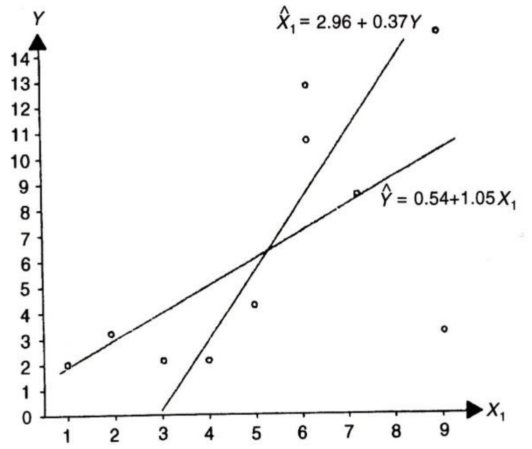
بر این اساس:

$$\boxed{r_{y\text{۱}} = (b_{y\text{۱}} b_{\text{۱}y})^{\text{۱/۲}}}$$

از لحاظ هندسی موضوع فوق به معنای آن است که دو تابع رگرسیون با ضرایب رگرسیون $b_{y\text{۱}}$ و $b_{\text{۱}y}$ وجود دارد که معمولاً با یکدیگر تفاوت دارند.آن‌ها فقط زمانی با هم برابرند که واریانس‌های $X_\text{۱}$ و Y برابر باشـــند. این دو تابع یکدیگر را در مرکز ثقل: $(\bar{X}_1, \bar{Y}) = (5/2,6)$ مطابق شـــکل ۳-۵ قطع می‌کنند.

از آنجا که r_{y1} میانگین هندســی دو ضـریب نامتقارن $b_{y\text{۱}}$ و $b_{\text{۱}y}$ اســت، یک اندازه همبســتگی متقارن به حســـاب می‌آید. بنابراین می‌توان ترتیب اندیس‌های آن را برعکس نمود و به صـــورت r_{1y} نوشت. در نمودارهای علّی این ویژگی متقارن به صورت یک کمان دوسویه نشان داده می‌شود. سه نمودار زیر برای ضرایب مربوطه قابل ترسیم است.





شکل ۳-۵ دو تابع رگرسیون متقاطع در مرکز ثقل

۷-۳-۵ ضرایب استاندارد شده

در بحث پیرامون ضــرایب همبســتگی به عنوان کواریانس متغیرهای اســتاندارد شــده، X_1 و Y به صورت نمرات z نو شته شدند. اکنون نظری می‌اندازیم به این که وقتی متغیرها به شکل ا ستاندارد شــده باشــند، ضــرایب رگرســیون چگونه خواهند شــد. در این حالت صــحبت از «ضــرایب اســتاندارد رگر سیون» یا «بتاها» خواهد بود و آن را با یک ستاره مثل b^*_{y1} و b^*_{1y} نشان می‌دهیم تا از ضرایب رگرسیون معمولی متمایز گردند.

استاندارد کردن در دو مرحله صورت می‌گیرد: کسر از میانگین و تقسیم بر انحراف معیار.

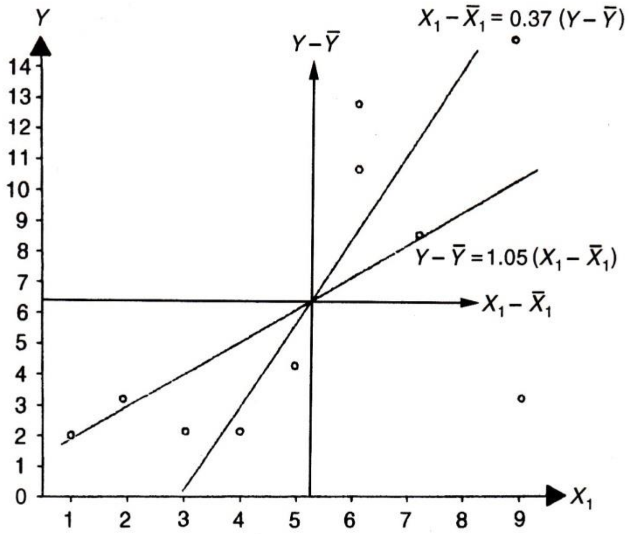
در مرحله نخســـت، میانگین $\bar{Y} = ۶$ را از هر یک از مقادیر متغیر Y و میانگین $\bar{X} = ۵/۲$ را از هر یک از مقادیر متغیر X_1 کم می‌کنیم.

به‌صــورت هندســی شــکل ۴-۵ بدســت می‌آید که مشــاهده می‌کنیم نقاط و همچنین خطوط رگر سیون در جای خود باقی مانده‌اند. تنها دو محور مختصات جابه‌جا شده‌اند بطوری که محور Y به $(Y-\bar{Y})$ و محور X_1 به $(X_1-\bar{X}_1)$ انتقال یافته است.

دو تابع رگرســیون را حالا روی مقادیر اولیه اجرا می‌کنیم. به عبارت دیگر ثابت‌های رگرســیون کنار گذاشته شده و ضرایب رگرسیون دست‌نخورده مانده‌اند. دو تابع حاصله عبارتند از:

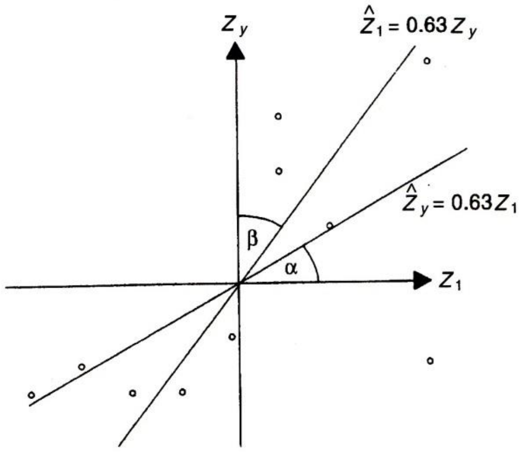
$(Y-\bar{Y}) = 1.05(X_1-\bar{X}_1)$ و $(X_1-\bar{X}_1) = 0.37(Y-\bar{Y})$.

در مرحله دوم ترکیب نقاط تغییر می‌کند، چون هر مقدار $Y-\overline{Y}$ بر $s_y=۴/۵۹$ تقسیم شده و هر مقدار $X_1-\overline{X}_1$ نیز بر $s_1=۲/۷۴$ تقسیم شده است و از آنجا که S_y از $s_۱$خیلی بزرگتر است، نقاط در طول محور Y بیشتر از محور $x_۱$ به یکدیگر فشرده می‌شوند. واریانس‌ها برابرشده‌اند.



شکل۴-۵ تحلیل رگرسیون با $X_1-\overline{X}_1$ و $Y-\overline{Y}$ به عنوان محورهای مختصات

در شکل ۵-۵ ترکیب جدید نقاط با محورهای $z_۱$ و z_y ترسیم شده‌اند. این شکل با ماتریس داده‌های متغیرهای استاندارد شده که در جدول ۳-۵ ارائه شده‌اند، مطابقت دارد.



شکل۵-۵ تحلیل رگرسیون با متغیرهای استاندارد شده به عنوان محورهای مختصات

مقادیر z_1 و Z_y روی شکل فوق نمایش داده شده‌اند. میانگین آن‌ها ۰ و انحراف معیار شان ۱ است. اگر شیوه همبستگی معمولی و رگرسیون را روی این نمرات z_1 و Z_y اجرا کنیم، طبق فرمولی که در این فصل به کار رفت، نتایج زیر حاصل می شود. ضریب همبستگی بین z_1 و Z_y معادل ۰/۶۳ می‌شود. این مقدار همان ضریب همبستگی بین X_1 و Y است. رگرسیون z_1 بر Z_y نیز دارای شیب ۰/۶۳ است؛ بدین ترتیب ضریب استاندارد رگرسیون b^*_{y1} برابر ضریب همبستگی r_{y1} (در حالت دو متغیره) می‌باشد. رگرسیون z_1 روی Z_y نیز ۰/۶۳ می‌شود؛ لذا باز هم $b^*_{1y} = r_{y1}$ است. دلیل آن روشن است، از قسمت فوق به خاطر می‌آوریم که ضریب همبستگی r_{y1} معادل میانگین هندسی ضرایب رگرسیون b_{y1} و b_{1y} است و این که دومی معمولاً فرق دارد، مگر زمانی که واریانس‌های X_1 و Y برابر باشند. این تساوی واریانس‌ها به لحاظ تعریفی برای متغیرهای استاندارد شده z_1 و Z_y صحت دارد، زیرا انحراف معیار آن ها ۱ است. بنابراین ۰/۶۳ $= b^*_{y1} = b^*_{1y} = r_{y1}$.

جدول ۳-۵ ماتریس داده‌ها

	X_1	Y	$z_1 = \frac{X_1 - \bar{X}_1}{s_1}$	$z_y = \frac{Y - \bar{Y}}{s_y}$
	۱	۲	۱/۵۳	۰/۸۷
	۲	۳	۱/۱۷	۰/۶۵
	۳	۲	۰/۸۰	۰/۸۷
	۴	۲	۰/۴۴	۰/۸۷
	۵	۴	۰/۰۷	۰/۴۴
	۶	۱۰	۰/۲۹	۰/۸۷
	۶	۱۲	۰/۲۹	۱/۳۱
	۷	۸	۰/۶۶	۰/۴۴
	۹	۳	۱/۳۹	۰/۶۵
	۹	۱۴	۱/۳۹	۱/۷۴
میانگین	۵/۲	۶	۰	۰
انحراف معیار	۲/۷۴	۴/۹۹	۱	۱

مورد اخیر را همچنین می‌توانیم موقعی که در شکل فوق با نظام مختصات $z_1 - z_y$ به زاویه‌ها نگاه کنیم، ببینیم. ضریب رگرسیون که تغییرات متغیر وابسته را به ازاء یک واحد افزایش در متغیر مستقل نشان می‌دهد، تانژانت زاویه بین خط رگرسیون و محور متغیر مستقل است. همان طور که در

شکل مشاهده می‌شود زاویه α بین $\hat{z}_y = ۰/۶۳\, z_1$ و محور $z_۱$ با زاویه β بین $\hat{z}_1 = ۰/۶۳\, z_y$ و محور z_y برابر است. در نتیجه شیب خط‌ها هم یکسان است.

۸-۳- ۵ آزمون معناداری

اکنون سومین هدف تحلیل رگرسیون دو متغیره را مورد بحث قرار می‌دهیم: قابلیت تعمیم همبستگی نمونه‌ای بین $X_۱$ و Y.

ضریب $b_{y1} = ۱/۰۵$ یک آماره نمونه‌ای است که برآوردی از آمار جمعیتی $B_{y1}.r_{y1} = ۰/۶۳$ می‌باشد و $r_{y1}^2 = ۰/۳۹$ نیز برآوردی از ρ_{y1} و ρ_{y1}^2 است.

به طور کلی دو آزمون معناداری را می‌توان اجرا نمود: یک آزمون برای ضریب همبستگی (یا ضریب تعیین) با فرض صفر $H_0 = \rho_{y1} = 0$ و یک آزمون برای ضریب رگر سیون با فرض صفر $H_0 : \beta_{y1} = 0$.

در حالت دو متغیره این آزمون‌ها یکسانند. ما در اینجا بین آن‌ها فرق می‌گذاریم، چون در تحلیل چند متغیره اهمیت دارد. در این جا آزمون‌های معمول برای ρ_{y1} و β_{y1} را مورد بحث قرار نمی‌دهیم، این آزمون‌ها را در هر کتاب آماری می‌توان پیدا کرد. به پیروی از گرین (۱۹۷۸، ص ۴۶) ما مدل شیوه مقایسه را به کار می‌بریم که به نتایج یکسانی می‌انجامد و برای موارد چند متغیره هم قابل تعمیم است. در این رویکرد مقایسه‌ای، دو مدل خلاصه شده و مدل کامل مورد مقایسه قرار می‌گیرد. بر اساس مدل خلاصه برای پیش‌بینی Y، عبارت $\beta_{y1}X_1$ ضروری نیست. این مطلب در راستای فرضیه صفر $H_0 : Y = \beta_0 + \Sigma$ است. در مقابل، مدل کامل، عبارت $b_{y1}X_1$ را شامل می‌سازد. این کار، فرضیه مخالف $H_a : Y = \beta_0 + \beta_{y1}X_1 + \Sigma$ را نتیجه می‌دهد.

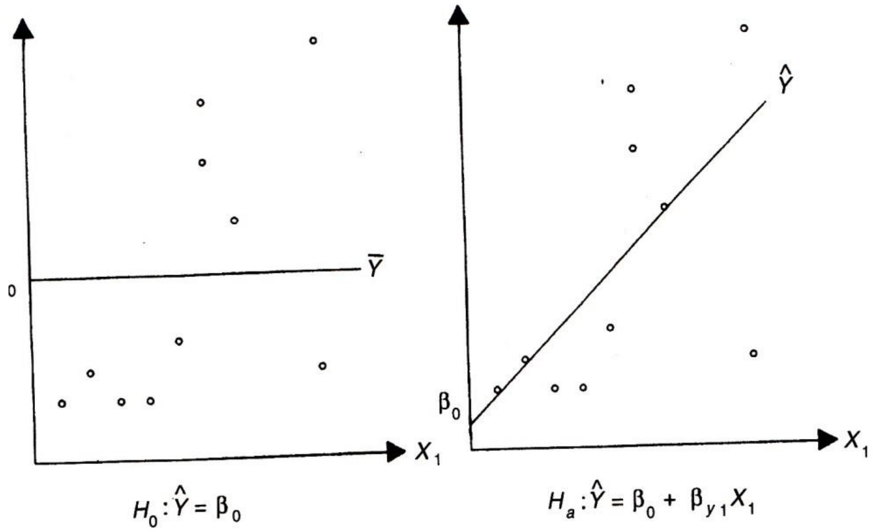
دو مدل مذکور را به طور هندسی هم می‌شود با هم مقایسه کرد (نگاه کنید به شکل ۶-۵). در مدل خلاصه β_0 برابر با $\bar{Y}$ است. پراکندگی حول خط میانگین که نشانه خطای پیش‌بینی است، توسط تغییرات $SSE_r = \Sigma(Y - \bar{Y})^2 = ۱۹۰$ نشان داده شده است که در بالا محاسبه شد. در مدل کامل $\bar{Y}$ را پیش‌بینی نمی‌کنیم، بلکه Y را پیش‌بینی می‌کنیم. خطای پیش‌بینی در اینجا $SSE_f = \Sigma(Y - \hat{Y})^2 = ۱۱۵/۴۳$ است. این دو مقدار تغییرات با یکدیگر مقایسه می‌شوند. اگر اختلاف $\Sigma(Y - \bar{Y})^2 - \Sigma(Y - \hat{Y})^2$ واقعی باشد، در این صورت مدل کامل بهتر از مدل محدود است. این اختلاف ما از خطای پیش‌بینی SSE_f را پس از تقسیم صورت و مخرج آن بر درجات آزادی مربوطه بدست می‌آوریم که به ترتیب $d_r - d_f$ و d_f هستند.

تعداد درجات آزادی برای مدل اختصاری $d_r = n - ۱ = ۹$ است، زیرا ما در میانگین یک درجه آزادی را در میانگین $\beta_0 = \bar{Y}$ از دست می‌دهیم که برای آن $\sum(Y - \bar{Y}) = ۰$ است. برای مدل

کامل، تعداد درجات آزادی ۸= ۱- $d_f = n$ ا ست، چون‌که β_0 و β_{y1} هر دو بایستی برآورد شوند. این منجر به اندازه F زیر می‌شود:

$$F = \frac{(SSE_r - SSE_f)/(dr - d_i)}{(SSE_f / d_f)}$$

$$= \frac{(۱۹۰-۱۱۵/۴۳)/(۹-۸)}{۱۱۵/۴۳/۸} = ۵/۱۷$$



شکل ۵-۶ نمایش هندسی معناداری آماری بر اساس مدل شیوه مقایسه

برای سطح معناداری از قبل فرض شده ۰/۰۵ و درجات آزادی یک و هشت به ترتیب برای صورت و مخرج، در جدول F، به مقدار F بحرانی ۵/۳۲ (تحت شرایط H_0) برمی‌خوریم. در مثال فوق مقدار $F = ۵/۱۷$ یافت شده از مقدار F جدول کمتر بوده، بنابراین فرض صفر را نمی‌توانیم رد کنیم.

این که چرا صورت در آزمون F شامل $SSE - SSE_f$ و مخرج آن شامل SSE_f ا ست، در آینده که درباره تحلیل واریانس بحث می‌کنیم روشن خواهد شد. مخرج SSE_f / d_f خطای واریانس $S_e^۲$ و برآوردی از $\delta_e^۲$ ا ست. این مقدار پراکندگی مقادیر منفرد ا ست که بعد از به کار بردن مدل کامل، باقی می‌مانند. صورت آزمون F مربوط می شود به مقدار ا ضافی مدل رگر سیون ($\hat{Y}$) در مقایسه با حالتی که این مدل نباشد ($\bar{Y}$). اگر این مقدار افزایش به اندازه پراکندگی مقادیر منفرد باشد (F=۱)، یا تفاوت جزئی و ناشی از تصادف باشد (F<۵/۳۲) مدل را نمی‌توان پذیرفت.

صورت و مخرج آزمون F را از راه دیگری هم می‌توان به دست آورد، یعنی با استفاده از ضرایب تعیین. واریانس خطا در مخرج نیز برابر با واریانسی است که از تفریق واریانس تبیین شده به وسیله مدل $r_{Y1}^{۲}$ از ۱ حاصل می شود، طوری که $S_e^{۲} = (۱ - r_{y۱}^{۲}) / df$. چنان چه مقدار مازاد در صورت مدل بر درجه آزادی مربوطه تقسیم گردد، می‌توان آن را به عنوان اختلاف بین بخش واریانس تبیین شده به وسیله مدل کل $(r_f^{۲} = r_{y۱}^{۲})$ و بخش تبیین شده به وسیله مدل خلاصه $(r_2^2 = ۰)$ بیان کرد. حاصل کار با آنچه در بالا محاسبه شد یکسان می‌شود (البته با در نظر گرفتن اندک خطای ناشی از گرد کردن عدد $r_f^2 = ۰/۳۹۳$ به ۰/۳۹):

$$F = \frac{(r_f^2 - r_r^2)/(d_r - d_f)}{(1 - r_f^2)/d_f}$$

$$= \frac{(0.393 - 0)/(9 - 8)}{(1 - 0.393)/8} = ۵/۱۷$$

این فرمول طبق مدل شیوه مقایسه از ارزش تعمیم‌پذیری بالایی برخوردار است. فرمول مزبور در تحلیل رگرسیون چندگانه، تحلیل واریانس و دیگر مدل‌های خطی تحلیل چند متغیره به کار برده می‌شود.

۵-۴ تحلیل رگرسیون چندگانه: تأثیر اشتغال و میانگین سن ازدواج بر بی‌فرزندی

بعد از توضیح مختصری که درباره تحلیل رگرسیون دو متغیره داده شد، اینک به موضوع رگرسیون چندگانه بر می‌گردیم. «چندگانه[1]» به این معناست که بیش از یک متغیر مستقل وجود دارد که البته در سطح سنجش کمّی اندازه‌گیری شده‌اند. در ابتدای این فصل ما مسأله تحقیق، نمودار علّی و ماتریس داده‌ها را برای رابطه بین متغیر وابسته Y (تغییرات بی‌فرزندی در یک دهه) و دو متغیر مستقل $X_۱$ (تغییر نسبت نیروی کار) و $X_۲$ (تغییر میانگین سن ازدواج) ارائه کردیم. طرز عمل تحلیل رگرسیون چندگانه که در ادامه مورد بحث قرار می‌گیرد، از روشی تقریباً شبیه با آنچه که در تحلیل رگرسیون دو متغیره مشاهده شد پیروی می‌کند.

۵-۴-۱ مدل مورد نظر

مدل خطی در اینجا پیچیده‌تر است، زیرا سه متغیر وجود دارد. الگویی که به وسیله این مدل ارائه می‌شود، دیگر خطی مستقیم در یک نظام مختصات $X_1 - Y$ نیست، بلکه صفحه‌ای در فضای سه بعدی $x_1 - x_2 - y$ است. این مدل برای جمعیت بدین گونه است: $y_i = \beta_0 + \beta_{y1.2}x_{i1} + \beta_{y2.1}x_{i2} + \varepsilon_i$. نمادهای Y، $X_۱$، i، β_0 و ε همان معنای حالت دو متغیره را

---

1. multiple

دارند. البته ضریب رگرسیون $\beta_{y۱}$ تغییر یافته است. این ضریب اکنون یک ضریب تفکیکی رگرسیون است و به صورت $\beta_{y۱.۲}$ نوشته می‌شود. مفهوم آن میزان تغییر $E(Y)$ به ازاء یک واحد افزایش $X_۱$ است، وقتی‌که به لحاظ $X_۲$ کنترل شود. به عبارت دیگر میزان تغییرات متغیر بی‌فرزندی به ازاء یک واحد افزایش در متغیر نیروی کار، هنگامی‌که متغیر سن زمان ازدواج ثابت بماند. به همین ترتیب $\beta_{۲,۱y}$ به عنوان تغییرات $E(Y)$ به ازاء یک واحد تغییر $X_۲$ در حالی‌که $X_۱$ کنترل شود تفسیر می‌شود، به عبارت دیگر میزان تغییرات متغیر بی‌فرزندی به ازاء هر واحد افزایش متغیر سن ازدواج است، زمانی‌که متغیر نیروی کار ثابت نگه داشته شود. این فرمول‌بندی‌ها در این جا ممکن است مشکل‌زا باشند، چون با تغییرات سر وکار دارد در حالی‌که سه متغیر مذکور خود شان هم به عنوان تغییرات یک دهه (از ۱۹۶۰ تا ۱۹۷۰) عمل می‌کنند. نمونه‌ای از تمرین کاربرد صحیح زبان در این مثال به کار گرفته شد. ما معتقدیم که حتی محاسبات پیچیده را هم می‌توان به زبانی بیان کرد که ضمن حفظ کامل جنبه ریاضی آن، با جامعه هم در ارتباط باشد.

مقادیر مورد انتظار Y به صورت $E(Y)$ یا $\hat{Y}$ نوشته می‌شوند:

$$E(Y)=\hat{Y}=\beta_0+\beta_{y1.2}X_1+\beta_{y2.1}X_2$$

فرق Y و $\hat{Y}$ در عبارت خطاست: $e=y-\hat{y}$.

این عبارت خطا دارای یک مقدار قابل انتظار $E(\varepsilon)=0$ و یک واریانس ثابت $\delta^۲_\Sigma$ است. سعی می‌شود که این عبارت با هیچ یک از متغیرهای X_2 و X_1 رابطه‌ای نداشته باشد. این بدان معناست که مقدار باقی مانده ε مکمل قائم X_1 و X_2 با توجه به Y است.

در مورد نمونه، بجای حروف یونانی، حروف لاتین بکار برده می‌شود:

$$Y=b_0+b_{y1/2}X_1+b_{y2/1}X_2+e$$

$$E(Y)=\hat{Y}=b_0+b_{y1.2}X_1+b_{y2.1}X_2$$

$$e=Y-\hat{Y}$$

۲-۴-۵ رویکرد هندسی

مدل خطی یاد شده، حالا در یک فضای سه بعدی طرح شده است. اکنون تصویر ذهنی آن شامل صفحه‌ای با دو محور نیست که در آن یک خط مستقیم برآورد می شود، بلکه یک فضا با سه محور است که در آن یک سطح برآورد می‌گردد.

در شکل ۷-۵ ما سه محور $X_۱$، $X_۲$ و Y همراه با سطح تخت $\hat{Y}=-۲/۶۸+۰/۷۸X_1+۱/۱۶X۲$ را رسم کرده‌ایم. برای هر واحد تحلیل، یک جفت عدد ($X_۱$ و $X_۲$) در کف صفحه به صورت ضربدر، و نیز مقدار واقعی Y به صورت یک نقطه سیاه و مقدار برآورد شده‌ی آن $\hat{Y}$ به صورت یک خط تیره مشخص شده است. مقادیر بعدی $\hat{Y}$ در صفحه تخت جای گرفته و از

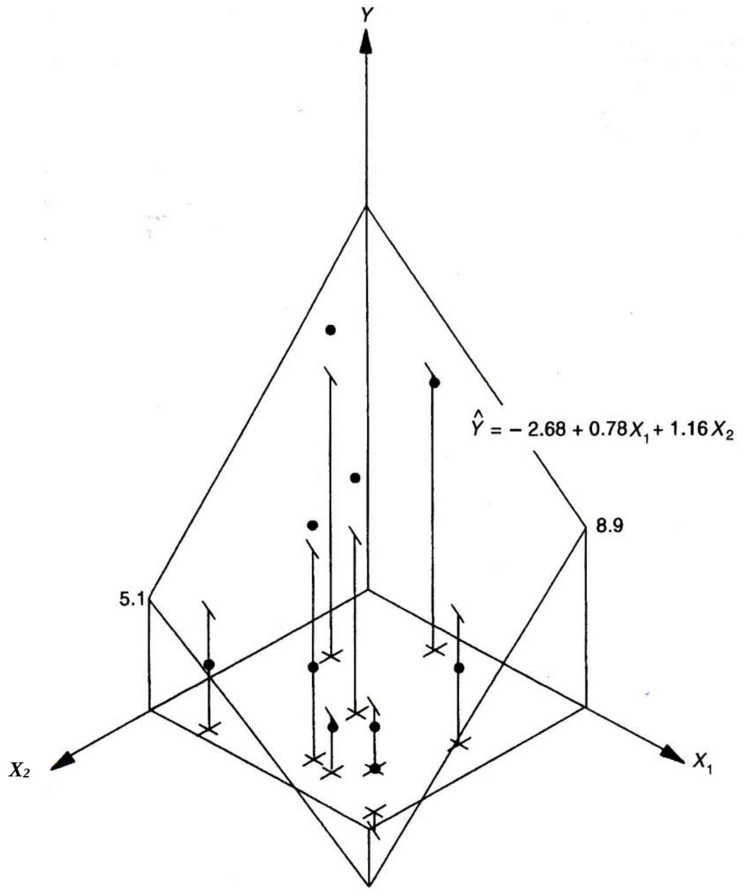
طریق قرار دادن مقادیر X_1 و $X_۲$ در تابع خطی محاسبه می‌شوند. به طور مثال برای واحد دهم و آخرین واحد تحلیل ۱۲/۲۴۳ = (۷)۱/۱۶+ (۹) ۰/۷۸ +۲/۶۸ – = $\hat{Y}$ به دست می‌آید. مقدار واقعی Y (Y=۱۴) بزرگتر است، از این رو، بالای صفحه قرار گرفته است (بالاترین نقطه در شکل). از سوی دیگر برای واحد نهم تحلیل (یکی به آخر) ۵/۴۷=(۱)۱/۱۶+ (۹)۲/۶۸+۰/۷۸ – = $\hat{Y}$ و Y=۳ به دست می‌آید. در این جا Y کوچکتر از $\hat{Y}$ بوده، لذا در زیر صفحه واقع شده است (نقطه انتهایی سمت چپ شکل). درست مثل حالت دو متغیره، مقادیر خطا $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$ به صورت تناوبی مثبت و منفی هستند، طوری که حاصل جمع آن‌ها برابر صفر است: $\sum e_i =$ ۰ برای یافتن بهترین سطحی که از هر سطح ممکن دیگر بهتر با نقاط جور باشد، ملاک کمترین مجذورات اعمال خواهد شد.

همان طور که ملاحظه می‌شود، بازبینی ساده نمودار نقطه‌ای اکنون بسیار پیچیده‌تر از وضعیت دو بعدی است. این جا تجمع نقاط در بالا و پایین سطح تخت قرار گرفته است. در صورت داشتن چهار متغیر یا بیشتر حتی چنین تصویری را هم نمی‌توان رسم کرد. تابع خطی که در این حالت‌ها برآورد می‌شود «اَبَر صفحه»[1] نامیده می‌شود و فراتر از ادراک بینایی ماست. امّا اصول آن یکسان باقی می‌ماند.

اگر سطحی را در نظر بگیریم که با سطح زیرین $X_1 - X_2$ موازی بوده و از نقطه $\bar{Y} =$ ۶، عمود بر محور Y بگذرد، این سطح معرّف وضعیتی است که در آن رابطه‌ای بین $X_1 - X_2$ از یک طرف و Y از طرف دیگر وجود ندارد. بخشی از نقاط نمودار در بالای این سطح و پاره‌ای در پایین آن قرار می‌گیرند. پراکندگی نقاط نسبت به این سطح، همان توزیع مقادیر Y دور میانگین آن هاست، بدون این که $X_1 - X_2$ نقشی داشته باشند، و این نقاط به وسیله تغییرات کل $\Sigma(Y-\bar{Y})^2$ نمایش داده می‌شوند.

اما سطح برآورد شده $\bar{Y}$ موازی با سطح زیرین نیست، بلکه دارای شیب رو به بالا با محورهای $X_۱$ و $X_۲$ است. پراکندگی نقاط در اطراف این سطح برآورد شده، تغییرات باقی مانده $\Sigma(Y-\hat{Y})^2$ است، یعنی پراکندگی ای که بعد از برآورد شدن بهترین سطح انطباق با نقاط حاصل می‌شود.

1. Hyperplane



شکل ۷- ۵ طرح رگرسیون چندگانه در یک فضای $X_۱ - X_۲ - Y$

تفاوت بین تغییرات کل و تغییرات باقیمانده نشانگر آن است که سطح برآورد شده‌ی $\hat{Y}$ تا چه حد بهتر از سطح $\bar{Y}$ است، و به و سیله تغییرات تبیین کننده $\Sigma(\hat{Y} - \bar{Y})^2$ نشان داده می شود. همانطور که می‌دانیم تقسیم تغییرات کل به دو بخش تبیین کننده و باقی مانده، انباشتی است: $\Sigma(\hat{Y} - \bar{Y})^2 = \Sigma(\hat{Y} - \bar{Y})^2 + \Sigma(Y - \hat{Y})^2$ یا $SST = SSR + SSE$ (T برای کل، R برای رگرسیون و E برای خطا).

لازم به یادآوری است که در موارد چند متغیره نیز که نمایش عینی نمودار نقاط ممکن نیست، رعایت پیش‌فرض‌های خطی‌بودن، تجانس و عدم همپوشی و همچنین پیش‌فرض‌های دیگر مثل انباشتی و هم‌خطی نبودن ضرورت دارد. برای آزمون این پیش‌فرض‌ها شیوه‌های محاسباتی وجود دارد که در بخش‌های بعدی درباره آن‌ها بحث خواهد شد.

بازنگری نمودار پراکندگی باقی مانده‌ها در مقایسه با $\hat{y}$ یا یک متغیر مستقل x_J می‌تواند در این زمینه مفید باشد. در ادامه در این باره بیشتر توضیح داده می‌شود.

رویکرد هندسی که در این جا بیان شد متغیرهای X_1 و X_2 و Y را به عنوان محور و واحدهای تحلیل را به عنوان نقاطی در بین فضـــای این محورها در نظر می‌گیرد. در این حالت ما از «مدل سطحی پاسخ‌ها» صحبت می‌کنیم. حالت عکس آن که ده واحد تحلیل از محورها و درآن‌ها سه متغیر در این فضای ده بعدی به عنوان نقاط در نظر گرفته می شوند «مدل برداری» نامیده می شود. ما در این جا به توضیح طرز کار «مدل سطح پاسخ‌ها» بسنده می‌کنیم.

۵-۴-۳ اهداف روش

تحلیل رگرسیون چندگانه به عنوان یک شیوه محاسباتی برای چهار منظور بکار برده می شود. سه مورد از آن‌ها در تحلیل رگرسیون دو متغیره بیان شد و هدف چهارم اکنون اضافه می‌شود، زیرا چند متغیر مستقل وجود دارد.

با نگاهی به مثال بی‌فرزندی و متغیرهای X_1 و X_2 به عنوان متغیرهای مســتقل، این هدف‌های چهارگانه به شرح زیر است:

۱- ما به دنبال تابع $Y = b_0 + b_{y1.2}X_1 + b_{y2.1}X_2 + e$ هســتیم که رابطه خطی X_2, X_1 و Y را بهتر از هر تابع دیگری نشان دهد. این هدف با محاسبه دو ضریب رگرسیون $b_{y2.1}, b_{y1.2}$ و ثابت b_0 حاصل می‌شود.

۲- ما قدرت رابطه بین ترکیب خطی X_1 و X_2 از یک ســـو، و Y را از ســـوی دیگر می‌آزماییم و همچنین ازجنبه پیش‌بینی می‌خواهیم بدانیم چه مقدار از واریانس Y به وســـیله واریانس‌های X_1 و X_2 با هم، به حســاب می‌آید. این هدف به ترتیب با محاســبه ضــریب همبســتگی چندگانه $R_{y.12}$ و مجذور آن به دست می‌آید.

۳- ما بررسی می‌کنیم که آیا رابطه مشاهده شده در نمونه به جمعیت مورد مطالعه قابل تعمیم هست یا خیر. این کار به وسیله آزمون‌های معناداری انجام می‌شود.

۴- ما تحقیق می‌کنیم که کدام متغیر مســـتقل در تبیین Y از همه مهم‌تر اســـت، یعنی می‌خواهیم تأثیرات X_1 بر Y و X_2 بر Y را با یکدیگر مقایسه کنیم. برای این منظور وزن‌های بتا محاسبه می‌شوند (که با علامت ستاره آن را مشخص می‌کنیم: b^*).

۵-۴-۴ تحلیل دومتغیره مقدماتی

برای آمادگی جهت محاســبه تحلیل رگرســیون چندگانه، ابتدا چند تحلیل اضـافی دو متغیره Y روی X_2 ، X_1 روی X_2 و X_2 روی X_1 را انجام می‌دهیم.

این تحلیل‌ها به همان روش تحلیل Y روی X_1 انجام می شودکه در بخش‌های قبلی با آن آ شنا شدیم. نتایج به این شرح است:

$Y = 0.54 + 1.05X_1 + e,$ با $b_0 = 0.54, b_{y1} = 1.05$ و $r_{y1} = 0.63$

$Y = 0.61 + 1.35X_2 + e,$ با $b_0 = 0.61, b_{y2} = 1.35$ و $r_{y2} = 0.79,$

$X_1 = 4.23 + 0.24X_2 + e,$ با $b_0 = 4.23, b_{12} = 0.24$ و $r_{12} = 0.24$

$X_2 = 2.77 + 0.24X_1 + e,$ با $b_0 = 2.77, b_{21} = 0.24$ و $r_{21} = 0.24$

از این که ضـــرایب b_{12} و b_{21} برابر هســـتند (هر دو مســـاوی۰/۲۴ هســـتند) تعجّب نکنید، چون در توزیع‌های $X_۲$ و $X_۱$ به ترتیب $s_1 = ۲/۷۴$ و $s_2 = ۲/۷۱$ هســـتند و قبلاً دریافتیم که هرگاه دو توزیع یکسان با شند، $b_{12} = b_{21}$ خواهد بود. ضریب همبستگی r_{12} هم برابر ۰/۲۴ ا ست به خاطر این که میانگین هندسی دو ضریب رگرسیون است. علاوه بر این، حالا می‌توانیم انتظار داشته باشیم که ضـــرایب اســـتاندارد رگرســـیون، b^*_{21}, b^*_{12} هر دو برابر ۰/۲۴ باشـــند، زیرا در حالت دو متغیره این ضرایب با $r_{۱۲}$ برابر هستند.

۵-۴-۵ محاسبه تابع رگرسیون

اولین هدف تحلیل رگرسیون چندگانه محاسبه ضرایب $b_{y2.1}, b_{y1.2}$ و b_0 است. ضرایب $b_{y2.1}, b_{y1.2}$ ضرایب «تفکیکی» رگرسیون هستند، به این معنی که رابطه نامتقارن بین دو متغیر با کنترل اثر یک متغیر سوم صورت گرفته است. این کنترل ضروری است. مثلاً $b_{y۱}$ را در نظر بگبرید، این ضریب به ما می‌گوید تا چه اندازه تغییرات ده ســـاله ی بی‌فرزندی (Y) به ازاء هر واحد افزایش در متغیر نیروی کار ($X_۱$) تغییر می‌یابد. اما تغییرات سن زمان ازدواج ($X_۲$) در اینجا ما را به ا شتباه می‌اندازد، زیرا $X_۲$ با $X_۱$ و Y هر دو رابطه دارد. از ســـوی دیگر $b_{y۲}$ را ملاحظه کنید. در این جا $X_۱$ نقش مخدوش‌کننده‌ای دارد. به خاطر این که با هر دو متغیر $X_۲$ و Y رابطه دارد. بدین ترتیب معلوم می شود که ضریب $b_{y۱}$نشان نمی‌دهد که Y تا چه حد از $X_۱$ تأثیر می‌پذیرد. برای این که تأثیر آن را به شکل خالص مشخص کنیم، ناگزیر از کنار زدن اثر $X_۲$ هستیم. همین مطلب در مورد $b_{y۲}$ و کنار گذاشتن تأثیر $X_۱$ نیز وجود دارد. بنابراین شیوه محاسبه ضریب رگرسیون تفکیکی، ابتدا شامل کنار زدن عوامل مخدوش‌کننده به منظور یافتن شکل خالص رابطه نامتقارن است.

برای محاسبه $b_{y1.2}$ ابتدا تأثیر $X_۲$ برY و $X_۲$ بر $X_۱$ را کنار می‌زنیم. آنگاه می‌توانیم در باره میزان تأثیر $X_۱$ بر Y که از تأثیرات مخدوش‌کننده بری اســـت، قضـــاوت کنیم. ضـــریب $b_{y2.1}$ هم به همین شکل محاسبه می‌شود. بعد از آن محاسبه b_0 سرراست خواهد بود.

البته می‌توان نشان داد که برگرفتن تأثیرات از Y ضروری نیست. اگر در محاسبه $b_{y1.2}$ تنها اثر X_2 از X_1 (و نه تأثیر X_2 از Y) برداشته شود، خواهیم دید که نتایج یکسان است. درمورد $b_{y2.1}$ هم همین طور است. این شیوه به شرح زیر است.

در مرحله نخســـت یک تحلیل رگرســـیون دو متغیره X_1 روی X_2 را اجرا می‌کنیم. مقادیر برآورد شــده $\hat{X}_1$ محاسـبه و تفاوت $X_1 - \hat{X}_1$ نمرات باقی مانده را نشــان می‌دهد. توزیع این نمرات باقی مانده مشخص می‌کند که بعد از این که واریانس مشترک با $X_1 - \hat{X}_1$ کنار گذاشته شود X_1 تا چه حد باز هم تغییر می‌کند. پس از آن یک تحلیل رگرســـیون دو متغیره Y روی $X_1 - \hat{X}_1$ اجرا می‌شود و ضریب $b_{y1.2}$ به دست می‌آید.

محاســبات مربوطه در جدول ۴-۵ گرد آمده اســت. از تحلیل‌های دو متغیره مقدماتی پی بردیم که: $\hat{X}_1 = 4.23 + 0.24X_2$.

تحلیل رگرســـیون دو متغیره Y روی $X_1 - \hat{X}_1$ به : $\hat{Y} = 6 + 0.78(X_1 - \overline{X}_1)$ ، منجر می‌شود. در نتیجه $b_{y1.2} = 0.78$.

در مرحله دوم ضــریب رگرســیون تفکیکی $b_{y2.1}$ را به طور مشــابهی محاســبه می‌کنیم، که اثر X_2 بر Y را با کنترل X_1 نشـــان می‌دهد. در می‌یابیم که $\hat{X}_2 = 2.77 + 0.24X_1$. (نگاه کنید به جدول۵-۵).

تحلیل رگر سیون دو متغیره Y روی $x_2 - \hat{x}_2$ به $\hat{Y} = 6 + 1.16(X_2 - \hat{X}_2)$ می‌انجامد. نتیجه می‌گیریم $b_{y2.1} = 1.16$.

جدول ۴-۵

X_1	X_2	$\hat{X}_1$	$X_1 - \hat{X}_1$	Y
۱	۱	۴/۴۷	-۳/۴۷	۲
۲	۶	۵/۶۸	-۳/۶۸	۳
۳	۳	۴/۹۶	-۱/۹۶	۲
۴	۲	۴/۷۲	-۰/۷۲	۲
۵	۲	۴/۷۲	۰/۲۸	۴
۶	۵	۵/۴۴	۰/۵۶	۱۰
۶	۹	۶/۴۱	-۰/۴۱	۱۲
۷	۴	۵/۲۰	۱/۸۰	۸
۹	۱	۴/۴۷	۴/۵۳	۳
۹	۷	۵/۹۳	۳/۰۷	۱۴

برای محاسبه مقدار ثابت b_0 فرمولی مشابه آنچه برای دو متغیره بود به کار می‌رود:

$$b_0 = \overline{Y} - b_{y1.2}\overline{X}_1 - b_{y2.1}\overline{X}_2 = 6 - (0.78)(5.2) - (1.16)(4) = -2.68$$

جدول ۵-۵

X_1	X_2	$\hat{X}_2$	$X_2-\hat{X}_2$	Y
۱	۱	۳/۰۱	-۲/۰۱	۲
۲	۶	۳/۲۴	-۲/۷۶	۳
۳	۳	۳/۴۸	-۰/۴۸	۲
۴	۲	۳/۷۲	-۱/۷۲	۲
۵	۲	۳/۹۵	-۱/۹۵	۴
۶	۵	۴/۱۹	۰/۸۱	۱۰
۶	۹	۴/۱۹	۴/۸۱	۱۲
۷	۴	۴/۴۳	-۰/۴۳	۸
۹	۱	۴/۹۰	-۳/۹۰	۳
۹	۷	۴/۹۰	۲/۱۰	۱۴

اکنون می‌توانیم تابع رگرسیون چندگانه که نشان دهنده بهترین سطح تخت برآورد شده از طریق ols (کمترین مجذورات) است را بنویسیم. بهترین دلیلش این است که از هر سطح دیگری بهتر می‌تواند با ده نقطه نمودار پراکنش انطباق حاصل کند:

$$Y=-2.68+0.78X_2+e \quad \text{یا} \quad \hat{Y}=-2.68+0.78X_1+1.16X_2$$

تعبیر و تفسیر بی‌فرزندی بدین شرح است. وقتی تغییرات ده ساله میزان مشارکت در نیروی کار و میانگین سن ازدواج زنان برابر ۰ باشد، آنگاه یک کاهش به میزان ۲/۶۸- درصد در تغییرات ده ساله زنان بدون فرزند وجود دارد. وقتی که تغییر ده ساله در میانگین سن ازدواج ثابت باشد، به ازاء یک واحد افزایش در متغیر نیروی کار، افزایشی معادل ۰/۷۸ را در تغییرات بی‌فرزندی به دنبال خواهد داشت، و زمانی که تغییرات درصد زنان شاغل ثابت بماند به ازاء هر واحد افزایش میانگین سن ازدواج، بی‌فرزندی ۱۶ /۱ درصد افزایش پیدا می‌کند.

از این نتایج به طور خودکار نمی‌توان چنین استنباط کرد که تأثیر عامل سن ازدواج (۱/۱۶) بیش از تأثیر عامل نیروی کار (۰/۷۸) است. بخاطر اینکه ضرایب $b_{y1.2}$ و $b_{y2.1}$ برای مقایسه دو جانبه تأثیرات مناسب نیستند. چنین مقایسه‌ای درباره اهمیت عوامل علّی تنها زمانی مجاز است که پراکندگی دو متغیر $X_۱$ و $X_۲$ یکسان باشد که در مثال ما یک حالت تصادفی است. این وزن تأثیرات، هنگام بحث درباره هدف چهارم، از روی وزن‌های بتا محاسبه خواهد شد.

به طور خلاصه، تا این جا ما با هدف نخست در تحلیل رگرسیون چندگانه سر وکار داشتیم که به محاسبه ضرایب تفکیکی رگرسیون و تعبیر و تفسیر آن اختصاص دارد. یک ضریب تفکیکی رگرسیون از طریق اجرای تحلیل دو متغیره به دست می‌آید که در آن Y متغیر وابسته، و متغیر مستقل باقی‌مانده $X_i-\hat{X}_i$ است که طی آن همبستگی X_i با متغیرهای مستقل، از آن‌ها حذف

شـده اسـت. تنها زمانی حذف تأثیر مخدوش‌کننده غیر ضـروری اسـت که متغیرهای مسـتقل با هم رابطه‌ای نداشته باشند، چون در این حالت ضریب تفکیکی رگرسیون با ضریب رگرسیون دو متغیره $b_{y۱}$ برابر است.

۶-۴-۵ توان رابطه و واریانس تبیین شده

حال به هدف دوم از تحلیل رگرسیون چندگانه می‌رسیم، یعنی محاسبه همبستگی خطی بین Y از یک‌سو و $X_۱$ و $X_۲$ از سوی دیگر، به وسیله ضریب همبستگی چندگانه $R_{y.12}$. مجذور $R_{y.12}$ ضریب تعیین چندگانه نامیده می‌شود و معرف بخش واریانس تبیین شده است، چنان که در مورد تحلیل دو متغیره بیان شد. ابتدا از محاسبه $R_{y.12}$ شروع می‌کنیم.

ضریب همبستگی چندگانه $R_{y.12}$ اندازه‌ای از همبستگی خطی بین Y و ترکیب متغیرهای $X_۱$ و $X_۲$ اسـت. بنابراین ابتدا ما نمرات ترکیب خطی $\hat{Y} = b_0 + b_{y1.2}X_1 + b_{y2.1}X_2$ را محاسـبه می‌کنیم. بعد از آن به محاسبه ضریب همبستگی مرتبه صفر r_y بین Y و $\hat{Y}$ می پردازیم. این ضریب $r_{y.۱۲}$ است. با قرار دادن مقادیر X_1 و $X_۲$ در تابع $\hat{Y} = -2.68 + 0.78X_1 + 1.16X_2$ نمرات $\hat{Y}$ به دست آمده‌اند.

به منظور آماده کردن سـایر محاسـبات، باقی‌مانده‌های $Y - \hat{Y}$ و مجذور آن‌ها را نیز اضـافه کرده‌ایم (جدول ۶-۵).

جدول ۶-۵

$X_۱$	$X_۲$	$\hat{Y}$	Y	$Y-\hat{Y}$	$(Y-\hat{Y})^۲$
۱	۱	-۰/۷۴	۲	۲/۷۴	۷/۵۰
۲	۶	۵/۸۴	۳	-۲/۸۴	۸/۰۶
۳	۲	۳/۱۳	۲	-۱/۱۳	۱/۲۷
۴	۲	۲/۷۵	۲	-۰/۷۵	۰/۵۶
۵	۲	۳/۵۲	۴	۰/۴۸	۰/۲۴
۶	۵	۷/۷۸	۱۰	۲/۲۲	۴/۹۷
۶	۹	۱۲/۴۲	۱۲	-۰/۴۲	۰/۱۸
۷	۴	۷/۴۰	۸	۰/۶۰	۰/۳۶
۹	۱	۵/۴۷	۲	-۲/۴۷	۶/۰۸
۹	۷	۱۲/۴۳	۱۴	۱/۵۷	۲/۴۷
جمع				۰	۳۱/۷۰

محاسبه ساده ضریب همبستگی (همبستگی مرتبه صفر) بین Y و $\hat{Y}$، ضریب $r_{y\hat{y}} = ۰/۹۱$ را به دست داد. از این جا نتیجه می شود $R_{y.12} = ۰/۹۱$. بدین ترتیب یک همبستگی خطی مثبت بین میزان تغییرات بی‌فرزندی در یک دهه و ترکیب دو متغیر میزان تغییرات مشـارکت در نیروی کار و

سن ازدواج وجود دارد. این رابطه بسیار قوی است، چون ضریب $R_{y.12}$ همچون ضریب همبستگی مرتبه صفر دارای حداکثر ۱ است (حداقل آن هم ۰ است).

از لحاظ هندسی این ضریب مبین آن است که این ده نقطه در فضای سه بعدی تا چه حد با سطح تخت انطباق دارند.

در مدل برداری که در اینجا بحث نشده است، $R_{y.12}$ کسینوس زاویه بین Y و $\bar{Y}$ در فضای ده بعدی است.

چنان که می‌دانیم مجذور $R^2_{y.12}$ را می‌توان به عنوان بخشی از واریانس تبیین کننده تعبیر نمود. این ضریب تعیین چندگانه را به شیوه‌های مختلفی می‌توان حساب کرد. یک راه مثل قبل از طریق محاسبه $R_{y.12}$ و مجذور کردن آن است. حاصل آن $R^2 = ۰/۸۳$ می‌شود. در نتیجه ۸۳٪ واریانس تغییرات ده ساله بی‌فرزندی به وسیله ترکیب واریانس تغییرات شاغل بودن و سن ازدواج در یک دهه تبیین می‌گردد.

این تفسیر وقتی روشن‌تر خواهد شد که به افزایشی بودن تقسیم تغییرات Y به دو بخش تبیین‌شده و تبیین‌نشده به طور یکسان همچون تحلیل دو متغیره توجه کنیم:

$$\Sigma(Y-\bar{Y})^2 = \Sigma(\hat{Y}-\bar{Y})^2 + \Sigma(Y-\bar{Y})^2$$

$$\text{SST} = \text{SSR} + \text{SSE}$$

تغییرات تبیین نشده + تبیین شده = کل

ما تغییرات کل ارزش‌های Y را محاسبه کردیم: $\Sigma(Y-\bar{Y})^2 = ۱۹۰$. تغییرات تبیین شده $\Sigma(Y-\bar{Y})^2$ را از سه طریق می‌توان به آسانی، از نمرات $\hat{Y}$ جدول استنتاج کرد. یا $\bar{Y}$ را از $\hat{Y}$ کم کرده و مجموع مجذورات آن را حساب می‌کنیم، یا این که به طور ساده تغییرات نمره‌های $\hat{Y}$ یعنی $\Sigma(\hat{Y}-\bar{Y})^2$ را محاسبه می‌کنیم، زیرا میانگین $\hat{Y}$ نمره‌های $\hat{Y}$ همیشه برابر $\bar{Y}$ است. راه سوم این است که تغییرات تبیین نشده $\Sigma(Y-\hat{Y})^2 = ۳۱/۷۰$ را به دست آورده و از تغییرات کل $\Sigma(Y-\bar{Y})^2 = ۱۹۰$ کم کنیم. حاصل آن می‌شود $\Sigma(\hat{Y}-\bar{Y})^2 = ۱۵۸/۳۰$.

ضریب تعیین چندگانه برابر است با نسبت تغییرات تبیین‌شده به تغییرات کل:

$$R^2_{y.12} = \frac{\Sigma(\hat{Y}-\bar{Y})^2}{\Sigma(Y-\bar{Y})^2} = \frac{158.30}{190} = 0.83$$

اگر صورت و مخرج کسر فوق را بر ۱-۱۰ تقسیم کنیم طبعاً به جای تغییرات، نسبتی از واریانس‌ها را بدست می‌آوریم که به یک نسبت، کوچک شده است.

روش‌های متعدد دیگری هم برای محاسبه $R^۲$ وجود دارد. تفسیر PRE (مقیاس پیش‌بینی) که قبلاً توضیح دادیم یکی از این روش‌هاست که در اینجا بکار گرفته می‌شود. راه‌های دیگر به دست آوردن ضریب تعیین عبارتند از:

از طریق ضرایب همبستگی و بتاها : $R^2_{y.12} = r_{y1}b^*_{y1.2} + r_{y2}b^*_{y2.1}$

از طریق ضرایب همبستگی و همبستگی تفکیکی : $R^2_{y.12} = r^2_{y1} + r^2_{y2.1}(1-r^2_{y1})$

در این تفسیرها محاسبه بتاها و ضرایب همبستگی تفکیکی ضروری است. توضیحات بیشتر در این باره در قسمت تحلیل مسیر (فصل ۶) ارائه خواهد شد.

۷-۴- ۵ ضرایب تفکیکی استاندارد شده رگرسیون

در این قسمت ابتدا درباره چهارمین هدف از تحلیل رگرسیون چندگانه صحبت می‌کنیم، آنگاه به سراغ مسأله تعمیم آماری نتایج حاصل از نمونه به جامعه می‌رویم.

در قسمت‌های پیش گفتیم که ضرایب تفکیکی رگرسیون $b_{y۱.۲}$ و $b_{y۲.۱}$ به بیان دقیق آن، با یکدیگر قابل مقایسه نیستند و این کار تنها در شرایطی امکان‌پذیر است که پراکندگی $X_۱$ و $X_۲$ یکسان باشد که استثنائاً در مثال ما پیش آمد. لذا، جهت مقایسه دو جانبه اثر $X_۱$ بر Y و اثر X_2 بر Y، نمره‌ها بایستی دارای پراکندگی یکسان باشند. اکنون می‌دانیم که استاندارد کردن، روشی است که انحراف معیار در آن برابر ۱ است. در نتیجه اگر ما ابتدا متغیرها را استاندارد نموده و سپس یک تحلیل رگرسیون چندگانه به عمل آوریم، ضرایب رگرسیون حاصل به صورت دو به دو قابل مقایسه خواهند بود، طوری که برآورد اهمیت تأثیرات ممکن خواهد شد. این ضرایب رگرسیون را «ضرایب تفکیکی استاندارد رگرسیون» یا «بتا» گویند و به وسیله یک ستاره مشخص می‌شوند، مثل b^*.

بر این اساس شیوه دقیق دیگر برای محاسبه بتاها، بدین گونه است. ابتدا نمره های $X_۱$ به نمرات z تبدیل می‌شوند $z_۱ = (X_۱ - \bar{X})/s_۱$، نمره های $X_۲$ به $z_۲ = (X_۲ - \bar{X}_۲)/s_۲$ و نمره‌های Y به $z_y = (Y - \bar{Y})/s_y$. بعد از آن محاسبه تابع رگرسیون چندگانه که قبلا در همین فصل شرح دادیم (قست ۵-۴-۵) مجدداً روی نمره‌های z انجام می‌شود. این کار به معادله‌ای می‌انجامد که فاقد مقدار ثابت است (زیرا نمرات z شامل انحراف از میانگین هستند و انحراف از میانگین دربرگیرنده ی نوعی رجوع به مبنا می‌باشد) و شامل ضرایب بتا به عنوان ضریب رگرسیون است: $z_y = b^*_{y1.2}z_1 + b^*_{y2.1}z_2 + e$.

به کار بردن این شیوه می‌تواند تمرین خوبی برای خواننده باشد. نتایج عبارتند از: $b^*_{y1.2} = 0.46$ و $b^*_{y2.1} = 0.68$.

امّا با تعریفی که از ریاضـی دانان به عنوان افراد باهوش راحت‌طلب[1]، در ذهن داریم، می‌خواهیم روش کوتاه تری را پیدا کنیم. بدین منظور، به راحتی می‌توان نشـان داد که یک ضـریب بتا معادل حاصل ضرب b نظیر آن در نسبت s_x / s_y (انحراف معیار متغیر مستقل X بر انحراف معیار متغیر وابسته Y) است. این فرمول را برای حالت دو متغیره (با متغیرهای X و Y) نشان دادیم و برای حالت چند متغیره نیز به همین صورت است.

چنان که می دانیم:

$$b_{yx} = \frac{covariation..X, Y}{variation\ X}$$

$$b_{yx} = \frac{\Sigma(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{\Sigma(X-\bar{X})^{۲}}$$

برای متغیرهای استاندارد شده، میانگین برابر ۰ است. در همین راستا می‌توان نتیجه گرفت که:

$$b_{yx}^{*} = \frac{covariation..z_y, z_x}{variation..z_x} = \frac{\Sigma(z_x-0)(z_y-0)}{\Sigma(z_x-0)^2}$$

$$= \frac{\Sigma z_x z_y}{\Sigma z_x^{۲}} = \frac{\Sigma(\frac{x-\bar{x}}{s_x})(\frac{y-\bar{y}}{s_y})}{\Sigma(\frac{x-\bar{x}}{s_x})}$$

$$= \frac{(۱/s_x s_y)\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{(۱/s_x^{۲})\Sigma(x-\bar{x})^{۲}} = \frac{s_x}{s_y} b_{yx}$$

بنابراین به آسانی می‌شود بتاها را از b ها استنتاج کرد:

$$b_{y1/2}^{*} = b_{y1.2}\frac{s_1}{s_y} = 0.78\frac{2.74}{4.59} = 0.46$$

$$b_{y2/1}^{*} = b_{y2.1}\frac{s_2}{s_y} = 1.16\frac{2.71}{4..9} = 0.68$$

این وزن‌های بتا برای تعیین اهمیت نسبی پیش‌بینی‌کننده‌های $X_۱$ و $X_۲$ بسیار مناسب است. معلوم می‌شـودکه تغییرات میانگین سـن ازدواج بیشـترین تأثیر را بر تغییرات بی‌فرزندی دارد. با این وجود متغیر نیروی کار هنوز هم تأثیر درخور توجهی دارد که به ازاء هر واحد افزایش در نیروی کار، در متغیر بی‌فرزندی در حدود نیم واحد افزایش وجود دارد، در حالتی که هر دو به نمرات اسـتاندارد تبدیل شده باشند.

1. Intelligent lazy bones

برخلاف b ها، بتاها نباید از ۱ بزرگتر باشند، علت آن استاندارد بودن نمرات است. اگر به ضریب بتای بالاتر از ۱ برخوردید که گاهی اتفاق می افتد باید دلیل آن را جســـتجو کرد. رابطه خیلی زیاد $X_۱$ و $X_۲$ (هم‌خطی بودن) در بسیاری مواقع باعث چنین نتایج تصنّعی می‌گردد.

۸ -۴-۵ آزمون معناداری

حال به هدف سوم از تحلیل رگرسیون چندگانه می‌پردازیم: تعمیم نتایج حاصل از نمونه به جمعیت. آزمون‌های آماری چندی را برای این منظور می‌توان اجرا کرد. در اینجا دو نوع آن را توضــیح خواهیم داد:

۱- آزمون کلی مدل که هر دو متغیر را شامل می‌شود.

۲- آزمون هر یک از متغیرهای مستقل به طور جداگانه.

هر دو آزمون معناداری را با استفاده از شیوه مقایسه مدل می‌توان اجرا نمود. هر کسی باید ابتدا از آزمون کلی مدل شــروع کند، زیرا اگر این آزمون معنادار نباشــد تابع رگرســیون برای به کارگیری مناسب نیست. در این صورت باید به تحلیل خاتمه داد. تنها درصورتی که $R^۲$ معنادار باشد، منطقی است تا بررسی شود که آیا هر یک از متغیرهای پیش‌بینی‌کننده به طور جداگانه هم معنادار هستند.

برای آزمون کلی فرض صفر را می‌توان چنین نوشت:

$$H_۰ : R^۲_{y.۱۲} = ۰ \quad \text{یا} \quad H_0 : \beta_{y1.2} = \beta_{y2.1} = 0$$

مدل محدود $Y = \beta_۰ + \varepsilon$ با مدل کامل مقایسه می‌شود:

$$Y = \beta_0 + \beta_{y1.2}x_1 + \beta_{y2.1}x_2 + \varepsilon$$

تعداد درجات آزادی برای مدل محدود برابر اســـت با ۹ = ۱-۱۰ = d_r، زیرا از میانگین یک درجه آزادی کم شده، ولی برای مدل کامل، درجات آزادی برابر ۷ = ۳-۱۰ = d_f می‌با شد، برای این که دو پارامتر دیگر $\beta_{y1.2}$ و $\beta_{y2.1}$ هم باید برآورد شوند.

پیش‌تر دیدیم که $SSE_r = \Sigma(Y - \bar{Y})^2 = ۱۹۰$ و $SSE_f = \Sigma(Y - \hat{Y})^2 = ۶۱/۷۰$ محاســـبه شدند. آزمون F برای مدل کامل چنین نتیجه داد:

$$F = \frac{SSE_r - SSE_f)/(d_r - d_f)}{SSE_f / d_f} = \frac{(190 - 31.70)/(9 - 7)}{31.70/7} = 17.5$$

در حالت پیش فرض خطای نوع اوّل ۰/۰۵ = α، و دو درجه آزادی صورت و هفت درجه آزادی مخرج، در جدول F به میزان F^* بحرانی ۴/۷۴ (تحت شـــرایط H_0) بر می‌خوریم. مقدار F=۱۷/۵ محاسبه شده، بسیار بیشتر از F^* جدول می‌باشد. لذا فرض صفر را می‌توانیم مردود بدانیم. بنابراین در سطح احتمال از قبل فرض شده ۹۵٪ ، رابطه معناداری بین نیروی کار و متغیر سن ازدواج به طور

توأم و متغیر بی‌فرزندی برقرار است. بنابراین مدل کلی به جامعه آماری مربوطه قابل تعمیم است. در نتایج کامپیوتری این سطح معناداری را این گونه می‌خوانیم « SIGNIFICANCE F=0.0019 ». این مقدار گویای سطح معناداری تجربی، یعنی میزان احتمال خطاست. در نمایش هندسی، این مقدار نشانگر سطح زیر منحنی توزیع نمونه‌گیری مقادیر F (تحت شرایط H_O) است که در سمت راست مقدار F حاصل از نمونه واقع شده است. هرگاه این ناحیه کمتر از ۰/۰۵ باشد یک نتیجه معنادار داریم، زیرا احتمال مقدار F نمونه یا حتی یک مقدار انتهایی‌تر آنقدر کم است که می‌توان فرض H_O را رد کرد.

آزمونی که در قسمت فوق اجرا شد را می‌توان به صورت ضرایب تعیین هم نوشت. برای مدل محدود $R_r^2 = ۰$ و برای مدل کامل $R_f^2 = ۰/۸۳۳$ را داریم. فرمول زیر هم به نتایجی مشابه بالا می‌انجامد:

$$F = \frac{(R_f^2 - R_r^2)/(d_r - d_f)}{(1 - R_f^2)/d_f}$$

$$= \frac{(0.833 - 0)/(9 - 7)}{(1 - 0.833)/7} = 17.5$$

باید یادآور شد که در حالتی که با تعداد زیادی متغیر مستقل سر وکار داریم،گاهی ناگزیر از بکار بردن فرمول تعدیل شده برای $R^۲$ هستیم (مجذور تعدیل شده R[1]). چون اگر متغیرهای مستقل جدیدی به معادله رگرسیون چند متغیره اضافه شود، ممکن است $R^۲$ به طور تصنعی بالا رود که ناشی از مکانیزم بزرگ‌نمایی عامل شانس است. تصحیحی از این مکانیزم مصنوعی در فرمول زیر گنجانده شده است.

$$\text{تعدیل شده } R^۲ = ۱ - (۱ - R^۲)\frac{n - ۱}{n - p - ۱}$$

این فرمول هرگاه تعداد متغیرهای مستقل p برابر o باشد، همان $R^۲$ را به دست می‌دهد. با افزایش p، «تصحیح افت»[2] بزرگ‌تر می‌شود. در مثال ما این تصحیح چندان اساسی نیست چون تنها دو متغیر مستقل وجود دارد:

$$\text{تعدیل شده } R^2 = 1 - (1 - 0.83)\frac{10 - 1}{10 - 2 - 1} = 0.79$$

از آنجا که مدل کلی معنادار است می‌توانیم به مرحله دوم بپردازیم، یعنی هر متغیر پیش‌بینی‌کننده را به طور جداگانه بیازماییم. چون به صرف این که $X_۱$ و $X_۲$ با یکدیگر بر Y تأثیر معناداری داشته‌اند ضرورتاً به معنای تأثیر تک‌تک آنان نیست. در نتایج حاصل از برنامه‌های

1. Adjusted R squre
۲. Correction for shrinkage

کامپیوتری، این آزمون ها به طور جداگانه معمولاً به وسیله آزمون t انجام می‌شود. مقدار t معنادار«SIGNIFICANCE T» برای متغیر $X_۱$ مساوی با ۰/۰۲۲۶ و برای $X_۲$ برابر با ۰/۰۰۳۵ است. با پیش‌فرض خطای نوع اول ۰/۰۵= α هر دو اثر معنادار هستند.

آزمون t مشابهی را برای مقدار ثابت β_0 هم می‌توان صورت داد. سطح معناداری تجربی آن برابر ۰/۱۵۵۱ است. فرض صفر $\beta_0 = 0$ را نمی‌توان رد کرد. بدین ترتیب استنتاج ما از $b_0 = -$ ۲/۶۸، که بر اساس آن، تغییرات ده‌ساله بی‌فرزندی Y، وقتی $X_۱$ و $X_۲$ برابر صفر باشند به اندازه ۲/۶۸ ٪ کاهش پیدا می‌کند را نباید جدی گرفت. زیرا ضریب ثابت مذکور قابل تعمیم به جامعه نیست.

در آزمون اثرات جداگانه نیز می‌توان از مدل مقایسه مشابه قبلی به جای آزمون t معمولی استفاده کرد. نتایج آن‌ها فرقی ندارد. وقتی‌که اثر مجزّای $X_۱$ را می‌آزماییم فرض صفر این گونه خواهد بود: $H_0 : B_{y1.2} = 0$. مدل کامل در این جا $Y = B_0 + B_{y1.2}X_1 + B_{y2.1}X_2 + \varepsilon$ و مدل محدود $Y = B_0 + B_{y2.1}X_2 + \varepsilon$ است که در آن اثر سن $X_۱$ به شیوه فرض صفر کنار گذا شته شده است. ضرایب تعیین برای مدل کامل $R_f^2 =$ ۰/۸۳۳ و برای مدل محدود $R_r^2 = r_{y2}^2 =$ ۰/۶۳۲ می‌باشند.

درجات آزادی عبارتند از ۷ = ۳ - ۱۰ = d_f و ۸ = ۲ - ۱۰ = d_r.

نتیجه آزمون به این شرح است:

$$F = \frac{(R_f^۲ - R_r^۲)/(d_r - d_f)}{(۱ - R_f^۲)/d_f}$$

$$= \frac{(0.833 - 0.632)/(8-7)}{(1 - 0.833)/7} = 8.43$$

مقدار بحرانی F^* جدول برای درجات آزادی یک و هفت و خطای ۰/۰۵ نوع اوّل α برابر ۵/۵۹ است. مقدار F نمونه یعنی ۸/۴۳ از F جدول بزرگتر است. بنابراین تأثیر متغیر نیروی کار در تبیین بی‌فرزندی معنادار می‌باشد. قابل ذکر است که مقدار F محاسبه شده ۸/۴۳ معادل مجذور مقدار آزمون t یعنی ۲/۹۱ است. با یک درجه آزادی صورت می‌توان آزمون F و همچنین t را اجرا نمود. این آزمون‌ها فرقی با یکدیگر ندارند، زیرا بین آن‌ها یک رابطه ثابت برقرار است $F=t^2$.

آزمون تأثیر $X_۲$ نیز به طریق مشابهی انجام می‌شود.

$$F = \frac{(0.833 - 0.393)/(8-7)}{(1 - 0.833)/7} = 18.46$$

ملاحظه می شود که تغییرات میانگین سن ازدواج در یک دهه نیز دارای تأثیر معناداری ا ست، زیرا مقدار F محاسبه شده بزرگتر از ۵/۵۹ مقدار F جدول با درجات آزادی یک و هفت است.

۹-۴-۵ آزمون انباشتگی و خطی‌بودن

در مدل $Y = B_0 + B_{y1.2}X_1 + B_{y2.1}X_2 + \varepsilon$ این پیش‌فرض طرح می‌شـــود که تأثیرات $X_۱$ و $X_۲$ در تبیین Y را می‌توان بر یکدیگر افزود. یک حاصـــل‌جمع وزن‌یافته (ترکیب خطی) از هر دو متغیر ساخته می‌شود. در این حالت، مدل را افزایشی گویند. اگر بتوان فرض کرد اثرات شاغل بودن و ســـن ازدواج در تبیین بی‌فرزندی همدیگر را تقویت می‌کنند به نحوی که یک تأثیر تعاملی وجود داشته باشد، در این صورت، حاصل‌ضرب آن‌ها $X_1 \times X_2$ تبیینی از Y را به دست می‌دهد. در چنین حالتی مدل افزایشی دیگر کفایت نمی‌کند. بلکه یک مدل ضربی[1] می‌خواهیم، چون حا صل ضرب‌ها تبیین‌کننده‌اند نه مجموع وزن یافته آن‌ها.

در صورت وجود بیش از دو متغیر م ستقل در مدل، چندین حا صل ضرب برای هر دو، سه یا چند متغیر می توان داشت. یک آزمون ساده افزایشی شامل ساختار یک معادله رگرسیون است که در آن تمام عبارات ممکن ضـرب به مدل افزایشـی اضـافه شـده اسـت، و این معادله را براسـاس رویکرد مقایسه مدل‌ها با مدل ساده افزایشی بدون عبارات ضرب مقایسه می‌کنیم.

در مثال ما تنها یک حا صل ضرب $X_۱$ $X_۲$ را می‌توان انجام داد، طوری که دو مدل زیر با هم مقایسه می‌شوند:

مدل کامل: $Y = b_o + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_1X_2 + e$

مدل محدود: $Y = b_o + b_1X_1 + b_2X_2 + e$

ضریب تعیین چندگانه برای مدل محدود در بالا محاسبه شده و برابر ۰/۸۳۳ است (توجه شود که این $R^۲$ مدل کامل برای سایر آزمون‌های معناداری ا ست). برای محا سبه ضریب تعیین چندگانه مدل کامل، ناگزیر از اجرای تحلیل رگر سیون با $X_۱$، $X_۲$ و $X_۱$ $X_۲$ به عنوان متغیرهای م ستقل هستیم. حاصل آن $R^2 = ۰/۹۴۷$ است.

تعداد درجات آزادی عبارتند از $d_r = ۷$ و $d_f = ۶$.

آزمون به نتایج زیر منجر می‌شود:

$$F = \frac{(R_f^2 - R_r^2)/(d_r - d_f)}{(1-R_f^2)/d_f} = \frac{(0.947-0.833)/(7-6)}{(1-0.947)/6} = 12.91$$

برای $\alpha = ۰/۰۵$ و درجات آزادی یک و شـــش، در جدول F به مقدار F^* بحرانی ۵/۹۹ بر می‌خوریم. مقدار F محاســبه شــده در نمونه (۱۲/۹۱) بزرگتر بوده و نتیجه می‌گیریم که کل تأثیرات تعاملی (اینجا فقط یک مورد) در تبیین بی‌فرزندی ســهم معناداری نشــان می‌دهند. مدل افزایشـــی، بنابراین نابسنده بود.

---
1. multiplicative model

برای اطلاعات بیشــتر درباره آزمون افزایشــی به اثر آپ و اسـکمیت[1] (۱۹۷۶ ص ۲۲۵-۲۱۸) و نای[2] و همکاران (۱۹۷۵، ص ۳۷۳) مراجعه کنید. لازم به یادآوری اســـت که معمولاً از آزمون اثرات تعاملی در تحلیل رگر سیون صرف نظر می شود، نه تنها در تحقیقات عملی بلکه در متون نظری هم روش‌شناسان به آن توجهی نمی‌کنند.

علاوه بر آزمون افزایشی، بایستی آزمون خطی بودن را هم انجام داد، زیرا، ضرورتاً این پیش‌فرض تحقق پیدا نکرده اسـت که یک مدل خطی به نحو بسـنده‌ای سـاختار روابط را در داده‌های مربوط به بی‌فرزندی نمودار می سازد. یک روش ساده برای برر سی نیاز به خطی بودن، بازبینی نمودارهای باقی مانده‌ها است. توضیح بیشتر در این باره در قسمت‌های بعدی ارائه می‌شود.

آزمون‌های خطی سررا ستی هم وجود دارند. رویکرد مدل مقایسه که قبلاً با آن آ شنا شدیم را می توان به شـــکل زیر به کار برد. به عنوان مثال رابطه بین X_i و Y را درنظر بگیرید و فرض کنید بخواهیم ببینیم آیا یک تابع درجه دوّم $Y = b_0 + b_1X + b_2X^2$ می‌تواند بهتر از یک خط مستقیم $Y = b_0 + b_1X$ این رابطه را بیان کند.آنگاه تابع ســـهمی (چندجمله‌ای درجه دوّم) مدل کامل را نشـــان می‌دهد و تابع خطی (چند جمله‌ای درجه اوّل) مدل محدود را ارائه می‌کند، و آزمون F دقیقاً به شکل فوق به اجرا در می‌آید.

همچنین امکان آزمون بسندگی چندجمله‌ای‌های درجه دوّم، سوّم چهارم تا ....تا درجه k ام هم به همین ترتیب وجود دارد. مثلاً تابع $Y = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 + b_4X^4 + e$ یک چندجمله‌ای درجه چهارم است، زیرا بالاترین توان X که در تابع ظاهر می شود ۴ است. چنین تابعی سه منحنی (یکی کمتر از تعداد درجات آن) می سازد. به همین ترتیب یک چندجمله‌ای درجه سوم دارای دو منحنی، و یک چندجمله‌ای درجه دوم که ما در قسمت فوق با آن سر وکار داشتیم و تابعی ســـهمی به حســـاب می‌آید دارای یک منحنی بالارونده ($\cup$) یا پایین رونده و واژگون ($\cap$) با یک نقطه حداقل و یک نقطه حداکثر است. مر سوم است که با یک آزمون چندجمله‌ای درجه دوّم شروع نمود و سپس آزمون درجه سوم، بعد چهارم و الی آخر را ادامه داد تا جایی که آزمون‌های بیشتر زائد باشد.

بازهم راه‌های بسیار دیگری برای مسأله غیرخطی بودن وجود دارد. به عنوان نمونه لگاریتم‌گیری از متغیرهای معین، معکوس کردن یا شکل‌های تطبیقی دیگر را می‌توان نام برد. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توانید به کتاب‌هایی که قبلاً معرفی شدند مراجعه کنید.

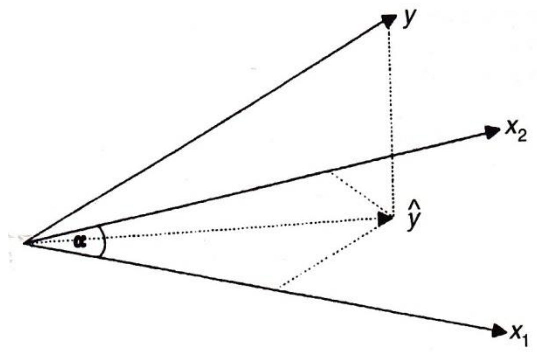
بایستی توجه داشت که آزمون افزایشی و همچنین خطی بودن سبب این مشکل می‌شود که به موجب آن مثلاً عبارات افزوده شده، حاصل ضرب X_1 X_2 یا جمله درجه دوم X_2، ممکن است با متغیرهای مستقلی که در معادله وجود دارند همبستگی بالایی نشان دهند (مثل X_1).

1. Opp & Schmidt 2. Nie

این موضــوع باعث مســأله پر دردســر چندهم‌خطی بودن می‌شــود که مفهوم آن این اســت که متغیرهای مســتقل در معادله رگرســیون چندگانه شــدیداً با یکدیگر در رابطه هســتند، به طوری‌که برآورد ضرایب رگر سیون پایانی نخواهد دا شت. این م سأله را در این جا به طور جداگانه مورد بحث قرار می‌دهیم.

۱۰-۴-۵ مسأله هم‌خطی بودن چندگانه

مســأله رابطه شــدید متغیرهای مســتقل X_1 (Δ ٪ نیروی کار) و X_2 (Δ میانگین ســن ازدواج) با یکدیگر و درنتیجه آن‌ها را تاحدی قابل جا به جا کردن، مشــکل چند هم‌خطی نامیده می‌شـود.«چند هم خطی» در ا صل یک مفهوم هند سی و بدین معنی ا ست که عنا صر زیادی روی یک خط مستقیم واقع شـــده‌اند. مجدداً به مدل برداری رجوع می‌کنیم که در آن ده واحد تحلیل در یک فضـــای ده بعدی، گ سترده شده‌اند و سه متغیر به عنوان نقاطی در این ف ضا دیده می شوند (نقاط انتهای بردار نسبت به مبدأ) که می‌توان به شکل زیر آن را بیان کرد. عمومی‌ترین حالت، وضعیتی است که در آن X_1 و X_2 همب ستگی متو سطی دارند و ضریب همب ستگی نه کامل و نه صفر ا ست، در این حالت بردارهای X_1 و X_2 نه بر هم منطبق‌اند و نه عمود بر یکدیگرند، بلکه در محدوده زاویه‌ای بین 0° و ۹۰° هستند، طوری که در یک مبدأ با هم ا شتراک دارند. کسینوس زاویه x بین این دو بردار همان ضـریب همبســتگی r_{12}اســت. تصـویر قائم نقطه انتهایی بردار Y، در پایه، نقطه انتهایی بردار مقادیر مورد انتظار $\hat{y}$ است. وقتی‌که نمرات به صورت انحراف از میانگین بیان شوند، بطوری که ضریب ثابت حذف گردد، این شـــکل نیز برابر حاصـــل‌جمع وزن یافته $b_{y1.2}X_1 + b_{y2.1}X^2$ اســـت. این حالت عمومی در شکل ۸-۵ نشان داده شده است.



شکل ۸-۵ تحلیل رگرسیون چندگانه در مدل برداری

اکنون اگر $X_۱$ و $X_۲$ کاملاً با هم همبسته باشند که $r_{12}=۱$ باشد و زاویه α مساوی صفر باشد، بردارهای $X_۱$ و $X_۲$ بر هم منطبق خواهند بود. نقاط انتهایی این دو بردار یا روی هم می‌افتد یا بر یک خط مستقیم واقع می‌شوند. این همان چندهم‌خطی بودن است، یعنی چند نقطه انتهایی بر یک خط مستقیم واقع شده و در نتیجه هم‌خط می‌باشند. در این وضعیت دیگر مبداءی وجود نخواهد داشت. دو متغیر مستقل یکسان و قابل جایگزین شدن با یکدیگرند.

می‌توان نشان داد که چند هم‌خطی بودن در تحلیل رگرسیون چندگانه مسائل جدی را موجب می شود. این مشکلات نه تنها از لحاظ توصیفی بلکه از جنبه استنتاج تعمیم‌پذیری نتایج نمونه به جامعه هم وجود دارد. از این رو، با افزایش همبستگی بین متغیرهای مستقل، دقت برآورد ضرایب رگرسیون تفکیکی کمتر می‌شود. به منظور تشریح این موضوع، اجازه دهید در مقدمه، مفهوم تاب‌آوری[1]را بیان کنیم. یکی از متغیرهای مستقل مثل نیروی کار $X_۱$ را در نظر گرفته و ضریب تعیین رگرسیون را با $X_۱$ به عنوان متغیر وابسته و سایر متغیرها (در این جا فقط یک مورد: سن ازدواج) به عنوان متغیرهای مستقل محاسبه می‌کنیم. در مثال اختصاری ما، این ضریب $R_{1.2}^2$ است، یعنی بخشی از واریانس $X_۱$ که به وسیله متغیرهای مستقل دیگر (در اینجا فقط $X_۲$) تبیین می شود. باقی مانده $1-R_{1.2}^2$ بخشی از واریانس $X_۱$ است که به وسیله سایر متغیرهای مستقل توضیح داده نمی‌شود. این همان تاب‌آوری است. و اندازه‌ای از عدم وجود چند هم خطی بودن می باشد که مقدار آن در مثال ما : $1-R_{1.2}^2=1-r_{12}^2=1-(0.24)^2=0.94$ است.

این تاب‌آوری نقش مهمی در محاسبه فواصل اطمینان ضرایب تفکیکی رگرسیون ایفا می‌کند. با یک احتمال پیش فرض شده $1-\alpha=۰/۹۵$، ضریب جمعیتی $\beta_{y1.2}$ بین مقادیر ۰/۱۵ و ۱/۴۱ (df=n-p-1) واقع می‌شود:

$$b_{y۱.۲}\pm t_{\alpha/۲}\hat{\sigma}_{b۱}$$

$$b_{y۱.۲}\pm t_{\alpha/۲}\frac{s_y}{s_۱}\left[\frac{۱-R_{y.۱۲}^۲}{(۱-R_{۱.۲}^۲)(n-p-۱)}\right]^{۱/۲}$$

$$0.78\pm 2.365\frac{4.59}{2.74}\left[\frac{1-0.833}{(1-0.24^2)(10-2-1)}\right]^{1/2}$$

$$0.78\pm 2.365(0.27)\Rightarrow 0.15 \text{ و } 1.41$$

بدین ترتیب در می‌یابیم که تاب‌آوری $۱-R_{۱.۲}^۲$ بخشی از مخرج این کسر است و از این رو در تعیین‌کننده دقت برآورد (خطای معیار $\hat{\sigma}_{b۱}=۰/۲۷$) مشارکت دارد. با افزایش چند هم‌خطی، تاب‌آوری کاهش یافته و در نتیجه خطای معیار بزرگتر شده و دقت کاهش می‌یابد.

1. tolerance

با همین روش، فا صله اطمینان ۹۵٪ برای تأثیر سن ازدواج $\beta_{y2.1}$ را بد ست می‌آوردیم که بین ۰/۵۲ و ۱/۸۰ با دقت ۰/۲۷ قرار گرفته است.

بنابراین چند هم‌خطی بودن زیاد، مشکل پیچیده‌ای را موجب می‌شود که برآورد ضرایب تفکیکی و رگر سیون برای جمعیت را بسیار کم دقت می سازد. به خصوص هنگامی این یک مشکل خواهد بود که بخواهیم مقایسه دو جانبه‌ای از اثرات متغیرهای مستقل به عمل آوریم، زیرا فواصل اطمینان ضرایب تفکیکی مختلف رگرسیون چندان زیاد است که موجب همپوشی و ابهام می‌گردد.

چنان که این گونه وزن دادن به اهمّیت نسبی عوامل علّی مدنظر نباشد، آنگاه چندهم‌خطی بودن مسأله ساز نیست. امّا ما شخصاً تحقیقی را سراغ ندارم که این هدف را نداشته باشد.

اکنون، وقتی ما به زیاد بودن چند هم خطی مثلاً با ضرایب همبستگی ۰/۶۰ یا بیشتر بین متغیرهای مستقل برخورد کنیم چه کار باید انجام دهیم؟ راه‌های زیادی وجود دارد. اوّلین و مؤثرترین روش این ا ست که یک یا چند متغیر را کنار بگذاریم، یعنی آنهایی که همبستگی خیلی زیادی با هم دارند. روش دوّم شامل تخصیص واریانس مشترک به یکی از متغیرهای مستقل و برگرفتن تأثیر آن از روی سایر متغیرها ست. در مثال ما انجام این کار بدین‌گونه خواهد بود که متغیر نیروی کار X_1 باقی می‌ماند،آنچه که بردا شته می شود سهم مشترکی ا ست که متغیر سن ازدواج X_2 با X_1 دارد. بدین معنی که متغیر باقیمانده $X_2 - \hat{X}_2$ می‌ماند که به اجرای تحلیل رگرسیون چندگانه Y در تابع $X_2 - \hat{X}_2$ می‌انجامد. شیوه سوم این است که واریانس مشترک بین متغیرهای مستقل مختلف پخش شود. روشی که این توزیع بایستی براساس آن صورت گیرد همیشه روشن نیست. روش چهارم عمل جدا کردن واریانس مشترک ا ست. اگر واریانس مشترک را با G نشان دهیم، آنگاه در مثال ما تحلیلی از Y به عنوان تابعی از $X_1 - \hat{X}_1$ ، $X_2 - \hat{X}_2$ و G صورت خواهیم گرفت که در آن دو متغیر X_1 و X_2 از ناخالصی درآمده‌اند.

شیوه‌های بسیار دیگری مثل رگرسیون بایس[1] و غیره هم طرح شده‌اند. ما میل‌داریم راهکار نهایی یعنی تحلیل عوامل را یادآوری کنیم که اغلب به کار گرفته می‌شود. وقتی‌که شمار زیادی متغیرهای مستقل با سطح سنجش مناسب (فاصله‌ای) وجود دارد، بهتر است در حالت چند هم‌خطی، یک تحلیل عوامل بر روی این متغیرهای مستقل صورت داد (غالباً یک تحلیل اجزاء اولیه).

این روش در یکی از فصول آینده مورد بحث قرار می‌گیرد. این روش شامل روی هم ریختن واریانس‌های مشترک متغیرهای اصلی و بیرون کشیدن متغیرهای جدیدی است که عامل (یا مؤلفه[2]) نامیده می‌شوند. این عامل‌ها می توانند با هم رابطه متقابل داشته باشند، همچنین می‌توان یک شیوه تحلیل عوامل را به کار گرفت که در آن عامل‌ها متعامد[3] با شند. تعداد این عامل‌ها از تعداد متغیرهای

1-Bayes regression 2. Componems 3. Orthogonal
4. homoscedasticity 5. outlier

اولیه کمتر ا ست. هر عامل معرف گروهی از متغیرها ست که با یکدیگر همب ستگی درونی دارند. حال اگر یک تحلیل رگرسیون چندگانه با Y به عنوان متغیر مستقل انجام دهیم، دیگر مسأله همخطی بودن حل می شود زیرا عامل‌ها با یکدیگر همب سته نی ستند. می‌توان آن را با جناح‌های سیا سی یک جلسه مجلس (پارلمان) مقایسه کرد. متغیرهای اصلی بازنمایی نقطه نظرات آن جمعیت است.

اما مشکل این است که تحلیل عامل بایستی به طور استنتاجی جناح‌ها را از آراء جمعیت بیرون بکشد و در تقابل ناهمبسته باهم قرار دهد، و در این کار نمی‌تواند جامعه یکپارچه و سازمان یافته‌ای را به کار گیرد که بر اساس نظام‌های جناحی باشد. همچنین یافتن نامی مناسب برای عامل استنتاج شده هم اغلب یک مسأله است، زیرا فقط یک سری متغیر می شناسیم که روی یک عامل دارای بار عاملی زیادی هستند. از این گروه متغیرهایی که رابطه درونی قوی با یکدیگر دارند معنای چنین عاملی را باید استنباط کند. بدین ترتیب در نهایت مسأله چند همخطی برطرف می شود، امّا معنای متغیرهای مستقل (عامل‌های) تازه به وجود آمده مسأله جدیدی است که اجتناب ناپذیر است.

۱۱-۴-۵ تحلیل باقی مانده‌ها

یک ابزار مفید برای بررسی این که آیا پیش‌فرض‌های خطی بودن، هم‌واریانسی[۴]، نبود دور افتاده[۵] و غیره، جامه عمل پو شیده‌اند یا نه، تحلیل باقی مانده‌ها ا ست. در اغلب برنامه‌های کامپیوتری می‌توان نمودارهای باقیمانده‌ها e_i را در مقابل یکی از متغیرهای م ستقل X_j، یا حا صل جمع وزن داده شده متغیرهای م ستقل $\widehat{Y}$ (و نه در مقابل Y!) تهیه نمود. نمودار باقی مانده‌ها e_i بیشتر در مقابل مقادیر پیش‌بینی‌شده $\widehat{Y}$ استفاده می‌شودکه در آن e_i و همچنین $\widehat{Y}$ در قالب نمرات استاندار هستند. منظور این است که باقی مانده‌ها نبایستی یک الگوی نظام یافته در رابطه با اَبرصفحه $\widehat{Y}$ نشان دهند. از لحاظ تعریف، عقیده بر این ا ست که e_i و $\widehat{Y}$ متمم متعامد یکدیگرند. به عبارت دیگر، مؤلفه باقی مانده نسبت به ترکیب خطی متغیرهای مستقل متعامد است. همبستگی بین هر دو مؤلفه دقیقاً برابر ٥ ا ست. یک رابطه صفر البته به طرق مختلفی می‌تواند برقرار شود. حالت ایده‌آل آن ا ست که باقی مانده‌ها نسبت به اَبر صفحه، به سبکی منطقی یکدیگر را خنثی کنند، طوری که نمودار نشان‌دهنده گونه‌ای الگوی تصادفی بدون ناهنجاری باشد. امّا همه گونه شرایط ناخوشایند ممکن است اتفاق افتد، چند نمونه از آن را شکل۹-۵ نشان می‌دهد.

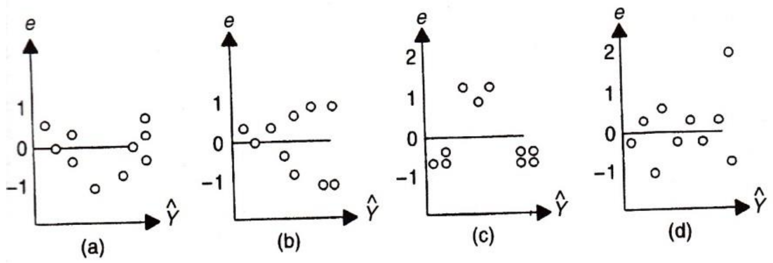
در هر یک از شکل‌ها همبستگی بین e و $\widehat{Y}$ برابر صفر است، اما با این وجود الگوی مزبور ناهنجارهای خاصی را شامل می شود. در شکل۵-۹ (الف) نمودار پراکنش، الگوی غیر خطی را نشان می‌دهد. یک تابع رگرسیون غیرخطی همراه با جمله درجه دوّم احتمالاً تناسب بهتری در انطباق با داده‌ها دارد.

از شکل ۹-۵ (ب) چنین بر می‌آید که پیش‌فرض واریانس باقیمانده ثابت برآورده نشده است (به هم خوردن هم‌واریانسی). پراکندگی متغیر باقی‌مانده با ترکیب خطّی متغیر مستقل $\widehat{Y}$ افزایش

می‌یابد، به نحوی که این الگو، واگرایی را نشـان می‌دهد. تنها زمانی هم‌واریانس وجود ندارد که حدود فر ضی پیرامون نمودار نقاط، شامل دو خط افقی موازی با شد. یک راه اجتناب از این م سأله، تبدیل متغیر وابسته Y به $Y^{1/2}$ ا ست. شیوه دیگر، راهبرد کمترین مجذورات وزن یافته[1] (WLS) نام دارد. در مورد طرز عمل این روش به کتاب کاتریج واپرایس (۱۹۷۷ ص ۴۹) مراجعه کنید.

در شکل ۵-۹ (ج) ملاحظه می شود که مقادیر به صورت خو شه هایی درآمده‌اند. یک متغیر چند منظومه‌ای[۲] که به تعداد خوشـــه‌ها دارای مقوله بوده و فراتر از این داده اســـت و تن به تحلیل نداده اســت، می‌تواند علت چنین الگوی به هم ریخته‌ای باشــد. از تحلیل جداگانه هر یک از این خوشــه‌ها ممکن است به بینش بیشتری دست یابیم.

شکل ۹-۵ (د) نـشان دهنده الگوی تـصادفی خوبی از آنچه باید با شد ا ست، امّا در بالای شکل قسمت راست، شاهد یک نقطه دور افتاده هستیم که مقدار باقی مانده آن بیش از دو انحراف معیار از میانگین o فاصله دارد. در اینجا هم مثل حالت شکل‌دهی خوشه‌ها، یک تحلیل جداگانه واحدهای دور افتاده ممکن ا ست بهترین راه با شد. ما می‌خواهیم این ابهام که روش شنا سان متمایل به شیوه‌های کمّی، عادت به کنار گذاشـــتن نقاط «دورافتاده» دارند، به این خاطر که با مدل انطباق ندارند برطرف شود. برعکس، چنان که این روش‌شناسان به‌درستی توصیه کرده‌اند، ما بایستی واحدهای انحرافی را به عنوان یافته‌های اســـتثنایی به حســـاب بیاوریم، یعنی نمونه‌های جالبی که باید در تحلیل‌های جداگانه بررسی شوند و از آن طریق در می‌یابیم مدل ما تا چه حد نیاز به اصلاح دارد یا ماهرانه طرح شده است.



شکل ۹-۵ نمودار باقی مانده‌ها در تحلیل رگرسیون

علاوه بر رســـم نمودار نقطه‌ای باقی مانده‌ها در مقابل متغیرهای مســـتقل X_j و ترکیبات خطی آن‌ها $E(Y)$، شیوه‌های بـ سیار دیگری هم برای برر سی بـ سندگی مدل باقی مانده‌ها وجود دارد. یک شیوه ا ستاندارد برای این کار «نمودار موردی نقاط»[۲] نام دارد. این نموداری از باقی مانده‌ها، فردی و به شکل استاندارد شده است. موردهایی که باقی مانده‌ها در آن‌ها بیش از دو انحراف معیار از o فاصله

1- wighted least squres
3-polytomous
2-casewise plot
2-histogroum

دارند را می‌توان در اولین نگاه انتخاب کرد. اغلب برنامه‌های کامپیوتری نیز امکان بازیابی چنین نقاط دور افتاده‌ای را به طور جداگانه فراهم می‌کنند. در این حالت فقط مواردی که به طور مشخص دور از میانگین هستند همراه با شماره شناسایی و میزان نمرات معیار باقیمانده آن‌ها گرفته می‌شود. این کار باعث مختصر شدن برون‌دادها و مناسب‌تر شدن آن‌ها می‌شود، زیرا در مواقعی که تعداد نمونه خیلی زیاد است یک «نمودار نقطه‌ای موردی» تعداد صفحات خروجی خیلی زیادی می‌گیرد.

در صورت تمایل می‌توان بررسی نمود که آیا باقی مانده‌ها به صورت الگوی تصادفی در اطراف میانگین o پراکنده شده‌اند یا نه. این کار توسط یک بافت نگار[۲] (هیستوگرام) از باقی مانده‌ها در شکل استاندارد شده آن صورت می‌گیرد. مطلوب‌ترین حالت، آن است که این بافت‌نگار شکل توزیع بهنجار به خود بگیرد. در مواقعی که انحراف از چنین الگوی منحنی زنگوله‌ای شکلی خیلی زیاد باشد، باید آن را مخاطره‌آمیز دانست. اغلب برنامه‌های کامپیوتری نموداری از بافت نگار تجربی را همراه با منحنی مطلوب و مورد انتظار در یک شکل ارائه می‌کنند.

روش دیگر بررسی این که آیا توزیع باقی مانده‌های مشاهده شده منطبق با توزیعی است که تحت شرایط فرضی بهنجار انتظار می‌رود، «نمودار نقطه‌ای احتمال بهنجار» نامیده می‌شود. این نمودار متشکل از دو توزیع تجمّعی در برابر یکدیگر است. محور افقی نشان دهنده فراوانی احتمالات تجمّعی باقی مانده‌ها در شکل استاندارد شده آن است که در حالت بهنجار انتظار داریم. محور عمودی وضعیت مشاهده شده این گونه احتمالات تجربی را نشان می‌دهد. اگر این دو توزیع تجمّعی یکسان باشند، یک خط (با شیب) ۴۵ درجه پدیدار می‌شود. چگونگی پراکندگی نقاط نسبت به خط مستقیم مورد انتظار، شاخصی از میزان انحراف از پیش‌فرض بهنجار بودن را به دست می‌دهد.

۱۲-۴-۵ تحلیل رگرسیون چندگانه در نماد ماتریسی

در بخش‌های قبل ملاک حداقل مجذورات را برای برآورد تابع رگرسیون چندگانه به کار گرفتیم. این شیوه برآوردهای OLS نام داشت. واحدها در یک فضای سه بعدی قرار گرفته و از طریق نمودارهای نقطه‌ای، یک صفحه برآورد می‌گردد. این برآورد بهترین برآورد خطی بدون سوگیری (BLUE) بود. به این دلیل بهترین است که از همه برآوردهای خطی بدون سوگیری دیگر، واریانس کوچکتری دارد؛ خطی است، زیرا یک تابع خطی برآورد می‌شود و بدون سوگیری است، چون مقدار مورد انتظار E(b) هر آماره نمونه‌ای برابر با آماره جمعیتی β مربوط به آن است. طبق برهان تعیین حدود گوس برهان تعیین حدود گوس، بردار **b** برآورد کننده حداقل مجذورات یک BLUE (بهترین برآورد غیر سوگیرانه خطی) است.

سطحی که مجموع مجذور باقی مانده‌ها $\Sigma(Y-\hat{Y})^2$ برای آن در حداقل است (OLS)، بهتر از هر سطح دیگری با نقاط انطباق حاصل می‌کند. برای محاسبه این سطح رگرسیون، مشتقات تفکیکی

را مساوی صفر گرفته و معادلات حا صله حل می شوند. این کار به جواب‌های $b_{y۲.۱}, b_{y۱.۲}, b.$ منتهی می‌شود که با هم بردار $\mathbf{b}$ را تشکیل می‌دهند.

وقتی از نمادهای ماتریسی استفاده شود، همه این ها را می‌توان بسیار خلاصه‌تر بیان کرد. ما Y را نشانه بردار (۱×۱۰) نمرات متغیر وابسته Y در نظر می‌گیریم. نمرات متغیرهای مستقل در ماتریس $\mathbf{X}$ جمع شده‌اند که حاوی دو ستون با نمرات X_1 و X_2 و همچنین یک ستون اولیه است که نمره‌های ۱ مربوط به یافته ثابت رگرسیون می‌باشد. ملاحظه می‌شود که ماتریس $\mathbf{X}$ در واقع یک ماتریس افزایشی(۳×۱۰) ا ست. بردار (۳×۱۰) $\mathbf{b}$ دربردارنده سه آماره $b_{y۲.۱}, b_{y۱.۲}, b.$ ا ست. این همان β جمعیت است. بردار (۱×۱۰) e حاوی نمرات باقی مانده است که همان ε جمعیت می‌باشد.

بدین ترتیب ، مدل خطی کلی را می‌توان برای جمعیت این گونه $y = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$ و برای نمونه به صورت $y = \mathbf{Xb} + \mathbf{e}$ نو شت. اجازه دهید با نمادهای نمونه‌ای پیش برویم. برای مجموعه کوچک داده‌های مربوط به تحقیق بی‌فرزندی داریم:

$$
\begin{array}{ccccccc}
Y= & & \mathrm{X} & & \mathrm{b} & + & \mathrm{e} \\
\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \\ ۲ \\ ۲ \\ ۴ \\ ۱۰ \\ ۱۲ \\ ۸ \\ ۳ \\ ۱۴ \end{bmatrix} & = &
\begin{bmatrix} 1..1...1 \\ 1...2..6 \\ 1..3...3 \\ 1..4...2 \\ 1...5...2 \\ 1....6...5 \\ 1....6...9 \\ 1....7...4 \\ 1....9...1 \\ 1.....9...7 \end{bmatrix} & &
\begin{bmatrix} b. \\ b_{y۱.۲} \\ b_{y۲.۱} \end{bmatrix} & &
\begin{bmatrix} e1 \\ e2 \\ e3 \\ e4 \\ e5 \\ e6 \\ e7 \\ e8 \\ e9 \\ e10 \end{bmatrix} \\
(۱۰ \times ۱) & & (10 \times 3) & & (3 \times 1) & & (10 \times 1)
\end{array}
$$

مقادیر برآورد شده $\hat{Y}$ با هم، بردار (۱۰×۱) مربوط به $\hat{Y}$ را تشکیل می‌دهند. از روی این مدل می‌توان دریافت که $\mathbf{e} = y - \hat{y}, \hat{y} = \mathbf{xb}$.

جهت محاسبه بردار b، ملاک معمولی کمترین مجذورات به کار رفته است: مجموع مجذورات باقی مانده‌ها $\Sigma e^۲$ باید تا حد امکان کوچک باشد. این مجموعه در ماتریس جبری به صورت ضرب عددی [۱] $e'e$ نوشته می‌شود. برداری که این ضرب عددی $\mathbf{e'e}$ را به حداقل می‌رساند، از طریق

1-Scalar product 2-transposed matrix

محاسـبه مشـتقات تفکیکی $\mathbf{e'e} = \mathbf{(y - xb)'(y - xb)}$، معادل صـفر قرار دادن آن‌ها و حل نظام معادلات حاصل از آن به دست می‌آید. نتیجه می‌شود: $\mathbf{b} = \mathbf{(X'X)}^{-1}\mathbf{X'}y$.

ما ابتدا حاصل ضرب ماتریس ترانهاده[۲] $\mathbf{X, X'}$، و نیز X' و $\mathbf{y}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbf{x'x} = \begin{bmatrix} 1..1..1..1..1..1..1..1..1..1 \\ 1..2..3..4..5..6..6..7..9..9 \\ 1..6..3..2..2..5..9..4..1..7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1..1..1 \\ 1..2..6 \\ 1..3..3 \\ 1..4..2 \\ 1..5..2 \\ 1..6..5 \\ 1..6..9 \\ 1..7..4 \\ 1..9..1 \\ 1..9..7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10..52..\quad 40 \\ 52..338..224 \\ 40..224..226 \end{bmatrix}$$

$$x'y = \begin{bmatrix} ١..١..١..١..١..١..١..١..١..١ \\ ١..٢..٣..۴..۵..۶..۶..٧..٩..٩ \\ ١..۶..٣..٢..٢..۵..٩..۴..١..٧ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \\ ٢ \\ ٢ \\ ۴ \\ ١٠ \\ ١٢ \\ ٨ \\ ٣ \\ ١۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶٠ \\ ٣٨٣ \\ ٣٢٩ \end{bmatrix}$$

ماتریس وارون $\mathbf{X'X}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(\mathbf{x'x})^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 338..224 \\ 224..226 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 52..224 \\ 40..226 \end{vmatrix} .. \begin{vmatrix} 52..338 \\ 40..224 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 52..40 \\ 224.226 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 10..40 \\ 40..226 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 10..52 \\ 40..224 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 52..40 \\ 338..224 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 10..40 \\ 52..224 \end{vmatrix} .. \begin{vmatrix} 10..52 \\ 52..338 \end{vmatrix} \end{bmatrix}}{10\begin{vmatrix} 338..224 \\ 224..226 \end{vmatrix} - 52\begin{vmatrix} 52..224 \\ 40..226 \end{vmatrix} + 40\begin{vmatrix} 52..338 \\ 40..224 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 26212 - 2792 \quad -1872 \\ -2792. \; .660... -160 \\ -1872 - .160. \; ..676 \end{bmatrix}}{42056}$$

؟

$$= \begin{bmatrix} 0.623 - 0.066 - 0.045 \\ -0.066.0.016 - 0.004 \\ -0.045. - 0.004..0.016 \end{bmatrix}$$

حاصل‌ضرب $(\mathbf{X'X})^{-1}$ و $(\mathbf{X'y})$ همان بردار $\mathbf{b}$ است:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'y} = \begin{bmatrix} 0.623 - 0.066 - 0.045 \\ -0.066..0.016 - 0.004 \\ -0.045. - 0.004..0.016 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 383 \\ 329 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.68 \\ 0.78 \\ 1.16 \end{bmatrix}$$

بنابراین با استفاده از ماتریس جبری، از راه بسیار کوتاه‌تری تابع رگرسیون چندگانه X_2 ۱/۱٦+ X_1 ۰/۷۸+۲/٦۸ − = $\hat{Y}$ را بدست آوردیم.

۱۳-۴-۵ برون‌داد نرم افزار spss تحت ویندوز برای تحلیل رگرسیون چندگانه

در این جا برون دادهای کامپیوتری SPSS برای مثال اختصاری تحقیق بی‌فرزندی ارائه می‌شود (برای جلوگیری از طولانی شـــدن صـــفحات، برخی از نتایج را کنار گذاشـــته‌ایم).خواننده می‌تواند نتایج محاسبات دستی را براحتی با این نتایج مقایسه کند.

انتخاب یا ایجاد فایل داده‌ها

در فصل ۴ نحوه بازکردن یک بخش SPSS و نحوه انتخاب یک فایل داده‌ها ، یا در صورت عدم وجود فایل، چگونگی وارد کردن داده‌ها، انتخاب نام، نوع و برچسب متغیرها و نیز نحوه ذخیره‌سازی فایل داده‌ها با پسوند sav. نشان داده شده است.

اجرای شیوه آماری مورد نظر

روی عبارت Analyize کلیک کنید. روی عبارت Regression کلیک کنید. روی عبارت Linear کلیک کنید. پنجره فرعی مربوط به رگرسیون خطی (Linear Regression) ظاهر می‌شود. بر روی نام متغیر وابسته (حرف Y) در قسمت source variable list و همچنین روی علامت ➥ قسمت Dependent variable کلیک کنید. حالا روی نام متغیرهای مستقل (X_1 و X_2) در قسمت list source variable و سپس روی علامت ➥ مربوط به Independent variable کلیک کنید (می‌توانید متغیرها را یکی یکی نشانه‌گذاری و منتقل کنید و یا این که به طور جداگانه با کلیک کردن و انتقال مکان‌نما بر روی نام متغیرهای دیگر و سپس رها کردن دکمه کلیک، این کار را انجام دهید). حالت پیش‌گزینه سیستم Enter است که برای کار ما همان مناسب است.

روی عبارت Statistics کلیک کنید. پنجره فرعی Linear Regression شامل Statistics ظاهر می‌شود. خواهیم دید که عبارت‌های Estimates و Model Fit از قبل انتخاب شده‌اند. عبارت‌های مختلفی در این قسمت هست که می‌توانید آن‌ها را انتخاب کنید، شامل confidence Intervals ، Watson-Durbin،Blocksummary، Descriptives،CovarianceMatrix وCollinearityDiagnostics، سپس روی عبارت Continue کلیک کنید.

بر روی عبارت Plots کلیک کنید.روی عبارت $ZPRED^*$ و سپس روی علامت➥ مربوط به Y کلیک کنید. آنگاه روی عبارت $ZRESID^*$ ، سپس علامت ➥ مربوط به x کلیک کنید. در این حالت یک نمودار نقطه‌ای از مقادیر پیش‌بینی شده به شکل استاندارد به عنوان تابعی از باقی مانده‌های استاندارد شده درخواست گردیده است. بر روی عبارت Next کلیک کرده و اگر مایلید همین کار را درباره مقادیر پیش‌بینی‌شده استاندارد و باقی مانده‌های به شکل نمرات استیودنت درآمده ($SDRESID^*$) انجام دهید. برای به دست آوردن بافت نگار باقی مانده‌های استاندارد شده، روی عبارت Histogram کلیک کنید، سپس بر روی عبارت Normal Probablity plot کلیک کنید. به همین ترتیب spss انتخاب های دیگری را نیز تحت عنوان Options در اختیار می‌گذارد. در آخر روی واژه های continue و سپس ok کلیک کنید.

اینک نرم افزار SPSS شیوه آماری را اجرا نموده و یک دریچه مربوط به نتایج تحلیل رگرسیون پدیدار می شود. ذخیره کردن آن را فراموش نکنید: روی واژه File و سپس Save as کلیک کنید، نام پوشه مورد نظر (عبارات Chldin.lst) را تایپ کرده و سپس روی ok کلیک کنید.

البته به جای مراحل فوق می توانید از طریق باز کردن پنجره دســـتورات و تایپ دســـتورات SPSS نیز شـــیوه آماری مورد نظر را اجرا کنید. برای این کار روی واژه File و New و ســـپس SPSS syntax کلیک کنید، آنگاه دستورات را تایپ کنید. دستورات عبارتند از:

```
1REGRESSION / DESCRIPTIVES.ALL
2..../VARIABLES.Y, X1.X2
3..../ STATISTICS..ALL
4.../ DEPENDENT..Y
5...../ METHOD.ENTER.X1..X2
6...../ SCATTERPLOT...(*ZPRED..*ZRESID)
7......................................(*ZPRED..*SDRESID)
8....../ RESIDUALS..DEFAULTS
9......../ CASEWISE..ALL.
```

د ستور ۱ تمام آمارهای تو صیفی را شامل موارد زیر درخوا ست می‌کند: میانگین‌ها، انحراف اســـتاندارد، واریانس، تعداد واحدها، ماتریس همبســـتگی، ماتریس کوواریانس، ماتریس مجموع مجذورات و ضرب برداری[1] (=ماتریس تغییرات و تغییرات همایند) و سطح معناداری یک جانبه برای ضرایب همبستگی.

دستورات ۴،۲ و ۵ مشخص می‌کنند که سه متغیر نقش دارند.Y متغیر وابسته است و متغیرهای مستقل X_1 و X_2 در یک مرحله واحد (با شیوه Enter) وارد تحلیل می شوند. شیوه‌های دیگر غیر از Enter عبارتند از «Forward» که در آن متغیرها یکی یکی وارد می‌شـــوند، «back ward» که همه متغیرها وارد و یکی یکی کنار گذا شته می شوند، و «stepwise» که ورود و خروج متغیرها در تحلیل از طریق آزمون‌های مربوطه صورت می‌گیرد. این روش از همه منطقی‌تر ا ست، ورود و خروج متغیرها بر مبنای معیارهای از قبل تعیین شـــده معناداری آزمون F مدل صـــورت می‌گیرد. ملاک وارد شـــدن متغیر در تحلیل مقدار پیش فرض سیستم برای F و سطح معناداری تجربی آن (احتمال ورود f) به ترتیب ۳/۸۴ و ۰/۰۵ است. و ملاک خارج شدن از معادله مقدار ۲/۷۱ و ۰/۱۰ ملاک‌های فوق است.

د ستور ۳ تمام آمارهای مربوط به رگر سیون را درخوا ست می‌کند، شامل: ضریب همب‌ستگی چندگانه، مجذور آن، مجذور R تعدیل شـــده، خطای معیار آن، جدول تحلیل واریانس با مقدار F و سطح معناداری تجربی P، تغییرات F،$R^۲$ و P بین مراحل، ضرایب تفکیکی رگر سیون، خطای معیار آن، تفســـیر اســـتاندارد شـــده آن (بتا)، فواصـــل اطمینان آن، مقدار t و ســـطح معناداری دو جانبه t، همبستگی‌های رتبه‌صفر،ضرایب‌تفکیکی(به فصل بعد مراجعه کنید)، حدود تغییرات و آماره‌های دیگر.

دستورات ۸،۷،۶ و ۹ بر تحلیل باقی مانده‌ها متمرکز هستند. دستور «Casewise= all» نمودار نقطه‌ای باقیمانده‌های استاندارد شده تمام موارد را درخواست می‌کند. در ظاهر انحراف استاندارد تا ۳ انحراف از میانگین ۰ نمایش داده می‌شود، امّا در عمل انحرافات بسیار کوچک‌تر از این هستند. توجه کنید که مقادیر $\hat{Y}$ و $e=Y-\hat{Y}$, با مقادیری که با د ست محا سبه شده انطباق کامل دارد. آن‌ها در

1. Cross product

نتایج کامپیوتری تحت عنوان *PRED* *و *RESID** ارائه شـــده‌اند. باقی مانده‌های اســـتاندارد شـــده با عنوان *ZRESID** م شخص شده‌اند. این ها به عنوان نتیجه زیر د ستور «Residuals» چاپ شده‌اند (تذکّر: بجای باقی مانده‌های استاندارد شده، باقی مانده‌های استیودنتی را هم می‌توان محاسبه کرد و گاهی هم نتایج دقیق‌تری را بدست می‌دهد).

دستور «Residuals» همچنین در آغاز یک بافت‌نگار باقی‌مانده‌های استاندارد شده را همراه با توزیع بهنجار نشان می‌دهد، ثانیاً ، یک نمودار نقطه‌ای بهنجار را نمایش می‌دهد که برای آزمون پیش‌فرض بهنجار بودن نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین شماری از مقیاس‌های توصیفی را نیز ارائه می‌کند. این برنامه با «نمودار نقطه‌ای» (scatter plots) درخواست شده خاتمه می‌یابد. پیش فرض‌های مدل، نقض نشده‌اند. در ادامه نتایج (به صورت اختصاری) ارائه شده‌اند[1].

[1] - یاداد شت مترجم در باره نرم افزار spss: این نرم افزار مثل سایر نرم افزارهای کامپیوتری همه ساله تغییر می کند و امکانات آن توســـعه می یابد، مثلا شـــکل دســـتورات یا برون دادها کمی تغییر می کند اما محتوای تحلیل‌های آماری تغییری نمی‌کند. از این رو خواننده با کمی دقت می‌تواند توضیحات این کتاب را با نسخه‌های جدید spss مطابقت دهد و همچنان از این راهنمایی ها استفاده کند.

```
Correlation:

                 Y          X1         X2

Y             1.000        .685       .266
X1             .685       1.000       .726
X2             .266        .726      1.000


Equation Number 1    Dependent Variable..    Y   poor/rich
Block Number  1.  Method:  Enter      X1       X2
Equation Number 1    Dependent Variable..    Y   poor/rich

Variable(s) Entered on Step Number
   1..     X2       level of services
   2..     X1       financial situation

Multiple R           .76361
R Square             .58309
Adjusted R Square    .51361
Standard Error       .35365

Analysis of Variance
                    DF      Sum of Squares       Mean Square
Regression           2             2.09914           1.04957
Residual            12             1.50086            .12507

F =       8.39174        Signif F =  .0053

Equation Number 1    Dependent Variable..    Y  poor/ rich


------------------ Variables in the Equation ------------------

Variable              B          SE B        Beta          T  Sig T

X2             -.102058       .056490     -.489845    -1.807  .0959
X1              .207146       .053948     1.041084     3.840  .0024
(constant)      .053947       .223775                   .241  .8136
```

```
Listwise Deletion of Missing Data

Equation Number 1    Dependent Variable..   Y poor/ rich

Block Number  1.  Method:  Enter      X1


Equation Number 1    Dependent Variable..   Y poor/ rich


Variable(s) Entered on Step Number
  1..    X1        financial situation

                  Y          X1          X2
Y             1.000        .626        .795
X1             .626       1.000        .240
X2             .795        .240       1.000

Equation Number 1    Dependent Variable..   Y   change in % childlessness
Block Number  1.  Method:  Enter      X1       X2
Equation Number 1    Dependent Variable..   Y   change in % childlessness

Variable(s) Entered on Step Number
   1..    X2        change in mean age at marriage
   2..    X1        change in labour participation
Multiple R          .91292
R Square            .83342
Adjusted R Square   .78583
Standard Error     2.12636
Analysis of Variance
                    DF      Sum of Squares      Mean Square
Regression           2          158.35020         79.17510
Residual             7           31.64980          4.52140

F =       17.51119        Signif F =  .0019
------------------ Variables in the Equation ------------------

Variable                  B          SE B        Beta          T  Sig T

X2                 1.160453      .269585     .683947      4.305  .0035
X1                  .775632      .266376     .462650      2.912  .0226
(Constant)        -2.675100     1.678698                 -1.594  .1551

Casewise Plot of Standardized Residual
*: Selected   M: Missing


          -3.0      0.0      3.0
Case #    O:........:........:O    Y        *PRED      *RESID
     1    .         .    *     .   2       -.7390      2.7390
     2    .     *   .          .   3       5.8389     -2.8389
     3    .       * .          .   2       3.1332     -1.1332
     4    .        *.          .   2       2.7483      -.7483
     5    .         .*         .   4       3.5240       .4760
     6    .         .   *      .  10       7.7810      2.2190
     7    .        *.          .  12      12.4228      -.4228
```

```
     8    .         .*          .   8      7.3961      .6039
     9    .      *  .           .   3      5.4660    -2.4660
    10    .         . *         .  14     12.4288     1.5712
Case #    O:........:.........:O    Y       *PRED      *RESID
        -3.0       0.0       3.0

Residuals Statistics:
                   Min         Max      Mean  Std Dev    N

*PRED           -.7390     12.4288    6.0000   4.1946   10
*RESID         -2.8389      2.7390     .0000   1.8753   10
*ZPRED         -1.6066      1.5326     .0000   1.0000   10
*ZRESID        -1.3351      1.2881     .0000    .8819   10
Total Cases =       10
Case #     *ZRESID

    2     -1.33509
    1      1.28812
    9     -1.15975
    6      1.04359
   10       .73893
    3      -.53291
    4      -.35193
    8       .28399
    5       .22387
    7      -.19882
```

```
Normal Probability (P-P) Plot
Standardized Residual
 1.0  +---------|---------|---------|------****
      |                                      . |
      |                                   **   |
      |                                  .     |
      |                               ****     |
  .75 +                              .         +
      |                         ******         |
O     |                         .              |
b     |                       *                |
s     |                     .                  |
e .5  +               *******                  +
r     |                 .                      |
v     |               **                       |
e     |              .                         |
d     |          ***                           |
  .25 +          .                             +
      |  *******                               |
      |      .                                 |
      |  *                                     |
      | .                                      |
      +***------|---------|---------|---------+
               .25       .5        .75       1.0
```

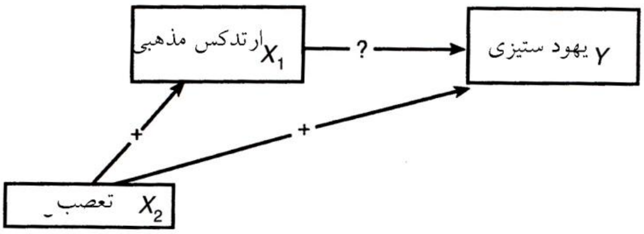
```
Standardized Scatterplot
Across - *PRED     Down - *RESID
Out +|-----|-----|-----|-----|-----|-----|+
  3 +                                     +   Symbols:
    |                                     |
    |                                     |     Max N
  2 +                                     +
    |                                     |       1.0
    |         .                           |
  1 +                      .              +
    |                            .        |
    |               .     .               |
  0 +                                     +
    |              .             .        |
    |               .                     |
 -1 +                  .                  +
    |                   .                 |
    |                                     |
 -2 |                                     +
    |                                     |
    |                                     +
 -3 +                                     +
Out +|-----|-----|-----|-----|-----|-----|+
    -3    -2    -1     0     1     2     3 Out
```

فصل ۶

همبستگی تفکیکی و تحلیل مسیر: تأثیر علّی اعتقادات مسیحیت بر یهودستیزی

۶-۱ مسأله تحقیق و نمودار علّی

در بسیاری از مسائل تحقیقاتی حوزه علوم اجتماعی یک متغیر- مسأله در نظر گرفته می شود و یک مجموعه عوامل علّی مورد جستجو قرار می‌گیرند که با هم تبیینی از پدیده مورد سؤال را ارائه کنند. فرمت اساسی چنین مسأله تحقیقی، ساختار علّی همگرا با یک متغیر اثر و چندین عامل علّی است. حال به جای یک متغیر- مسأله ممکن است یک رابطه‌ی مورد سوال به‌عنوان نقطه آغاز اختیار شود. مثالی از این رابطه مورد سؤال، تأثیر علّی اعتقادات مسیحیت بر یهودستیزی است. سؤال این است که آیا همبستگی بین اعتقادات مسیحیت و یهودستیزی عامیانه در جامعه امروزی را می‌توان به عنوان یک اثر علّی مستقیم به‌حساب آورد. به خاطر این که عوامل پیش‌آیند دیگری ممکن است اعتقادات مسیحیت و همچنین یهود ستیزی را به وجود آورده باشند. در این صورت رابطه بین ارتدکس مذهبی (X_1) و یهود ستیزی (Y) از سوی این عوامل بی‌اهمیت نشان داده می شود. فقط به طور ظاهری این رابطه علّی است. نمونه‌ای از این متغیرهای پیش‌آیند، تعصب مذهبی (X_2) است. یک اثر علّی مثبت X_2 بر X_1 (تعصب مذهبی بیشتر، ارتدکسی بیشتر) و X_2 بر Y (هر چه تعصب مذهبی بیشتر، امتناء از یهودیان بیشتر) وجود دارد. ساختار این رابطه علّی غیر واقعی در شکل ۱-۶ ارائه شده است. علامت بعلاوه (+) نشان دهنده رابطه مثبت است (هر چه یکی بیشتر، دیگری هم بیشتر و هر چه یکی کمتر، دیگری هم کمتر). علامت سؤال (؟) نشانگر آن است که رابطه‌ای که در ابتدا بین X_1 و Y فرض شده است، ممکن است غیر واقعی باشد.



شکل ۶-۱ مکانیزم علّی غیر واقعی

بدین ترتیب سه متغیر در تحلیل درگیر هستند. اجازه دهید فرض کنیم هر سه متغیر در سطح سنجش فا صله‌ای اندازه‌گیری شده‌اند. شیوه‌ای که در این حالت مورد ا ستفاده قرار می‌گیرد تحلیل همبستگی تفکیکی ا ست. عامل پیش‌آیندی تعصب (X_2) متغیر کنترلی می‌با شد. نظر کلی بر این است که وقتی X_2 کنترل شود، رابطه اولیه بین مذهب (X_1) و یهود ستیزی (Y) تقریباً محو می‌گردد. بدین معنی که اشخاصی که از لحاظ ارتدکسی مذهبی، تفاوت‌هایی نشان می‌دهند از لحاظ درجه یهودستیزی هم تفاوت خواهند داشت، اما این هم تغییری کلاً ناشی از تفاوت در میزان تعصب ا ست. در زیرگروه‌هایی که نمره تع صب مذهبی یک سانی دارند، این رابطه بین مذهب و یهود ستیزی بایستی ظاهر نشود. این مکانیزم تحلیل همبستگی تفکیکی در شکل ایده‌آل آن است. رابطه اولیه بین X_1و Y «غیر واقعی» تلقی می شود و از این رو معمول ا ست که از «همبستگی غیر واقعی» صحبت می‌شود.

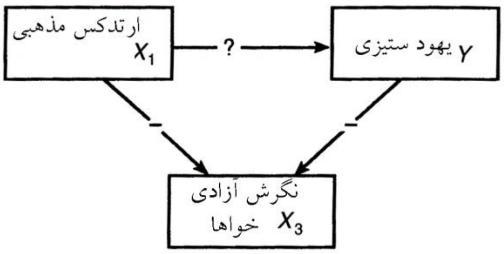
رابطه مورد سؤال بین ارتدکس مذهبی و یهودستیزی را به‌عنوان نقطه شروع در نظر گرفته و فرض می کنیم که این یک رابطه علّی مستقیم نیست: این امکان هم وجود دارد که این رابطه غیرواقعی نمود پیدا نکند، بلکه شکلی از رابطه علّی غیرمستقیم در کار باشد که از طریق عامل‌های واسطه‌ای عمل می‌کند. نمونه‌ای از متغیرهای واسطه‌ای، نگرش لیبرالی یا آزادی خواهانه [1]است (X_3). تأثیر علّی X_2 بر X_3 منفی است (هر چه ارتدکس بیشتر، نگرش آزادی خواهانه کمتر) و همچنین تأثیر علّی X_3 بر Y نیز منفی ا ست (هر چه نگرش آزادی خواهانه کمتر، بی‌میلی به یهودیان قوی‌تر). نمودار علّی در شکل۲-۶ این مکانیزم رابطه علّی غیرمستقیم را نشان می‌دهد.

علامت‌های منها (-) در شکل ۲-۶ رابطه منفی را نشان می‌دهند (هر چه یکی بیشتر، دیگری کمتر و هر چه یکی کمتر، دیگری بیشتر). علامت سؤال نشان‌گر آن ا ست که رابطه اولیه فرض شده بین X_1 و Y ممکن است مستقیم نباشد، بلکه ماهیت علّی غیرمستقیم داشته باشد. تحلیل همبستگی تفکیکی در این جا هم به‌کار برده شده است. همچون حالت علّت و معلولی غیر واقعی، واریانس مشترک X_1 و Y برای رابطه علّی غیرمستقیم تقریباً به‌کلی ناشی از واریانس مشترکی است که آن‌ها با متغیر کنترلی (در این جا X_3) دارند. در زیرگروه‌هایی که اشخاص دارای نمرات یکسان

1-libertarian attitude

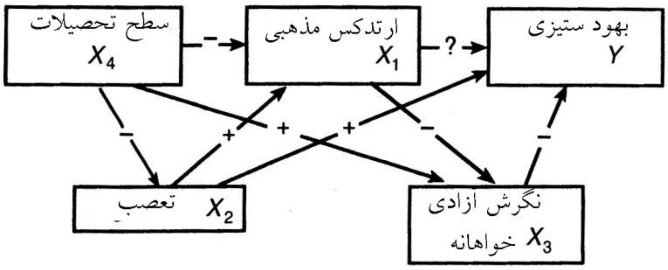
نگرش آزادی‌خواهانه هستند، رابطه بین مذهب و یهود ستیزی تقریباً ناپدید خواهد شد. بنابراین در هر دو حالتِ علت‌یابی غیرمستقیم و علت‌یابی غیرواقعی، نحوه محاسبه یکسان است. البته ترتیب پیکان‌های علّی تفاوت دارد. متغیر کنترلی X_3 در این حالت در میان X_1 و Y قرار می‌گیرد. به عبارت دیگر، این طرح اکنون حالت علّی مناسبی دارد، زیرا ارتدکس مذهبی بر یهودستیزی تأثیر دارد، گرچه مستقیم نیست، بلکه تأثیری غیرمستقیم با وساطت نگرش آزادی‌خواهانه به عنوان یک عامل میانجی می‌باشد.

در تحقیق مربوط به تأثیر علّی اعتقادات مسیحیت بر یهودستیزی، در واقع هر دو طرح رابطه غیرواقعی و غیرمستقیم به طور ترکیبی بکار رفته‌اند. ویژگی‌های اجتماعی –روان‌شناختی مثل تعصب مذهبی به عنوان متغیرهای پیش‌آیند عمل کرده و عامل‌های دیگر مثل نگرش آزادی‌خواهانه، نقش متغیرهای میانجی را بازی کردند. علاوه بر این متغیرهای زمینه‌ساز متعددی مثل سن، سطح تحصیلات و غیره، در مدل علّی دخالت داده شده‌اند. گاهی به این متغیرها متغیرهای برون‌زاد می‌گویند. معمولاً آن‌ها در سمت چپ نمودار علت و معلولی قرار داده می‌شوند [در متون انگلیسی]، چون به عنوان متغیرهای علّی لایه‌های عمیق‌تر در نظر گرفته می‌شوند که خود تحت تأثیر علّی متغیرهای دیگر نیستند. مثلاً سطح تحصیلات (X_4) بر نگرش آزادی‌خواهانه، تأثیر مثبت و بر تعصب مذهبی و ارتدکسی مذهبی، تأثیر منفی دارد. تأثیر علّی آن بر یهودستیزی مستقیم نیست، بلکه غیرمستقیم و منفی می‌باشد که از طریق تعصب مذهبی (هر چه تحصیلات بالاتر، تعصب کمتر و در نتیجه یهود ستیزی کمتر است) و آزادی‌خواهی (هر چه تحصیلات بالاتر، آزادی‌خواهی بیشتر و در نتیجه یهودستیزی کمتر است) صورت می‌گیرد.



شکل ۲-۶ مکانیزم علّیت غیرمستقیم

نمودار علّی که در آن نه تنها یهودستیزی، مذهب و تعصب بلکه همچنین سطح تحصیلات گنجانده شده است، اکنون نظام پیچیده‌ای از زنجیره‌های علّت و معلولی می شود چنان که در شکل شماره ۳-۶ نشان داده شده است.



شکل۳-۶ نظام زنجیره‌های علّی

چنین مدل پیچیده‌ای از طریق تحلیل مسیر، مورد بررسی و تحقیق قرار می‌گیرد و در بخش‌هایی که به دنبال می‌آید با آن سر وکار خواهیم داشت. ابتدا از مکانیزم ساده تحلیل همبستگی تفکیکی آغاز می‌کنیم.

۲-۶ ماتریس داده‌ها

واحدهای تحلیل، اشخاص هستند. ما در مثال (ساختگی) کوچک خود تعداد n=۱۰ واحد در نظر گرفته ایم. تمام متغیرها در یک سطح کمی با نمرات از ۰ تا ۹ اندازه‌گیری شده بودند.

متغیر Y معرف اندازه یهودستیزی است.

X_1 میزان ارتدکس مذهبی است.

X_2 درجه تعصب مذهبی است.

X_3 ویژگی آزادی خواهانه نگرش به زندگی است.

X_4 سطح تحصیلات است.

ماتریس داده‌ها در جدول ۱-۶ نشان داده شده است. در جدول ۲-۶ این داده‌ها به شکل ماتریس همبستگی درآمده است.

جدول ۱-۶ ماتریس داده‌ها

X_4	X_3	X_2	X_1	Y	
۹	۸	۱	۲	۳	
۶	۸	۲	۱	۳	
۴	۶	۳	۵	۲	
۷	۵	۳	۲	۶	
۶	۷	۴	۳	۴	
۴	۴	۵	۶	۵	
۵	۴	۶	۵	۶	
۵	۶	۷	۸	۴	
۱	۲	۸	۷	۹	
۶	۵	۹	۳	۸	
۵/۳	۵/۵	۴/۸	۴/۲	۵/۰	میانگین
۲/۱۱۱	۱/۹۰۰	۲/۶۵۸	۲/۳۴۸	۲/۲۶۱	انحراف معیار

جدول ۲-۶ ماتریس همبستگی

	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
Y	۱/۰۰۰	۰/۲۵۱	۰/۷۷۷	-۰/۸۰۲	-۰/۴۴۲
X_1	۰/۲۵۱	۱/۰۰۰	۰/۶۱۲	-۰/۶۲۳	-۰/۷۳۱
X_2	۰/۷۷۷	۰/۶۱۲	۱/۰۰۰	-۰/۷۰۴	-۰/۵۸۲
X_3	-۰/۸۰۲	-۰/۶۲۳	-۰/۷۰۴	۱/۰۰۰	۰/۷۶۲
X_4	-۰/۴۴۲	-۰/۷۳۱	-۰/۵۸۲	۰/۷۶۲	۱/۰۰۰

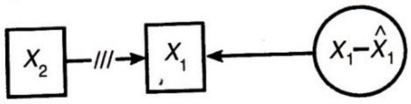
۳-۶ تحلیل همبستگی تفکیکی

۱-۳-۶ مدل مورد نظر

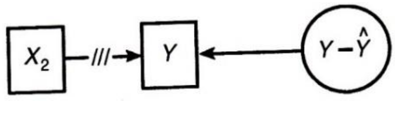
ابتدا اجازه دهید به سراغ برر سی همبستگی تفکیکی بین مذهب (X_1) و یهود ستیزی (Y) با کنترل تعصب مذهبی (X_2) برویم.

از راه‌های زیادی می‌شـــود به این همبســـتگی تفکیکی نگاه کرد. ما فهم بهتر مطلب را مد نظر قرار داده‌ایم که طبق آن تأثیر X_2 از روی X_1 و همچنین Y برداشـــته می‌شـــود، طوری‌که همبســـتگی تفکیکی، همبستگی ساده بین باقی مانده‌های $X_1 - \hat{X}_1$ و $Y - \hat{Y}$ بشود. این مکانیسم شامل سه مرحله است.

در مرحله نخســت یک تحلیل رگرســیون چند متغیره X_1 روی X_2 اجرا شــده اســت. مقادیر برآورد شده X_1 محا سبه و تفاوت $X_1 - \hat{X}_1$ نمرات باقی مانده را به د ست می‌دهد. توزیع نمرات باقی مانده نشـــان می‌دهد که وقتی واریانس مشـــترک X_2 کنار گذاشـــته شـــود X_1 تا چه حد تغییر می‌کند. از جنبه مدل مورد نظر این مرحله نخســت را می توان به وســیله شــکل زیر بیان کرد که در آن، علامت ممیز وسط پیکان نشان‌دهنده این است که تأثیر X_2 کنار گذاشته شده است.

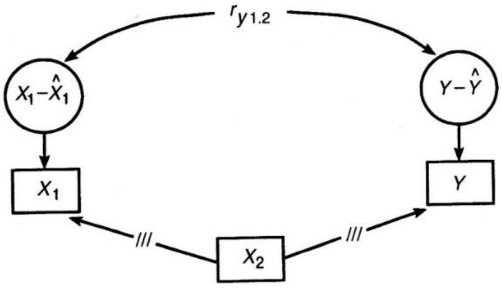


در مرحله دوم یک رگر سیون دو متغیره Y روی X_2 اجرا شده ا ست. مقادیر برآورد شده $\hat{Y}$ محاسبه و تفاوت $Y - \hat{Y}$ نمرات باقی مانده را که تأثیر X_2 از آن برداشته شده، به دست می‌دهد.



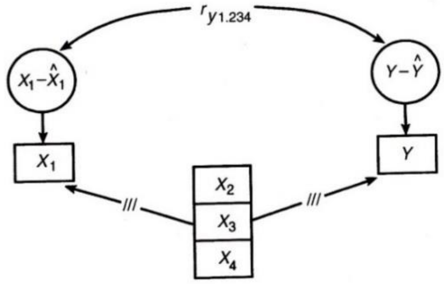
در مرحله سوم $X_۱ - \hat{X}_۱$ و $Y - \hat{Y}$ همبسته شده‌اند. این همبستگی مرتبه صفر بین باقی مانده‌ها، ضریب همبستگی تفکیکی $r_{y۱/۲}$ است. چنان که این ضریب را به صورت یک پیکان دو سویه نشان دهیم و اگر سه مرحله فوق را در یک مدل جمع کنیم، شکل ۴-۶ به دست می‌آید.

بنابراین ضریب همبستگی تفکیکی $r_{y۱/۲}$ ضریب همبستگی گشتاوری مرتبه صفر بین Y و X_1 است بعد از آنکه واریانس مشترک با X_2 از هر دو متغیر برگرفته شود.



شکل ۴-۶ الگوی تحلیل همبستگی تفکیکی

همچنین می توان بجای X_2 (تعصب)، X_3 (آزادی خواهی) یا X_4 (سطح تحصیلات) را به‌عنوان متغیر کنترلی در نظر گرفت. در این موارد ضرایب همبستگی تفکیکی به ترتیب $r_{y۱/۳}$ و $r_{y۱/۴}$ هستند. این ضرایب همبستگی، ضرایب مرتبه اول می باشند، زیرا در هر نقطه یک متغیر کنترل می‌شود. این مدل را می‌توان برای ضرایب همبستگی تفکیکی مراتب بالاتر با چندین متغیر کنترلی بسط داد. در ضریب همبستگی مرتبه سوم $r_{y1.234}$، ضریب همبستگی تفکیکی بین Y و X_1 محاسبه می‌شود در حالی که متغیرهای X_2، X_3 و X_4 کنترل می‌شوند. در این حالت مرحله نخست، یک همبستگی دو متغیره نیست، بلکه تحلیل رگرسیون چندگانه X_1 روی X_2، X_3 و X_4 است که به عبارت باقیمانده $X_۱ - \hat{X}_۱$ منجر می شود. مرحله دوم یک تحلیل رگرسیون چندگانه Yروی X_2، X_3 و X_4 است که عبارت باقی مانده $Y - \hat{Y}$ را حاصل می‌شود. آنگاه ضریب همبستگی مرتبه صفر بین $X_۱ - \hat{X}_۱$ و $Y - \hat{Y}$ ضریب $r_{y1.234}$ است. این موضوع در شکل ۵-۶ نمایش داده شده است.



شکل ۵-۶ الگوی تحلیل همبستگی تفکیکی مرتبه بالا

در مورد جمعیت به جای حروف لاتین از حروف یونانی ا ستفاده می شود. در این حالت ضرایب نمونه‌ای $r_{y۱/۲}$ ، $r_{y۱/۳}$ ، $r_{y۱/۴}$ و $r_{y۱/۲۳۴}$ که در بالا نشان داده شدند به جای r با ρ نوشته می‌شوند.

۲-۳-۶ رویکرد هندسی

مدل ضریب همبستگی تفکیکی مرتبه صفر بین باقی مانده‌ها که پیش از این مورد بحث قرار گرفت را می‌توان در فضـای سـه بعدی برای ضـریب همبسـتگی تفکیکی مرتبه اوّل(با یک متغیر کنترلی) بازنمایی کرد. در شکل ۶-۶، برای متغیرهای مذهب (X_1)، یهود ستیزی (Y) و متغیر کنترلی تعصب (X_2) سه محور تر سیم شده ا ست. آن‌ها با یکدیگر یک مکعب ۱۰×۱۰×۱۰ را ت شکیل می‌دهند. بر روی ضلع جانبی سمت چپ، همبستگی دو متغیره بین X_2 و X_1ارائه شده ا ست. دایره‌های کوچک معرف زوج نمرات (X_2 و X_1) هسـتند. خط مسـتقیمی که از این نقاط می گذرد، تابع رگرسـیون $\hat{X}_۱ = ۱/۶۰ + ۰/۵۴X_۲$ است که از طریق OLS (روش کمترین مجذورات) برآورده شده و در آن X_1 متغیر وابسته و X_2 متغیر مستقل است. فواصل زوج‌های اعداد از این خط $\hat{X}_۱$ به وسیله خطوط کوتاه نشـان داده شـده و معرف نمرات $X_۱ - \hat{X}_۱$ اسـت. در این شـکل باقی مانده‌ها با اسـتفاده از انتقال‌های موازی به سطح بالایی مکعب امتداد یافته‌اند.

به همین ترتیب، همبستگی دو متغیره بین X_2 و Y روی ضلع جانبی سمت را ست ن شان داده شده ا ست. نقاط دایره‌ای زوج‌های (Y و X_2) هستند. تابع رگر سیون برآورد شده با Y به عنوان متغیر وابسـته و X_2 به عنوان متغیر مسـتقل عبارت اسـت از $\hat{Y} = ۱.۸۳ + ۰/۶۶X_۲$. در این جا نیز باقی مانده‌های $Y - \hat{Y}$ به شـکل انتقالی به سـطح بالایی ترانهاده[1] شـده‌اند. نقاط دایره‌ای در سـطح بالایی رسم شده‌اند، جایی که باقی مانده‌های صفحه (X_1 ،X_2) و باقی مانده‌های صفحه (X_2 و Y) به

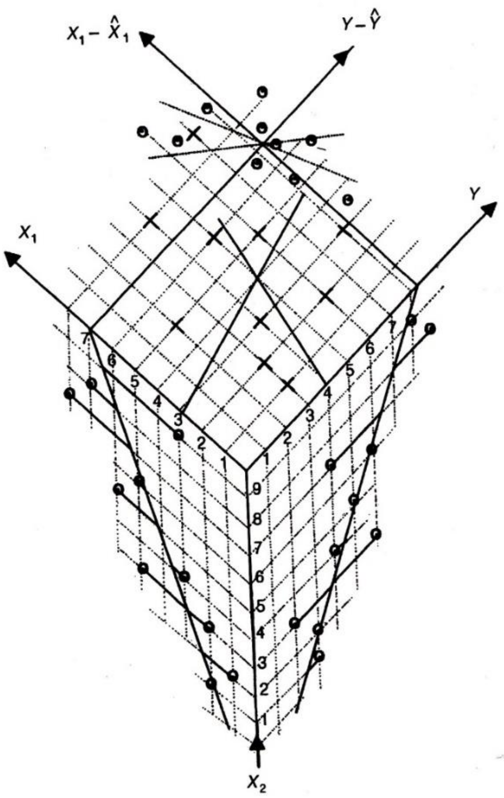
1. transposed

هم می‌رسند. همچنین محورهای $X_۱ - \hat{X}_۱$ و $Y - \hat{Y}$ نیز در سطح بالایی به وسیله ترانهش توابع رگرسیون مشخص شده‌اند.

چنان چه یک تحلیل رگرسیون دو متغیره بین نمرات باقیمانده $X_۱ - \hat{X}_۱$ و $Y - \hat{Y}$ اجرا کنیم، دو تابع رگرسیون حاصل می‌شود: $Y - \hat{Y} = -۰/۳۴۶(X_۱ - \hat{X}_۱) + e$ و $X_۱ - \hat{X}_۱ = -۰/۵۸۷(Y - \hat{Y}) + e$. این دو خط رگرسیون در سطح بالایی با خط‌های کوتاه سیاه‌رنگ مشخص شده‌اند. ضرایب رگرسیون ۰/۳۴۶- و ۰/۵۸۷- هر دو منفی هستند . میانگین هندسی معادل $[(-۰/۳۴۶)(-۰/۵۸۷)]^{۱/۲} = ۰/۴۵۰$ است، یعنی همان ضریب همبستگی بین $X_۱ - \hat{X}_۱$ و $Y - \hat{Y}$. این همان ضریب تفکیکی $r_{y1.2}$ می‌باشد.

ما می‌توانیم این ضریب همبستگی تفکیکی را از طریق فرمول مربوط به ضریب همبستگی مرتبه صفر برای نمرات $X_۱ - \hat{X}_۱$ و نمرات $Y - \hat{Y}$ نیز به دست آوریم.

روی سطح بالای شکل ۶-۶، همچنین تحلیل دو متغیره بین $X1$ و y بدون کنترل x_2 را رسم کرده‌ایم. زوج‌های $(X1,Y)$ به صورت ضربدر و دو تابع $\hat{Y} = ۳/۹۸ + ۰/۲۴x_۱$ و $\hat{X}_۱ ۲/۹۰ + ۰/۲۶Y$ به وسیله خطوط کامل نشان داده شده‌اند. ضرایب رگرسیون b_{y1} و b_{1y} همچون ضریب همبستگی $r_{y۱} = ۰/۲۵$ که خود میانگین هندسی ۰/۲۴ و ۰/۲۶ می‌باشد، مثبت هستند.



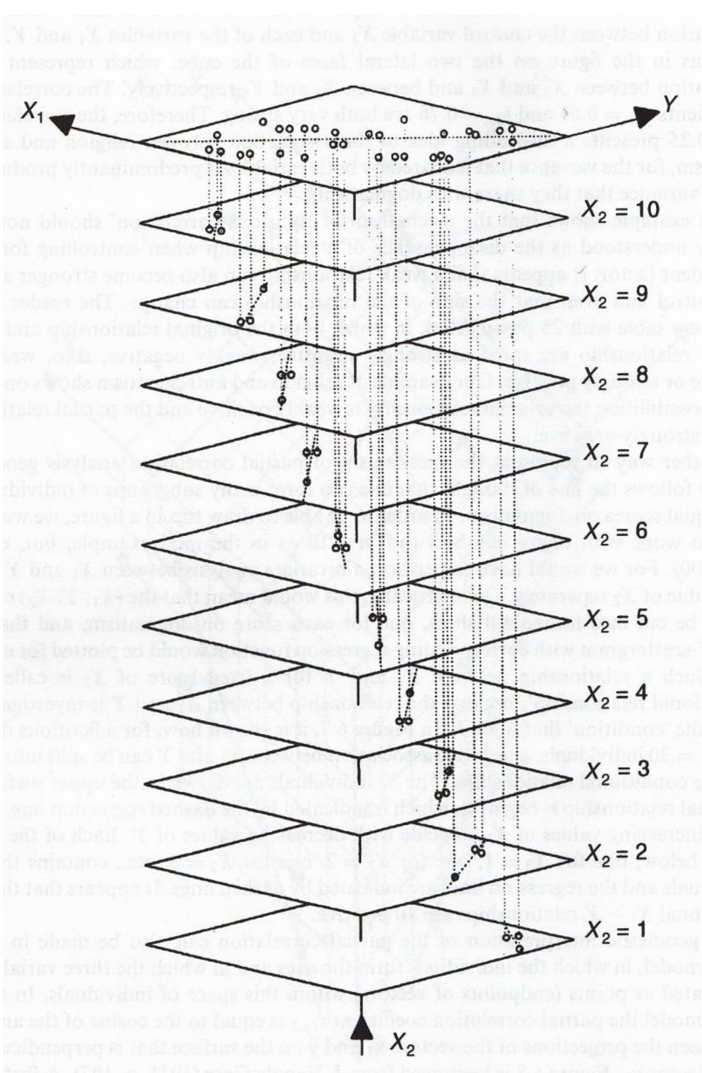
شکل ۶-۶ همبستگی مرتبه صفر به عنوان همبستگی بین نمرات باقی مانده

بدین ترتیب ملاحظه می‌کنیم که مکانیسم تحلیل همبستگی تفکیکی تا چه حد می‌تواند کارآیی داشته باشد. درحالیکه رابطه اولیه بین مذهب و یهودستیزی مثبت بود ($r_{y1} = ۰/۲۵$) با کنترل تعصب نه تنها قوی‌تر شد، بلکه علامت آن هم تغییر کرد ($r_{y1/2} = -۰/۴۵$). به این مفهوم که رابطه بین مذهب و یهود ستیزی در ابتدا به‌نظر می‌آمد متوسط و مثبت باشد (هر چه مذهبی‌تر، یهودستیزی بیشتر)، اما این رابطه بعداً به شکل قوی و منفی برای اشخاصی در آمد که نمرات یکسانی در متغیر تعصب داشتند (هر چه مذهبی‌تر، یهودستیزی کمتر). دلیل این تفاوت زیاد میان همبستگی ساده و همبستگی تفکیکی آن است که بین متغیر کنترلی X_2 و هر یک از متغیرهای X_1 و Y رابطه قوی وجود دارد. در شکل فوق این مطلب را در دو بعد جانبی مکعب ملاحظه می‌کنیم، که نشان‌دهنده رابطه بین X_2 و X_1 و نیز X_2 و Y هستند. ضریب همبستگی $r_{21} = ۰/۶۱$ و $r_{2y} = ۰/۷۸$ هر دو بسیار قوی هستند. از این رو ضریب همبستگی $r_{1y} = ۰/۲۵$ برداشت اشتباه‌آمیز از رابطه

مذهب و یهودستیزی است، زیرا واریانسی که از سوی هر دو متغیر به اشتراک گذاشته شده، عمدتاً از واریانسی حاصل شده که آن‌ها با متغیر تعصّب در اشتراک دارند.

این مثال نشان می دهد که مکانیسم «همبستگی ظاهری» را نباید به سادگی به عنوان عدم وجود یک رابطه با کنترل یک عامل پیش‌آیند تلقی کرد. مشخص گردید که یک رابطه ضعیف می‌تواند با کنترل، قوی‌تر شده و حتی علامت آن تغییر کند. خواننده می‌تواند جدولی متشکل از ۲۵ حالت ممکن را تصور کند که در آن هم رابطه اولیه و هم همبستگی تفکیکی به صورت منفی قوی، منفی ضعیف، صفر، مثبت ضعیف یا مثبت قوی رتبه‌بندی شده‌اند. مثال ما از رابطه مذهب و یهودستیزی یکی از این حالات ممکن را نشان می دهد: رابطه اولیه مثبت و همبستگی تفکیکی منفی قوی می باشد.

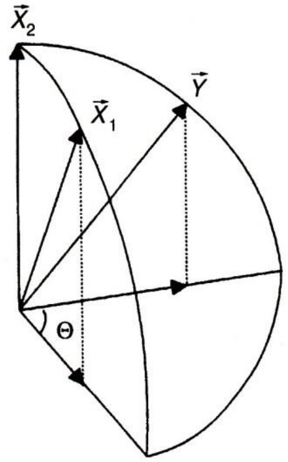
روش دیگر برای بیان مکانیسم تحلیل همبستگی تفکیکی به صورت هندسی از این دیدگاه پیروی می‌کند که می‌توان زیر گروه‌های متعددی از افراد با نمرات یکسان تعصب تشکیل داد. برای این که بتوانیم این را در یک شکل ترسیم کنیم، ناگزیریم شمار زیادی را به کار گیریم (به جای n=۱۰ در مثال کوچک فوق مثلاً (n=۲۰۰۰). زیرا ناچار خواهیم بود برای هر مقدار X_2 یک تحلیل دو متغیره جداگانه بین X_1 و Y انجام دهیم. به لحاظ هندسی معنای این کار این است که مکعب (X_1 Y،X_2) به برش‌های افقی تقسیم شود که هر برش برای یک نمره تعصب خواهد بود، و این که یک نمودار $X_1 - Y$ با تابع رگرسیونی ناظر بر آن، برای هر برش ترسیم شود. چنین رابطه ای بین X_1 و Y برای یک نمره ثابت X_2 "رابطه شرطی" نامیده می‌شود، زیرا رابطه X_1 و Y تحت شرایط $X_2 = k$ مورد بررسی قرار می‌گیرد. در شکل۷-۶ نشان داده شده که چگونه در مجموعه‌ای ساختگی از داده‌ها متشکل از n= ۳۰ نفر، یک همبستگی منفی بین X_1 و Y می‌تواند به ده رابطه شرطی مثبت تقسیم شود. ۳۰ نفر در سطح بالایی شکل ترسیم شده‌اند، رابطه کلی منفی است که به وسیله خطوط نقطه‌چین رگرسیونی نشان داده شده‌اند، که در آن‌ها افزایش ارزش‌های X_1 با کاهش ارزش‌های Y همراه است. هر یک از ده صفحه زیرین، یکی برای $X_2 = ۱$، یکی برای $X_2 = ۲$، یکی برای $X_2 = ۳$ و غیره، سه نفر را دربر می‌گیرد و خطوط رگرسیون به صورت نقطه‌چین نشان داده شده‌اند. این نشان می دهد که این روابط شرطی همگی مثبت هستند.



شکل ۷-۶ تقسیم یک مجموعه روابط به چند رابطه شرطی

تفسیر هندسی همبستگی تفکیکی را به صورت مدل برداری هم می‌توان در آورد، که در آن افراد محورها را تشکیل می‌دهند و سه متغیر به صورت نقاطی (نقاط انتهایی بردار) در بین فضای افراد قرار می‌گیرند. در این مدل برداری، ضریب همبستگی تفکیکی $r_{1y.2}$ برابر با کسینوس زاویه ای Θ بین تصویر بردارها $\vec{x}_1$ و $\vec{Y}$ بر سطحی است که بر بردار $\vec{x}_2$ عمود است. شکل ۸-۶ از جی .وان

دی گیر[1] (۱۹۷۱، ص ۱۰۷) گرفته شده است. توضیحات بیشتر را می‌توانید در کتاب ام. جی کندال و آ.استوارت[2] (۱۹۶۹، ص ۳۲۸) پیدا کنید.



شکل۸-۶ ضریب همبستگی تفکیکی در مدل برداری

۳-۳-۶ اهداف شیوه آماری

تحلیل همبستگی تفکیکی به عنوان یک شیوه محاسبه دارای سه هدف می باشد. در مثال تأثیر علّی اعتقادات مســـیحیت (X_1) بر یهودســـتیزی (Y) به عنوان زمینه با محدود کردن بحث به یک متغیر کنترل (تعصـــب مذهبی X_2 یا آزادی خواهی X_3)، اهداف تحلیل همبســـتگی تفکیکی را می توان به صورت زیر خلاصه نمود:

۱- ما به بررســـی این می‌پردازیم که آیا رابطه بین X_1 و Y ظاهری و غیر واقعی اســـت یا نه. این کار بدین‌گونه است که ضریب همبستگی اولیه $r_{۱y}$ و ضریب همبستگی تفکیکی $r_{۱y.۲}$ را با هم مقایسه می‌کنیم که در آن متغیر کنترلی X_2 یک متغیر آزمون مقدماتی اســـت، یعنی متغیری که از لحاظ تسلسل علّی مقدم بر X_1 و Y می‌باشد.

۲- ما می‌خواهیم بدانیم که آیا همبستگی بین X_1 و Y، علّیت غیرمستقیم است. در این حالت ضریب همبستگی اولیه $r_{۱y}$ را با ضریب همبستگی تفکیکی $r_{۱y.۳}$ مقایسه می‌کنیم. متغیر کنترل $^{x}3$ در این حال یک متغیر آزمایشی میانجی است که از لحاظ سلسه مراتب علّی بین X_1 و Y واقع شده است.

۳- ما به تحلیل این موضـــوع می‌پردازیم که آیا ضـــریب همبســـتگی تفکیکی یافت شـــده در نمونه به جمعیت قابل تعمیم است . یعنی یک آزمون معناداری آماری به عمل می‌آوریم.

1. J. Van de Geer
2. M. G. Kendall & A. Stuart

۶-۳-۴ محاسبه همبستگی تفکیکی

ابتدا به محاسبه ضریب همبستگی مرتبه نخست $r_{1y.۲}$ پرداخته و برای این کار شیوه بخش‌های قبلی را طبق مدل تحلیل همبستگی تفکیکی پی می‌گیریم. در قدم اول یک تحلیل رگرسیون دو متغیره از X_1 به عنوان تابعی از X_2 صورت داده، مقادیر برآورد شده X_1 را محاسبه و تفاوت $X_۱ - \hat{X}_۱$، نمرات باقی مانده را به ما می‌دهد. در مرحله دوم یک تحلیل رگرسیون دو متغیره از Y به عنوان تابعی از X_2 به‌عمل می‌آید، مقادیر برآورد شده $\hat{Y}$ محاسبه و تفاوت $Y-\hat{Y}$ نمرات باقیمانده حاصل می‌شود که از تأثیر X_2 مبرّا شده‌اند. در مرحله سوّم، ضریب همبستگی مرتبه صفر بین $X_۱ - \hat{X}_۱$ و $Y-\hat{Y}$ محاسبه می‌شود. این همان ضریب همبستگی تفکیکی $r_{y1.2}$ است. این عملیات‌ها همگی در جدول ۳-۶ آورده شده‌اند.

جدول ۳-۶ محاسبه همبستگی تفکیکی

مرحله ۱: $\hat{X}_۱ = ۱.۶۹ + ۰.۵۴X_۲$

Y	X_2	$\hat{Y}$	$Y-\hat{Y}$
۳	۱	۲/۴۹	۰/۵۱
۳	۲	۳/۱۵	-۰/۱۵
۲	۳	۳/۸۱	-۱/۸۱
۶	۳	۳/۸۱	۲/۱۹
۴	۴	۴/۴۷	-۰/۴۷
۵	۵	۲/۱۳	-۰/۱۳
۶	۶	۵/۷۹	۰/۲۱
۴	۷	۶/۴۵	-۲/۴۵
۹	۸	۷/۱۱	۱/۸۹
۸	۹	۷/۷۷	۰/۲۳

مرحله ۲: $\hat{Y} = ۱.۸۳ + ۰.۶۶X_۲$

X_1	X_2	$\hat{X}_۱$	$X_۱ - \hat{X}_۱$
۲	۱	۲/۱۵	-۰/۱۵
۱	۲	۲/۶۹	-۱/۶۹
۵	۳	۳/۲۳	۱/۷۷
۲	۳	۳/۲۳	-۱/۲۳
۳	۴	۳/۷۷	-۰/۷۷
۶	۵	۴/۳۱	۱/۶۹
۵	۶	۴/۸۵	۰/۱۵
۸	۷	۵/۳۹	۲/۶۱
۷	۸	۵/۹۳	۱/۰۷
۳	۹	۶/۴۷	-۳/۴۷

$$r_{(X_۱-\hat{X}_۱)(Y-\hat{Y})} = r_{y.۱.۲} = -۰.۴۵$$

مرحله ۳

پیش‌تر در رویکرد هند سی از این حقیقت سخن به میان آمد که تحلیل همبستگی تفکیکی بسیار کارآمد است: در آنجا رابطه بین مذهب و یهود ستیزی که در ابتدا ضعیف و مثبت بود ($r_{1y} = ۰/۲۵$)، وقتی از لحاظ تعصب کنترل گردید به رابطه قوی و منفی تغییر یافت ($r_{1y} = ۰/۴۵$).

بررسی علّیت غیرمستقیم که در آن یک متغیر میانجی آزمایشی (X_3) به جای یک متغیر پیش‌آیند (X_2) به کار رفته است نیز به شیوه مشابهی صورت می‌گیرد. نتایج سه مرحله مورد بحث به این شرح است:

مرحله اول: $\hat{X}_1 = ۱۱/۹۶ + ۰/۷۷\, X_3$

مرحله دوم: $\hat{Y} = ۱۰/۲۵ + ۰/۹۵\, X_3$

مرحله سوم: $Y_{1y.3} = ۰/۵۳$

در این جا نیز ملاحظه می شود که همبستگی بین اعتقادات مسیحیت و یهود ستیزی که در ابتدا ضعیف و مثبت بود ($r_{1y} = ۰/۲۵$)، بعد از کنترل متغیر آزادی‌خواهی به یک رابطه قوی و منفی ($r_{1y.3} = ۰/۵۳$) تغییر یافته ا ست. دلیل این تغییر شدید را باید در رابطه منفی و قوی بین X_3 و هر یک از متغیرهای اولیه X_1 و Y جستجو کرد ($r_{13} = -۰/۶۲$، $r_{y3} = -۰/۸۰$) : هر چه مذهبی بودن بیشتر، آزادی‌خواهی کمتر و هر چه آزادی‌خواهی کمتر، یهودستیزی بیشتر است.

یک فرمول محاسباتی برای ضریب همبستگی تفکیکی

به آسانی می‌توان نشان داد که ضریب همبستگی تفکیکی ($r_{y۱.۲}$) برابر با کسری است که صورت آن برابر با تفاوت بین همبستگی اولیه ($r_{y۱}$) و حاصل‌ضرب همبستگی‌های اصلی ($r_{y۲}r_{۱۲}$)، و مخرج آن میانگین هندسی (جذر حاصل‌ضرب) بخش‌هایی از واریانس متغیرهای اولیه X_1 و Y است که توسط متغیر کنترلی X_2 توضیح داده نشده‌اند (یعنی واریانس باقی مانده ها: $۱-r_{y۲}^۲$ و $۱-r_{۱۲}^۲$):

$$\boxed{r_{y۱.۲} = \frac{r_{y۱} - r_{y۲}r_{۱۲}}{\left[(۱-y_{y۲}^{۲})(۱-r_{۱۲}^{۲})\right]^{۱/۲}}}$$

عمل اشتقاق فرمول که متضمن دانش قبلی در باره همبستگی و رگرسیون است به صورت زیر انجام می‌شود.

از فرمول ضریب همبستگی مرتبه صفر شروع می‌کنیم:

$$r_{y۱} = \frac{\frac{۱}{n}\Sigma(x_۱ - \bar{x}_۱)(y-\bar{y})}{\frac{۱}{n}\left[\Sigma(x_۱-\bar{x}_۱)^۲\Sigma(y-\bar{y})^۲\right]^{۱/۲}}$$

در این فرمول صورت کسر کوواریانس s_{1y} و مخرج آن حاصل‌ضرب انحراف استانداردها $s_1 s_y$ (یا میانگین هندسی واریانس‌ها) است، طوری‌که:

$$r_{۱y} = \frac{s_{۱y}}{s_۱ s_y} = \frac{s_{۱y}}{(s_۱^۲ s_y^۲)^{۱/۲}}$$

فرمول ضریب همبستگی تفکیکی را هم به روش مشابهی می توان ساخت:

$$r_{۱y.۲} = \frac{s_{۱y.۲}}{s_{۱.۲}s_{y.۲}} = \frac{s_{۱y.۲}}{(s_{۱.۲}^{۲}s_{y.۲}^{۲})^{۱/۲}}$$

ابتدا به بسط صورت کسر $s_{۱y.۲}$ می‌پردازیم . می‌دانیم که فرمول کلی برای کوواریانس بین X_1 و Y چنین است:

$$s_{۱y} = \frac{۱}{n}\Sigma(X_۱ - \bar{X})(y - \bar{y}) = \frac{۱}{n}\Sigma x_۱$$

برای سادگی، $X_۱ - \bar{X}_۱$ را با X_1 و $Y - \bar{Y}$ را با y می‌نویسیم، یعنی انحراف از میانگین را با حروف کوچک نشـــان می‌دهیم. مزیت دیگر این نمرات «انحراف از میانگین» آن اســـت که ثابت‌های معادلات رگرسیون حذف می‌گردند.

اکنون بجای $s_{۱y}$ به $s_{۱y.۲}$ نیاز داریم. این کوواریانس میانگین حاصل‌ضـرب نمرات باقی مانده است، بعد از آن که تأثیر x_2 از هر یک از متغیرهای X_1 و Y برداشته شود:

$$s_{۱y.۲} = \frac{۱}{n}\Sigma(x_۱ - \hat{x}_۱)(y - \hat{y})$$

$$= \frac{۱}{n}\Sigma(x_۱ - b_{۱۲}x_۲)(y - b_{y۲}x_۲)[no\,\text{int}\,recept]$$

$$= \frac{۱}{n}\Sigma(x_۱ - r_{۱۲}\frac{s_۱}{s_۲}x_۲)(y - r_{y۲}\frac{s_y}{s_۲}x_۲)$$

$$= \frac{۱}{n}\left[\Sigma x_۱ y - r_{۱۲}\frac{s_۱}{s_۲}\Sigma x_۲ y - r_{y۲}\Sigma x_۱ x_۲ + r_{۱۲}r_{y۲}\frac{s_۱ s_y}{s_۲^{۲}}\Sigma x_۲^{۲}\right]$$

$$s_{۱y} - r_{۱۲}\frac{s_۱}{s_۲}s_{۲y} - r_{y۲}\frac{s_y}{s_۲}s_{۱۲} + r_{۱۲}r_{y۲}s_y r_{۲۲}$$

در قســمت مخرج، نخســت به بســط عبارت $s_{۱.۲}^{۲}$ می‌پردازیم. فرمول عمومی یک واریانس در حالت بیان اختصاری $s_۱^{۲} = ۱/n\Sigma x_۱^{۲}$ است. به همین ترتیب واریانس $s_{۱.۲}^{۲}$، مجموع مجذورات نمرات باقی مانده X_1 پس از کنار زدن تأثیر X_2 است:

$$s_{۱.۲}^{۲}=\frac{۱}{n}\Sigma(x_{۱}-\hat{x}_{۱})^{۲}$$

$$=\frac{۱}{n}\Sigma(x_{۱}-b_{۱۲}x_{۲})^{۲}$$

$$=\frac{۱}{n}\Sigma(x_{۱}-r_{۱۲}\frac{s_{۱}}{s_{۲}}x_{۲})^{۲}$$

$$=\frac{\Sigma x_{۱}^{۲}}{n}+r_{۱۲}^{۲}\frac{s_{۱}^{۲}}{s_{۲}^{۲}}\frac{\Sigma x_{۲}^{۲}}{n}-۲r_{۱۲}\frac{s_{۱}}{s_{۲}}\frac{\Sigma x_{۱}x_{۲}}{n}$$

$$=s_{۱}^{۲}+r_{۱۲}^{۲}\frac{s_{۱}^{۲}}{s_{۲}^{۲}}s_{۲}^{۲}-۲r_{۱۲}\frac{s_{۱}}{s_{۲}}r_{۱۲}s_{۱}s_{۲}$$

$$=s_{۱}^{۲}+r_{۱۲}^{۲}s_{۱}^{۲}-۲r_{۱۲}^{۲}s_{۱}^{۲}$$

$$=s_{۱}^{۲}-r_{۱۲}^{۲}s_{۱}^{۲}$$

$$=s_{۱}^{۲}(۱-r_{۱۲}^{۲})$$

به همین ترتیب داریم:

$$s_{\mathrm{y}.2}^{2}=s_{y}^{2}(1-r_{\mathrm{y}2}^{2})$$

از این رو مخرج هست:

$$(s_{1.2}^{2}s_{\mathrm{y}.2}^{2})^{\frac{1}{2}}=\left[s_{1}^{2}(1-r_{12}^{2})s_{\mathrm{y}}^{2}\left(1-r_{\mathrm{y}2}^{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=s_{1}s_{\mathrm{y}}[(1-r_{12}^{2})\left(1-r_{\mathrm{y}2}^{3}\right)]^{\frac{1}{2}}$$

از تقسیم صورت بر مخرج، فرمولمورد نظر حاصل می‌شود:

$$r_{y۱.۲}=\frac{s_{۱y}-r_{۱۲}\frac{s_{۱}}{s_{۲}}s_{۲y}-r_{y۲}\frac{s_{y}}{s_{۲}}s_{۱۲}+r_{y۲}s_{۱}s_{y}r_{۲۲}}{s_{۱}s_{y}[(۱-r_{۱۲}^{۲})(۱-r_{y۲}^{۲})]^{۱/۲}}$$

$$=\frac{r_{۱y}-r_{۱۲}r_{۲y}-r_{y۲}r_{۱۲}+r_{۱۲}r_{y۲}}{[(۱-r_{۱۲}^{۲})(۱-r_{y۲}^{۲})]^{۱/۲}}$$

$$=\frac{r_{۱y}-r_{۱۲}r_{y۲}}{[(۱-r_{۱۲}^{۲})(۱-r_{y۲}^{۲})]^{۱/۲}}$$

در مثال ما نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$r_{1y.2}=\frac{0.251-(0.612)(0.777)}{[(1-0.612^{2})(1-0.777^{2})]^{1/2}}=-0.451$$

این فرمول را از شـــیوه‌های دیگر هم می توان به دســـت آورد. یکی از این روش‌ها اســـتفاده از فرمول توزیع نرمال اســـت. وقتی که یک متغیر داریم، تحت عنوان «توزیع نرمال تک متغیری» از آن یاد می کنیم. مثلاً برای X_1 این توزیع فرمول زیر را دارد (که در آن عبارت $\exp[-y]$ برای e^{-y} در نظر گرفته شده است):

$$f(x_۱) = \frac{۱}{\delta_۱\sqrt{۲\Pi}} \exp\left[-\frac{۱}{۲}\frac{(X_۱-\mu_۱)^۲}{\delta_۱^۲}\right]$$

این توزیع تابعی از دو پارامتر: $\mu_۱$ و $\delta_۱$ یعنی میانگین و انحراف معیار X_1 است. فرمول فوق را برای دو یا چند متغیر می‌توان بسط داد. برای دو متغیر به عنوان «توزیع نرمال دو متغیره» و برای چند متغیر، به عنوان «توزیع نرمال چند متغیره» از آن یاد می‌شـــود. در این حالت تعداد پارامترها زیادتر اســـت: چند میانگین $\mu_۲, \mu_۱$،...، چند انحراف معیار $\delta_۲, \delta_۱$... و همچنین همبســـتگی‌ها- کوواریانس یا ضرایب همبستگی ساده- بین هر جفت متغیر (فقط یک چنین همبستگی در حالت دو متغیره).

ســـپس فرمول ضـــریـب همبســـتگی تفکیکی $r_{۱y.۲}$ از طریق اعمـال قـاعـده ضـــرب $p(A,B) = p(A|B)p(B)$ حســـاب احتمالات به دســـت می‌آید، که در آن $A = \{X_۱, y\}$ و $B = X_2$ اســـت. بنابراین ،عامل $p(A|B)$ توزیع احتمال بهنجار دو متغیره $X_۱$ و y برای یک حالت ثابت $^{X}2$، یعنی $F(\{X_۱,Y\}|X_۲)$ اســـت و می توان آن را به صـــورت $P(A,B)$ تقســـیم بر P(B) نوشـــت، یعنی به عنوان خارج قســـمت توزیع احتمال بهنجار ســـه متغیری $F(X_۱, y, X_۲)$ و توزیع احتمال بهنجار یک متغیره $F(x_۲)$. دستکاری این فرمول که قدری پیچیده است، یک توزیع بهنجار دو متغیره $X_۲|X_۱$ و $Y|X_۲$ را پدید می‌آورد که پارامتر همبستگی آن $r_{۱y.۲}$ است و با فرمولی که در بالا برای ضریب همبستگی تفکیکی به دست آوردیم، یکسان است. برای توضیح بیشتر این اشتقاق فرمول می توانید به کندال و استوارت[1] (۱۹۶۹) و نیز برون‌لی[2] (۱۹۶۵) مراجعه کنید.

کندال و اســـتوارت (۱۹۶۹-ص ۳۲۹-۳۲۸) همچنین موفق به اثبات فرمول از طریق مدل هندسی شده‌اند که به علاقه‌مندان توصیه می شود آن را مطالعه کنند.

یک روش دیگر برای به دست آوردن فرمول $r_{۱y.۲}$، استفاده از روش تحلیل مسیر است که در بخش‌های آینده با آن سر وکار خواهیم داشت. ضرایب تحلیل مسیر، ضرایب استاندارد شده رگرسیون تفکیکی هستند که می توان آن‌ها را به‌عنوان توابع ضرایب همبستگی مرتبه صفر به شکل زیر بیان نمود:

$$b^*_{y۱.۲} = (r_{y۱} - r_{۱۲}r_{y۲})/(۱-r_{۱۲}^۲)$$

1. Kendal & Stuart   2. Bronlee

با در نظر گرفتن X_1 به عنوان متغیر وابسته و Y به عنوان متغیر مستقل خواهیم داشت:

$$b^*_{1y.2} = (r_{y1} - r_{12}r_{y2})/(1 - r_{y2}^2)$$

درست همان‌طور که ضریب همبستگی مرتبه صفر r_{1y}، میانگین هندسی در ضریب رگرسیون b_{y1} و b_{1y} می‌باشد. به همین ترتیب ضریب همبستگی تفکیکی مرحله اول $r_{1y.2}$ نیز میانگین هندسی دو ضریب رگرسیون تفکیکی $b_{y1.2}$ و $b_{1y.2}$ یا حالت استاندارد شده آن‌ها $b^*_{y1.2}$ و $b^*_{1y.2}$ است. در واقع می‌بینیم که :

$$(b^*_{1.2}b^*_{1y.2})^{1/2} = \left[\frac{(r_{y1} - r_{12}r_{y2})}{(1 - y_{12}^2)}\frac{(r_{y1} - r_{12}r_{y2})}{(1 - r_{y2}^2)}\right]^{1/2}$$

$$= \frac{(r_{y1} - r_{12}r_{y2})}{\left[(1 - r_{12}^2)(1 - r_{y2}^2)\right]^{1/2}} = r_{1y.2}$$

این فرمول را به آسانی می‌توان برای ضرایب مراتب بالاتر هم بسط داد. مثلاً اگر علاوه بر X_2، X_4 را نیز به عنوان متغیر کنترلی به بررسی رابطه بین X_1 و Y وارد کنیم آنگاه به راحتی فرمول $r_{1y.2}$ را نوشته و کنترل X_4 را به هر همبستگی مرتبه صفر در فرمول اضافه می‌کنیم، یا برعکس فرمول را برای $r_{1y..4}$ می‌نویسیم و در هر مرحله کنترل X_2 را اعمال می‌کنیم:

$$r_{1y.24} = \frac{r_{1y.4} - r_{12.4}r_{y2.4}}{\left[\left(1 - r_{12.4}^2\right)\left(1 - r_{y2.4}^2\right)\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{r_{1y.2} - r_{14.2}r_{y4.2}}{\left[(1 - r_{14.2}^2)(1 - y_{y4.2}^2)\right]^{1/2}}$$

مشاهده می‌کنیم که ضریب همبستگی تفکیکی مرتبه دوّم، تابعی از ضرایب مرتبه اول است. هر ضریب مرحله بالاتر را به همین روش می‌توان نوشت یعنی به شکل ضرایب یک مرحله پایین‌تر از آن.

در مثال ما، داریم $r_{12.4} = 0/337, r_{1y.4} = -0/118$ و $r_{y2.4} = 0/712$، بدین ترتیب نتیجه می‌گیریم:

$$r_{1y.24} = \left[-0.118 - (0.337)(0.712)\right]/$$
$$\left[(1 - 0.337^2)(1 - 0.712^2)\right]^{1/2} = -0.541$$

۵-۳-۶ ضریب همبستگی نیمه تفکیکی (پاره‌ای)

ضریب همبستگی پاره‌ای[1] $r_{y(1.2)}$ که هایس[2] آن را ضریب همبستگی نیمه تفکیکی[3] نیز نامیده است، با ضریب همبستگی تفکیکی $r_{y1.2}$ دارای این تفاوت است که در آن تأثیر متغیر کنترلی X_2 از X_1 برداشته شده، امّا از Y برداشته نشده است. در مقایسه با مدل تحلیل همبستگی تفکیکی که قبلاً ذکر شد مراحل سه گانه در این جا به دو مرحله تقلیل یافته است. در مرحله نخست نمرات باقی مانده $X_1 - \hat{X}_1$ از تحلیل رگرسیون X_1 روی X_2 محاسبه می‌شود. در مرحله دوم و آخرین مرحله به محاسبه ضریب همبستگی مرتبه صفر بین این نمرات باقیمانده $X_1 - \hat{X}_1$ و نمرات اولیه Y می‌پردازیم. آنگاه حاصل همان ضریب همبستگی پاره‌ای $r_{y(1.2)}$ است. برای ضرایب مراتب بالاتر مثل $r_{y(1.24)}$، به همین ترتیب تأثیر متغیرهای کنترلی X_2 و X_4 (باهم!) از X_1 کنار زده می شود، اما از Y نمی‌شود. در مثال ما پیرامون یهودستیزی، بدین‌گونه است که یک ضریب همبستگی بین نمرات اولیه یهودستیزی از یک‌سو، و نمرات مذهب، آزاد از تأثیر تعصب و سطح تحصیلات، از سوی دیگر، محاسبه می‌شود.

هر گاه که لازم باشد به جنبه‌های محتوایی توجه کنیم، همبستگی پاره‌ای کاربرد کمی پیدا می‌کند. یکی از دلایل ترجیح همبستگی پاره‌ای به همبستگی تفکیکی در تحقیقات تجربی به این خاطر است که وقتی تأثیر متغیر کنترلی x_2 برداشته می‌شود، ممکن است واریانس y کلاً ناپدید گردد، طوری که مقدار ناچیزی برای تبیین باقی بماند. در چنین حالتی، البته متغیر کنترل، یک متغیر کاملاً ویژه خواهد بود، زیرا تقریباً کل واریانس آن با یک متغیر خاص در اشتراک است. مثلاً تعصب را می‌توان جای یهود ستیزی گذاشت، و آنگاه همبستگی پاره‌ای بین نمره مذهب آزاد از اثر تعصّب، و یهود ستیزی به همبستگی تفکیکی بین نمره مذهب و تعصب خالص و خود متغیر تعصّب کاهش خواهد یافت.

مثالی از کاربرد مناسب‌تر ضریب همبستگی پاره‌ای در تحقیق کُلسُن[4] (۱۹۷۷) روی تعدادی از کشورهای نمونه پیرامون تأثیر ساختار سن بر میزان زاد و ولد[1] دیده می شود. ساختار سن به شکل عملیاتی به عنوان میانگین سن (A)، و زاد و ولد به عنوان ضریب کلی زاد و ولد[5] (B) در نظر گرفته شده‌اند. اما چون ضریب کلی زاد و ولد مستقل از ساختار سن نیست و همچنین دومی مستقل از اولی نیست، طوری که میانگین سن A، شامل یک مؤلفه باروری می‌شود، مشکل تداخل بروز می‌کند. مشکل فوق به دو طریق قابل حل است، مشروط به این که باروری را به عنوان متغیری وارد تحلیل کنیم که به صورت رقم خام تولید مثل[6] (R) اندازه‌گیری می‌شود و از آن در می‌یابیم که از ساختار

1. part correlation
2. Hays
3. Semipartial
4. Colson
5. Natality
6. gross birth coefficient

سن مستقل است. شیوه نخست محاسبه ضریب همبستگی بین A و R، یعنی همبستگی بین ساختار سـن و باروری منفک از سـن[1] اسـت. شـیوه دوم که از سـوی مؤلف به منظور توضـیح نرخ زاد و ولد برگزیده شده، محاسبه ضریب همبستگی پاره‌ای $r_{B(A.R)}$ بین زاد و ولد (اندازه‌گیری شده به صورت B) و ساختار باروری منفک از سن (نمرات باقی مانده A بعد از کنار زدن تأثیر R) است.

این نمونه‌ای از کاربرد تحلیل همبستگی پاره‌ای است که گویای این است که فرد واقف است به این که همیشـه نمی‌داند چه مفاهیمی پس از رفع درهم‌آمیختگی بر جای می‌ماند. لذا منطقی اسـت در صورت امکان، بین مفاهیم اولیه (ساختار سن و زاد و ولد) به لحاظ مفهومی فرق گذاشته شود.

فرمول محاسباتی همبستگی تفکیکی و پاره‌ای

در قسـمت قبلی سـعی کردیم ارتباط همبسـتگی پاره‌ای را از جنبه محتوا توضـیح دهیم. اما طبعاً اولویت با توان آن اسـت. برای ضـریب همبسـتگی پاره‌ای، می توان فرمول‌های زیادی می‌شـود طرح نمود و از هر یک از این فرمول‌ها یک معادله برای ضریب همبستگی تفکیکی به دست آورد. ما اکنون بعضی اشتقاق‌های ضریب $r_{y(۱.۲۴)}$ را در رابطه با مثال یهودستیزی نشان می‌دهیم.

همبستگی پاره‌ای در حالت مجذور خود، افزایش در بخشی از واریانس تبیین کننده Y است که وقتی X_1 به مجموعه $\{X_۴, X_۲\}$ اضافه شود، ظاهر می‌شود:

$$r^۲_{y(۱.۲۴)} = R^۲_{y.۱۲۴} - R^۲_{y.۲۴}$$

$$۰/۷۲ - ۰/۶۰۴ = ۰/۱۱۶$$

اگر آن را به شکل زیر بازنویسی کنیم گویاتر خواهد بود:

$$R^۲_{y.۱۲۴} = R^۲_{y.۲۴} + r^۲_{y(۱.۲۴)}$$

ضریب تعیین چندگانه $R^۲_{y.۱۲۴}$ بخشی از واریانس y است که به وسیله X_1، X_2 و X_4 با هم تبیین می شود. این ضریب برابر ۰/۷۲۰ است. این قسمت از واریانس را می‌توان به طور جمعی به دو بخش تقسیم نمود؛ بخش نخست $R^۲_{y.۲۴}$ قسمتی از واریانس y است که توسط X_2 و X_4 با هم تبیین می‌شود. این مقدار برابر ۰/۶۰۴ است. بخش دوم قسمتی است که به واسطه X_1، بعد از آزادسازی آن از تأثیرات X_2 و X_4 به مقدار واریانس تبیین کننده اضـافه می‌شـود. این همان مجذور همبسـتگی پاره‌ای $r^۲_{y(۱.۲۴)} = ۰/۱۱۶$ است.

اگر X_1 با X_2 و X_4 همبسته نباشد آنگاه این افزایش $R^۲$ به طور ساده معادل $r^۲_{y۱}$ است. از سوی دیگر چنانچه X_1 به شدت با X_2 و X_4 همبسته باشد، در این صورت مجذور ضریب پاره‌ای، با مجذور ضـریب اولیه $r^۲_{y۱}$ بسـیار متفاوت خواهد بود. این در واقع همان حالتی اسـت که در مثال ما دیده می‌شود ($r^۲_{y۱} = ۰/۰۶۳$ در برابر $r^۲_{y(۱.۲۴)} = ۰/۱۱۶$).

1. Raw reproduction figures

حال چنانچه متغیرهای دیگر X_2 و X_4 با هم، بخش قابل ملاحظه‌ای از واریانس Y را تبیین کنند، چیز زیادی برای تبیین تو سط X_1 باقی نمی‌ماند. در این حالت ضریب پاره‌ای $r^{۲}_{y(۱.۲۴)}$ به طور نادر ستی کوچک بوده و به سختی می‌توان آن را با و ضعیتی مقایسه کرد که متغیرهای کنترلی چیز زیادی از واریانس را تبیین نمی‌کنند. بنابراین عاقلانه‌تر آن اســت که مقدار «مطلق» افزایش $R^{۲}$ را به بخـشی از واریانس Y که به و سیله X_2 و X_4 تبیین نمی شود تقـسیم کنیم. با این کار مجذور ضریب همبستگی پاره‌ای را به دست می‌آوریم که معادل افزایش «نسبی» در بخشی از واریانس تبیین شده y است که با افزودن X_1 به مجموعه $\{X_2$ و $X_4\}$ ظاهر می‌شود.

$$r^{۲}_{y۱.۲۴} = \frac{R^{۲}_{y.۱۲۴} - R^{۲}_{y.۲۴}}{۱ - R^{۲}_{y.۲۴}}$$

$$= \frac{۰.۷۲۰ - ۰.۶۰۴}{۱ - ۰.۶۰۴} = ۰.۲۹۳$$

در نتیجه مجذور ضریب همبستگی تفکیکی از تقـسیم مجذور همبستگی پاره‌ای بر بخـشی که توسط متغیرهای کنترلی تبیین نشده، حاصل می‌گردد:

$$r^{۲}_{y۱.۲۴} = \frac{r^{۲}_{y(۱.۲۴)}}{۱ - R^{۲}_{y.۲۴}} \Rightarrow r_{y۱.۲۴} = \frac{r_{y(۱.۲۴)}}{(۱ - R^{۲}_{y.۲۴})^{۱/۲}}$$

در مثال ما داریم:

$$۰.۲۹۳ = \frac{۰.۱۱۶}{۱ - ۰.۶۰۴} \text{ و } -۰.۵۴۱ = \frac{-۰.۳۴۱}{(۱ - ۰.۶۰۴)^{۱/۲}}$$

اکنون بگذارید از راه دیگری به مقایسه همبستگی تفکیکی و پاره‌ای بپردازیم. این بار از ضریب همبســتگی تفکیکی $r_{y۱.۲۴}$ شــروع می‌کنیم. نقطه شــروع ما، دانش کلی مربوط به تحلیل دو متغیره است که $r_{y۱} = b_{y۱}(s_۱ / s_y)$. این فرمول را می‌توان برای ضریب همبستگی تفکیکی $r_{y۱.۲۴}$ گسترش داد که در نتیجه برابر ا ست با حا صل ضرب ضریب تفکیکی رگر سیون $r_{y۱.۲۴}$ در نـ سبت دو انحراف معیار. البته منظور انحراف معیار $s_۱$ و s_y دو متغیری نیســـت، بلکه انحراف معیار نمرات باقی مانده پس از رگرســـیون X_1 و y روی متغیرهای کنترلی X_2 و X_4 اســـت. این ها به ترتیب عبارتند از $s_۱(۱ - R^{۲}_{۱.۲۴})^{۱/۲}$ و $s_y(۱ - R^{۲}_{R.۲۴})^{۱/۲}$. لذا فرمول به این صورت خواهد بود:

$$r_{y1.24} = b_{1.24}\frac{s_1(1-R^2_{1.24})^{1/2}}{s_y(1-R^2_{y.24})^{1/2}}$$

$$=0.511\frac{2.348(1-0.487)^{1/2}}{2.26(1-0.604)^{1/2}}=-0.541$$

در این فرمول $b_{y1.24}(s_1/s_y)$ برابر است با $b^*_{y1.24}$ بنابراین :

$$r_{y1.24} = b^*_{y1.24}\frac{(1-R^2_{1.24})^{1/2}}{(1-R^2_{y.24})^{1/2}}$$

$$=-0.531\frac{(1-0.587)^{1/2}}{(1-0.604)^{1/2}}=-0.541$$

چنان که در بخش‌های بعدی خواهیم دید، ضــریب اســتاندارد رگرســیون تفکیکی $b^*_{y1.24}$ برابر اســت با ضــریب مســیر p_{y1} در تحلیلی با Y به عنوان متغیر وابســته و X_1 ، X_2 و X_4 به عنوان متغیرهای مستقل است.

ضریب همبستگی پاره‌ای که برای آن کنترل روی X_2 و X_4 برای X_1 نه برای Y اجرا شده است را می‌توان به سهولت از فرمول قبلی با کنار زدن عامل $(1-R^2_{y.24})^{1/2}$ به دست آورد:

$$r_{y(1.24)} = b_{y1.24}\frac{s_1}{s_y}(1-R^2_{1.24})^{1/2} = b^*_{y1.24}(1-R^2_{1.24})^{1/2}$$

$$=-0.511\frac{2.348}{2.261}(1-0.587)^{1/2}=-0.531(1-0.587)^{1/2}=-0.341$$

۶-۳-۶ آزمون‌های معناداری

در تحلیل رگرسیون چندگانه دیدیم که چگونه می‌توان آزمون سهم معنادار یک پیش‌بینی‌کننده را از طریق رویکرد مدل مقایســـه اجرا نمود. آزمون های معناداری $r_{y1.24}, r_{y(1.24)}$ و $b_{y1.24}$ یکســـان هستند.

۶-۴ شیوه سیمون- بلالاک[1] برای مدل‌های علّی پیچیده

در مقاله معروف خود تحت عنوان «همبستگی غیرواقعی، یک تفسیر علّی»، هربرت سیمون (۱۹۵۴) شـــرح داد که در طرح $X \leftarrow Z \rightarrow Y$ رابطه علّی غیرواقعی به شـــواهد آماری مشـــابه طرح $X \rightarrow Z \rightarrow Y$ رابطه علّی غیر م ستقیم، نیاز ا ست. هر دو مکانی سم علّی، زمانی از سوی شواهد تجربی حمایت می‌شوند که ضریب همبستگی تفکیکی $r_{xy.z}$ معادل صفر باشد.

در مثال ما رابطه بین مذهب (X_1) و یهودستیزی (Y) توسط متغیر تعصب (X_2) در صورتی آشکار می شود که ضریب همبستگی r_{y1} در اثر کنترل X_2 به یک ضریب همبستگی تفکیکی $r_{y1.2}$

1. Simon-Blalock

ناچیز تغییر یابد. و همین طور رابطه بین X_1 و Y از طریق متغیر واسطه‌ای نگرش آزادی خواهانه (X_3) ظاهر می‌شود به شرط آن که $r_{y1.3}$ به سمت صفر میل کند. این واقعیت که x_2 به لحاظ رابطه علّی مقدم بر هر دو متغیر است و این که X_3 در بین آن‌ها حایل شده است، بر اساس جنبه‌های غیر آماری است. آزمون‌های آماری تنها این نکته را روشن می‌کند که آیا اثر مستقیم علّی X_1 بر Y را می‌توان کنار زد، یعنی آیا مسیر علّی $Y \rightarrow X_1$ را باید از هر دو طرح فوق حذف کرد.

به دنبال نقطه نظرات سیمون، هربرت بلالاک این اندیشه را برای مدل‌های پیچیده علّی توسعه داد که حذف یک پیکان در مدل علّی، از طریق معادل صفر گرفتن همبستگی تفکیکی قابل آزمون می‌باشد. سهم عمده وی در این زمینه در فصل «ارزیابی مدل‌های علّی» از کتاب او با نام *اثرات علّی در تحقیقات غیرآزمایشی* (بلالاک ۱۹۶۱) به چشم می‌خورد.

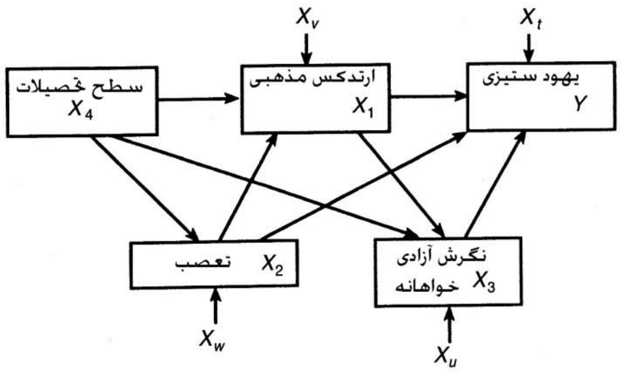
دلایلی که از سوی بلالاک برای ارزیابی مدل‌های علّی عرضه شده تنها برای حالاتی است که کلیه پیکان‌ها هم جهت باشند، یعنی زمانی‌که سر وکار ما با مدل‌های بازگشتی[1] بدون بازخورد مستقیم یا غیر مستقیم باشد. ما این را یک قاعده فرض می‌گیریم تا برای تجسم این حالت بازگشتی مربوط به تصویری از یک محور ترتیب علّی، از سمت چپ به راست همه شکل‌ها را رسم کنیم[2]. همیشه علت‌ها در سمت چپ اثرات آن ها، علت العلل‌ها در سمت چپ علت‌ها و الی آخر، ترسیم خواهند شد. عامل‌هایی که در انتهای چپ واقع می‌شوند متغیرهای برون زاد[2] نامیده می‌شوند، زیرا در آن مدل خاص، آن‌ها تحت تأثیر عامل‌های علّی دیگری قرار نمی‌گیرند. در مثال ما، سطح تحصیلات، نوعی از این متغیرهای برون‌زاد است. طرح علت و معلولی در شکل ۹-۶ نشان داده شده است.

مدل مزبور را به وسیله یک سیستم معادلات رگرسیون می توان ارائه کرد. یک معادله اولیه شامل y به عنوان متغیر وابسته و X_1، X_2 و X_4 به عنوان عامل‌های علّی مستقیم می شود. معادله دوم، X_3را به عنوان تابعی از X_1 و X_4 نشان می‌دهد. در معادله سوم X_1، تابعی از X_2 و X_4 می‌باشد. و معادله آخر اثر علّی مستقیم X_4 را بر X_4 نشان می‌دهد. بدین ترتیب، برای هر متغیر وابسته که پیکان‌ها بر آن وارد می شوند یک معادله وجود دارد، و متغیرهای مستقل یک معادله، عامل‌های علّی «مستقیمی» هستند که پیکان‌ها از آن‌ها امتداد پیدا می‌کنند.

1- recursive models

[با توجه به رسم الخط فارسی قاعده رسم مدل‌ها برعکس این حالت خواهد بود]

2-exogenous varlables



شکل ۹-۶ نمودار علّی

علاوه بر این، به هر معادله رگرسیون یک متغیر باقی مانده افزوده شده است. مثلاً X_t نشانگر آن است که چه بخشی از واریانس Y پس از این که متغیرهای X_1، X_2 و X_3 تأثیر علّی خود را با هم اعمال می‌کنند، همچنان تبیین نشده باقی می‌ماند. فرض براین است که یک متغیر باقی مانده (X_t)، با سایر عامل‌های علّی دخیل در معادله رگرسیون (X_1، X_2 و X_3) رابطه‌ای ندارد.

اکنون می‌توان دستگاه معادلات رگرسیونی که در مدل علّی مورد نظر مشارکت دارند را نوشت. هنگامی که متغیرها به صورت انحراف از میانگین (حروف کوچک) نوشته می‌شوند، ثابت‌ها را می‌توان کنار گذاشت.

$$\begin{cases} Y = b_{y1.23}x_1 + b_{y2.13}x_2 + b_{y3.12}x_3 + b_{yt.123}x_t \\ X_3 = b_{31.4}x_1 + b_{34.1}x_4 + b_{3u.14}x_u \\ X_1 = b_{12.4}x_2 + b_{14.2}x_4 + b_{1v.24}x_v \\ X_2 = b_{24}x_4 + b_{2w.\Sigma}xw \end{cases}$$

بلالاک چنین استدلال می‌کند که حذف یک پیکان در مدل علّی، مانند معادل صفر قرار دادن ضریب رگرسیون تفکیکی است. به طور مثال در معادله نخست که Y متغیر وابسته است اثر مستقیم علّی X_4 بر Y حذف شده است. بنابراین باید چنین فرض کرد که $b_{y4.123} = 0$ است. در معادله دوم، X_1، X_2 و X_3 علل بالقوه مستقیم X_3 هستند، زیرا نسبت به آن بیشتر در سمت چپ واقع شده‌اند، البته تنها X_1 و X_4 در معادله وارد شده‌اند. در نتیجه فرض براین است که $b_{32.14} = 0$ است.

توجه داشته باشید که متغیر وابسته را هرگز نباید کنترل کرد. همچنین نیازی به کنترل عامل‌هایی که ارتباطی با متغیرهای مورد نظر ندارند نیست، زیرا لازم نیست عامل‌هایی که توان انجام کاری در مکانیسم غیر واقعی یا رابطه غیر مستقیم ندارند را کنترل کنیم.

در دو معادله آخر عامل‌های حذف شده وجود ندارند، بدین ترتیب هیچ ضریب رگرسیون تفکیکی را نمی‌توان معادل صفر گرفت.

اکنون فرمول ضریب رگرسیون تفکیکی و ضریب همبستگی تفکیکی معادل آن، دارای صورت کسر یکسان می‌باشند. به طور مثال، فرمول $b_{y2.14}$ و $r_{y2.14}$ هر دو دارای صورت $r_{y2.4}-(r_{y1.4})(r_{21.4})$ هستند.[1] هر کسری که صورت آن صفر باشد حاصلش صفر خواهد بود. از این رو این فرض که $b_{y2.14}=0$ است، همان حاصلی را خواهد داشت که $r_{y2.14}=0$ دارد. نتیجه آن که حذف یک پیکان در مدل علّی را با معادل صفر قرار دادن همبستگی تفکیکی هم می‌توان بیان نمود.

در مدل بازگشتی مثال تحقیقاتی ما دو پیکان حذف شده‌اند: $X_4 \rightarrow y$ و $X_2 \rightarrow X_3$. در نتیجه فرض بر این است که $r_{4.123}$ و $r_{32.14}$ هر دو برابر ۰ می‌باشند. این فرضیات پیشگویی‌هایی هستند که برای آزمون اعتبار مدل علّی می‌توان از آن استفاده کرد. برای توضیح بیشتر $r_{32.14}=0$ را درنظر می‌گیریم. صورت کسر $r_{32.14}$ عبارت است از $r_{32.4}-(r_{31.4})(r_{21.4})$. در نتایج حاصل از کامپیوتر می‌بینیم که $r_{32.4}=-0.494$، $r_{31.4}=-0.149$ و $r_{21.4}=0.337$. بنابراین، صورت $r_{32.4}$ که باید طبق مدل از پیش فرض شده برابر صفر باشد. در واقع برابر است با $-0.494-(-0.149)(0.337)=-0.444$. اختلاف بین آنچه انتظار می‌رفت و آنچه در حالت واقعی مشاهده شده چنان قابل ملاحظه است که اعتبار مدل را باید رد کرد. پیکان $X_2 \rightarrow X_3$ را نمی‌توان به آسانی حذف کرد.

به طور خلاصه، شیوه سیمون- بلالاک فرصتی برای آزمون اعتبار یک مدل علّی پیچیده، فراهم می‌کند. برای هر پیکانی که حذف می‌شود، ما امتحان می‌کنیم که آیا ضریب همبستگی تفکیکی نظیر آن (سطح بالاتر) برابر صفر است. با این کار، تنها مجبور به کنترل عامل‌هایی هستیم که با هر دو متغیر مورد نظر همبسته‌اند. برای متغیرهای وابسته نبایستی کنترلی اعمال شود.

این شیوه تنها برای مدل‌های بازگشتی مناسب است. شماری از پیش‌فرض‌ها به طور مثال، پیش‌فرض عدم همبستگی بین متغیرهای باقی مانده و عامل‌های علّی «مستقیم»، را باید مبنا قرار داد. این پیش‌فرض و پیش‌فرض‌های دیگر را در بخش تحلیل مسیر مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۵-۶ تحلیل مسیر

این شیوه که به وسیله سیمون توسعه یافته و به وسیله بلالاک به جامعه شناسی وارد شده و طبق آن، معادل صفر قرار دادن همبستگی‌های تفکیکی یک پیشینه تاریخی و همچنین یک تاریخچه ثانوی دارد. بلالاک و پیروانش در اتخاذ این نقطه نظر که ضرایب رگرسیونی در اصل نامتقارن بوده و

۱. برای ضرایب غیر استاندارد رگرسیون تفکیکی، S_y نیز در صورت وجود دارد، اما این مطلب تغییری در بحث فوق ایجاد نمی‌کند.

به این خاطر برای بیان اثرات علّی بهتر از ضرایب همبستگی هستند، از شیوه سیمون برای تحلیل مسیر سرمشق گرفتند.

در حقیقت، این تحلیل مسیر که در آن ضرایب مسیر با ضرایب استاندارد رگرسیون تفکیکی برابر هستند، مدت‌ها قبل توسط سیول رایت (۱۹۱۸، ۱۹۲۱، ۱۹۳۴) در رابطه با مسائل ژنتیک طرح و توسعه یافته بود. در دهه ۱۹۵۰ این تحلیل مسیر تحت نام دیگری با عنوان «مدل‌های معادله ساختاری» یا «مدل‌های معادله مشابه»، به وسیله هرمن ولد (۱۹۵۶،۱۹۵۴، ۱۹۶۰) به اقتصادسنجی راه یافت.

در حالی که مشارکت سیمون و گلدبرگر تنها به بسط موضوع در حوزه اقتصاد خلاصه می‌شود، بلالاک بود که رویکرد مدل علّی را به حوزه های علمی دیگر رهنمون شد.

به دنبال او، رایمون بودن (۱۹۶۵، ۱۹۶۷) تحلیل وابستگی را گسترش داد، که برای متغیرهای با سطح سنجش غیر کمی هم قابل استفاده است.

لازارفیلد (۱۹۶۸،۱۹۶۱،۱۹۵۵) و کولمن (۱۹۶۴) نیز در این توسعه به طور غیر مستقیم نقش داشته‌اند، اگرچه به تحلیل علّی کاری نداشتند.

امروزه تحلیل مسیر به وسیله روش جورسکوگ[1] (۱۹۷۳) تحت عنوان «دستگاه روابط ساختار خطی[2]» (لیزرل) گسترش فوق‌العاده‌ای یافته که در آن برای هر یک از پیش‌فرض‌های سخت تحلیل مسیر، راه‌حلی ارائه شده است؛ *بازخورد*، وارد کردن متغیرهای مکنون، تداعی بین باقی مانده‌ها و امکانات دیگری که در دهه‌های گذشته قابل تصور نبودند، از طریق «لیزرل» فراهم شده است.

قبل از کار با روش تحلیل مسیر اجازه دهید ابتدا بعضی دسته‌بندی‌هایی که در روش شناسی صورت گرفته را بررسی کنیم. با بعضی از این دسته‌بندی‌ها قبلاً در تحلیل رگرسیون چندگانه سروکار داشتیم. در این جا مسأله علت و معلولی را مد نظر قرار می‌دهیم. جهت آمادگی برای تحلیل مسیر از خود می‌پرسیم که آیا دسته‌بندی‌های ارائه شده با موضوع علّیت در رابطه است. از نظر ما این در مورد دسته‌بندی براساس **سطح سنجش متغیرها** (کمی، رتبه ای، اسمی یا ترکیبی از آن ها) صادق نیست. البته بعضی مؤلفین مایلند عبارات علّی را به قواعد کمی محدود سازند و مؤلفین دیگری تمایل دارند آن‌ها را به متغیرهای دو بخشی محدود سازند، زیرا بر مبنای منطق دو ظرفیتی استدلال[3] می‌کنند. هر دو دیدگاه غیر واقع بینانه است، بخصوص زمانی‌که روش‌شناسی تحقیقات علوم اجتماعی در نظر گرفته شود. درحقیقت مدل‌های علّی برای هر سطحی از سنجش فراهم شده‌اند. تشخیص و تمایز آن‌ها اصولاً جنبه کاملاً آماری و فنی داشته و ربطی به مسأله علّیت ندارد.

این مطلب در مورد دسته بندی مدل‌های علّی بر اساس **وضعیت تطبیق** (انطباق زیاد، کم و کامل) آن‌ها هم صادق است. منظور از تطبیق، امکان یافتن راه حلی برای سیستم معادلات ریاضی

---

1. Jorskog
2. LISREL (linear structural relation system)
3. bivalent

است که با مدل علّی از قبل فرض شده انطباق داشته باشد و از این رو به طور ساده یک شرایط کاری تلقی می شود. مثلاً، شرایط تطبیق زیاد (که معادلات بیشتر از عناصر نامعلوم باشند) شرایطی است که معادلات آزمون اضافی، علاوه بر ارزیابی کلی مدل تشکیل می شود، که به عقیده بعضی مؤلفین ترتیب علّی از طریق آن قابل آزمون خواهد بود.

دسته بندی دیگر **شیوه های برآورد** مختلف را به دست می‌دهد که برای حل سیستم معادلات ریاضی که مدل علّی را بازنمایی می‌کنند کاربرد دارد. به عنوان یک قاعده کلّی، ما روش معمول برای برآورد حداقل مجذورات (ols) را به کار می‌بریم که در تحلیل رگرسیون چندگانه درباره آن صحبت کردیم. اما کاربرد روش برآورد کمترین مجذورات (ols) در مدل های غیر بازگشتی، موجب بروز مسائل حادّ سوگیری می‌شود، به طوری که روش های برآورد دیگری مثل کمترین مجذورات غیرمستقیم و روش متغیر ابزاری را بایستی در نظر گرفت. مشکل مضاعف دیگر زمانی پیش می‌آید که چنین مدل غیربازگشتی ای دارای همانندی زیاد باشد، زیرا همان دستگاه معادلات یکسان، به راه‌حل‌های چندگانه می‌انجامد. در چنین حالتی حتی به شیوه‌های برآورد بیشتری همچون برآورد دو مرحله‌ای کمترین مجذورات یا برآورد بیشترین درست نمایی نیاز است.

شمار دیگری از دسته‌بندی‌ها در ادبیات روش‌شناسی، با علّیت رابطه مستقیم دارند. نمونه برجسته آن، تشخیص بین مدل‌های **بازگشتی** است که در آن‌ها همه تأثیرات علّی در یک جهت هستند، و مدل‌های **غیر بازگشتی** که چنین حالتی وجود ندارد.

دسته‌بندی دیگری که با مسأله دستگاه‌های بازگشتی در مقابل غیر بازگشتی ارتباط نزدیک دارد، تمایز مدل‌های **ایستا** (که در آن‌ها همه متغیرها اعم از عامل‌های علّی و عامل‌های تأثیرگذار در یک زمان واحد مورد مشاهده قرار می‌گیرند) از مدل‌های **پویا** است (که در آن‌ها مشاهدات در زمان‌های متفاوتی صورت می‌گیرد.) به بیان فلسفی آن، می‌دانیم که مقوله علّت و معلول از نوع پویاست. امّا این پویایی‌ها ضرورتاً یا صرفاً به وسیله بعد زمان نشان داده نمی‌شوند (سفسطه ی پیش از این، لذا به خاطر این[1]). البته محدود گشتن به ترتیب زمانی، به دلایل عملی در ادبیات روش‌شناسی ایجاد شده است. تحقیقات پنلی (میزگردی[2])و تحلیل‌های سری زمانی به عنوان طرح‌های مدل ایفای نقش می‌کنند. این واقعیت که محققان علوم اجتماعی به ندرت از مدل‌های پویا استفاده می‌کنند و عادت به طرح‌های زمینه‌یابی یک مرحله‌ای دارند، جای انتقاد است. اما این موضوع تغییری در این واقعیت که مدل‌های ایستا هم در بسیاری مواقع می‌توانند پویایی‌های علّی را نشان دهند، ایجاد نمی کند.

یک سیستم دسته‌بندی جدیدتر، بین فرمول‌های علّی با متغیرهای **مشاهده شده** و مدل‌های با متغیرهای **مشاهده نشده** که به آن‌ها متغیرهای مکنون، ساختارهای فرضی یا مفاهیم فرضی هم

1-post hoc ergo propter hoc sophism 2- panel research

گفته می‌شــود، فرق می‌گذارد. گروه دوم، ترکیبی از تحلیل ســاختار علّی (CSA) و تحلیل ســاختار مکنون (LSA) را تشکیل می‌دهد. ایده اصلی این است که قضایای علّی بر اساس مبانی نظری طرح شده‌اند، ولی مشاهدات، صرفاً شاخص‌ها یا جلوه‌های عملی این روابط نظری بین مفاهیم هستند. در این نقطه نظر که بر اساس شیوه **لیزرال** جورسکوگ می‌باشد، تمایز بین علت و شاخص نقش مهمی را ایفا می‌کند.

در دهه‌های گذشـــته، توجه روز افزونی به تمایز بین مدل‌های علّی **خطی** و **غیرخطی** شـــده اسـت. اجرای یک آزمون خطی که در تحلیل رگرسـیون چندگانه مورد بحث قرار گرفت بایسـتی یک شیوه استاندارد بشود.

موضـــوع دیگر در رابطه با خطی بودن، مشـــکل **جمع‌پذیری**[1] اســـت. در این جا بین مدل‌های جمع‌پذیر و غیرجمع‌پذیر فرق گذاشـــته می‌شـود. مقوله دوم به دسـتگاه‌هایی اشـاره دارد که در آن‌ها عبارات تعامل را در بر دارند. پیش از این، از تحلیل رگرسیون چندگانه دریافتیم که این اثرات تعاملی شـــکل عبارات ضـــرب را به خود می‌گیرند. در بحث‌های آینده پیرامون تحلیل واریانس و کوواریانس، توضیحات بیشتری در باره این مکانیزم‌های غیرجمع‌پذیر ارائه خواهیم کرد.

موضـــوع جدال‌انگیز دیگر، این ســـؤال اســـت که آیا متغیرهایی که در یک مدل علّی قرار دارند بایستی استاندارد شده باشند. استاندارد (بهنجار) سازی به معنای آن است که متغیرها به شکلی درآیند که میانگین آن‌ها ۰ و انحراف معیار آن‌ها ۱ شـــود، طوری که امکان مقایســـه آن‌ها با یکدیگر فراهم شود. بدین ترتیب دسته‌بندی جدید، به تمایز بین مدل‌های علّی با متغیرهای استاندارد شده و مدل‌های بدون متغیرهای استاندارد شده می‌پردازد. از نظر بعضی صاحب‌نظران، پارامترها یا ضرایب مدل‌های دارای متغیرهای استاندارد نشده را بایستی ساختاری یا بنیادی خواند. از نظر ما، این تمایز نوعی اغراق است. استانداردسازی به طور ساده سؤال از وارسی و نشان‌دار کردن وزن‌ها و مقیاس‌ها برای فراهم کردن امکان مقایسه است. چنان چه هدف ما مقایسه تأثیرات عوامل علّی مختلف در یک مدل علّی باشد، بهتر است استانداردسازی صورت گیرد، زیرا نمرات خام این عامل‌ها، واحدهای اندازه گیری متفاوتی هســـتند. از ســـوی دیگر چنانچه بخواهیم یک یا چند پارامتر از یک مدل علّی را در جمعیت‌های متفاوتی مورد مقایسه قرار دهیم، بهتر است از ضرایب استاندارد شده استفاده کنیم. یک دلیل فنی آن، این اســـت که ضـــرایب اســـتاندارد شـــده در جمعیت‌های مختلف ثابت هســـتند، حتی زمانی‌که واریانس‌های متغیرهای برون‌زاد و باقی مانده این جمعیت‌ها متفاوت باشـد، درحالی که برای ضرایب استاندارد شده چنین نیست (رجوع کنید به آپ و اسکمیت،[2] ۱۹۷۶؛ ص ۱۲۷).

آخرین موضـوعی که توجه زیادی را به خود جلب کرده اســت مســأله **چند هم خطی بودن**[3] اســـت. هم خطی یا در حالت چندین متغیر، چند هم خطی بدین معناســـت که همبســـتگی قابل ملاحظه‌ای بین عامل‌های علّی یک مدل علّی وجود دارد. از تحلیل رگرســـیون چندگانه دریافتیم که

1. additivity　2. Opp & Schmidt　3. multicollinearity

چند هم خطی یک م شکل واقعی ا ست، زیرا برآورد پارامترهای نمونه‌ای ضمن ایجاد خطاهای معیار بزرگ، ب سیار ناکارآمد می شود. و درنتیجه همچنان‌که در جهت ارزش و علامت پارارمترهای نظیر آن در جمعیت پیش می‌رویم در حالت عدم اطمینان باقی می‌مانیم . این مســـائل نه تنها ذاتاً تکنیکی هستند، بلکه با محتوای هم ربط دارند. از این‌رو، این درخواست که چند هم خطی بایستی پایین نگه دا شته شود، در واقع به این معنا ست که عامل‌های علّی در یک مدل چند علّیتی باید تأثیرات خود را به طور مســـتقل به اجرا بگذارند . بدیهی اســـت که مطلب فوق به این ســـؤال می‌انجامد که آیا چنین مدل‌های علّی بدون چند هم خطی واقعاً برای داده‌های علوم اجتماعی با واقعیت جور در می‌آید. لطفاً هم در جهت موافق و هم مخالف این ایده تأمل کنید.

تا این جا تعدادی از دسته‌بندی‌هایی که در روش‌شناسی تحقیقات علوم اجتماعی صورت گرفته بود را مورد بحث قرار دادیم و راهکارهای زیربنایی تحقیق علّی براســـاس آن بیان گردید. با توجه به این دسته‌بندی‌ها می‌توان گفت که «الگوی اولیه[1]» مدل‌های علّی عبارتند از **کمّی‌سازی** (برای انجام محا سبات همب ستگی و تحلیل رگر سیون)، **تطابق[2]** (به منظور یافتن راه حلی برای مدل)، **بازگشتی** (به منظور اســـتفاده از برآورد کمترین مجذورات)، **ای ستایی** (زیرا پیمایش‌های یک مرحله‌ای معمول هستند تا مسائل اضافی همبستگی خودبه خودی بروز نکند)، **مشاهده مستقیم** (طوری‌که بین علت و شـــاخص یا بین متغیرهای مکنون و آشـــکار نباید تمایز قائل شـــد)، **خطی بودن** (بدین ترتیب که تفســـیرها ســـادگی خود را حفظ کنند و تحلیل رگرســـیون و همبســـتگی خطی را بتوان به کار برد)، **جمع‌پذیری** (به گونه‌ای که نیازی به، به کارگیری عبارات تعاملی نباشـد)، **ا ستاندارد سازی** (برای این که امکان مقایســـه در یک جمعیت و جمعیت مشـــابه وجود داشـــته باشـد) و **عدم هم خطی** (به منظور پرهیز از برآوردهای ناکارآمد). این «الگوی اولیه» **تحلیل مسیر** است.

آنچه ما در این جا در رابطه با این شیوه بیان می‌کنیم برگرفته از شیوه ی کارل- دیتر آپ و پنتر اسکمیت (۱۹۷۶) است. آن‌ها سرفصلی از روش کار را در ۱۳ مرحله ارائه داده‌اند.

مرحله ۱: *تدوین اولیه فرضیات، طرح علّی و معادلات ساختاری*

ما این فرمول‌بندی را قبلاً در رابطه با شیوه سیمون- بلالاک انجام دادیم. فرضیات عبارتند از:

۱- ارتدکسی مذهبی بر یهودستیزی تأثیر علّی مستقیم و مثبتی دارد.

۲- تأثیر مذهب بر یهودستیزی به میزان زیادی محو می‌گردد، به خاطر تأثیر مثبت و مستقیم تعصب بر هر یک از متغیرها، (تأثیر علّی غیرواقعی).

1. prototype
2. identified

۳- تأثیر مذهب بر یهودستیزی تا حد زیادی غیرمستقیم است، چرا که از یک سو ارتدکس مذهبی بر آزادی خواهی اثر مســتقیم و منفی دارد و از ســوی دیگر آزادی خواهی بر یهودســتیزی تأثیر منفی و مستقیم دارد.

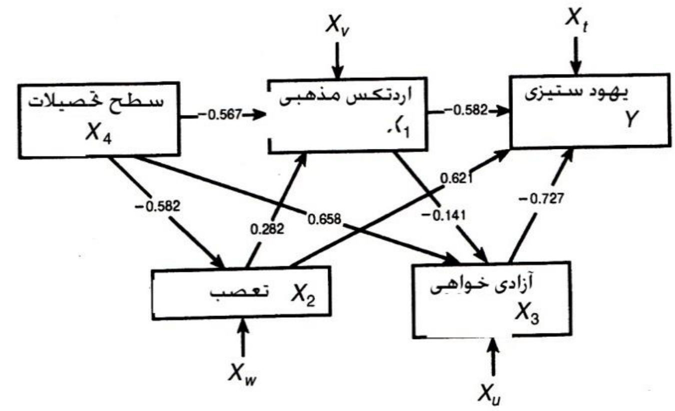
۴- تأثیرات علّی سطح تحصیلات بر یهودستیزی تماماً به طور غیرمستقیم از طریق مذهب، تعصب و آزادیخواهی اعمال می‌شود. این تأثیرات غیرمستقیم همگی منفی هستند. از این رو، تأثیرات مستقیم سطح تحصیلات بر مذهب و تعصب هر دو منفی بوده و تأثیر مستقیم سطح تحصیلات بر گرایش‌های آزادیخواهی مثبت است. در نتیجه، اثرات غیر مستقیم سطح تحصیلات بر یهودستیزی، به ترتیب، این گونه خواهد بود:

تحصیلات $\xleftarrow{-}$ مذهب $\xleftarrow{+}$ یهودستیزی

تحصیلات $\xleftarrow{-}$ تعصب $\xleftarrow{+}$ یهودستیزی

تحصیلات $\xleftarrow{+}$ آزادی‌خواهی $\xleftarrow{-}$ یهودستیزی

کاربرد قاعده علائم ($- = + \times -$ و $- = - \times +$) ســـبب یک تأثیر علّی منفی در همه موارد می‌شود. الگوی علّی مفروض (همراه با علائم مربوطه) در شکل ۱۰-۶ نشان داده شده است.



شکل ۱۰-۶ نمودار روابط علّی همراه با علائم

حال می توانیم معادلات ســاختاری ناظر بر این طرح را بنویســیم (برای رعایت اختصــار، عامل‌های کنترلی در ضرایب رگرسیون تفکیکی حذف شده‌اند):

$$\begin{cases} y = b_{y۱}x_۱ + b_{y۲}x_۲ + b_{y۳}x_۳ + b_{yt}x_t \\ x_۳ = b_{۳۱}x_۱ + b_{۳۴}x_۴ + b_{۳u}x_u \\ x_۱ = b_{۱۲}x_۲ + b_{۱۴}x_۴ + b_{۱v}x_v \\ x_۲ = b_{۲۴}x_۴ + b_{۲w}x_w \end{cases}$$

متغیر x_4 برون‌زاد نامیده می‌شـــود، زیرا خود تحت تأثیر عامل‌های علّی دیگری در این مدل قرار ندارد. X_1 Y، X_2 و X_3 متغیرهای درون‌زاد یا وابســته هســتند، زیرا حداقل به وســیله یک عامل علّی تحت تأثیر قرار می‌گیرند. $X_w X_v$ و X_u, X_t متغیرهای باقی مانده هســـتند. X_1، X_2 و X_3 شـــرایط دوگانه‌ای دارند. آن‌ها هم وابســـته و هم مســـتقل هســـتند یعنی هم علت و هم معلولند. اگر ویژگی اثر آن‌ها مورد تأکید قرار گیرد، آن‌ها را متغیرهای تعیین شـــده[1] می‌نامند.از طرف دیگر وقتی که بر ویژگی علّیت آن‌ها تأکید شود، متغیرهای تعیین‌کننده[2] هستند؛ زیرا باقی مانده نبوده و بر یک متغیر تأثیر علّی دارند. این تأثیر می‌تواند مســـتقیم یا غیرمســـتقیم باشـــد. مثلاً در رابطه با متغیر درون‌زاد y، متغیرهای X_1، X_2 و X_3 تعیین‌کننده مستقیم هستند، در حالی که X_4 تعیین‌کننده غیر مستقیم است. عنصر دیگر در طرح علّی فوق، پیکان انحنادار دو سویه است که برای رابطه بین دو متغیر بنا نهاده شده است، با این پرسش باز از آن می گذریم که آیا نوعی تفسیر علت و معلولی در کار است. چنین پیکان انحنایی دو سویه‌ای در طرح علّی فوق رسم نشده است، امّا اگر به نتایج تحلیل ســـیمون- بلالاک رجوع کنیم که طبق آن رابطه بین $X_۲ - X_۳$ را نباید نادیده گرفت، ما هم بین تعصب و آزادی خواهی چنین همبستگی را می‌توانیم تصور کنیم.

از نمودار فوق می‌شــود دریافت که یک فرمول‌بندی اولیه از فرضــیات گاهی محدود به نشــان دادن علائم تأثیرات علّی مثبت است. به طور مثال، انتظار می‌رود که مذهب و تعصب بر یهودستیزی اثر مثبت داشته باشند. از سوی دیگر انتظار این است که تأثیر آزادی خواهی بر آن منفی باشد. این‌ها به ترتیب این گونه تفسیر می شوند «هر چه ... بیشتر،... هم بیشتر، هر چه... بیشتر....کمتر». به بیان دقیق‌تر، ضرایب رگرسیون (b) یا **ضرایب مسیر** (P)، که در مرحله ۳ در باره آن بحث خواهیم کرد، باید از قبل طرح شوند. حال می توانیم تصور کنیم ممکن است برای ضرایب خاصی در اقتصادسنجی مثل نرخ مصرف؛ این امکان وجود داشته باشد که تأثیر درآمد بر مصرف را از جنبه رگرسیون خطی مربوطه اندازه‌گیری کرد و میزانی از ثبات را طی دوره‌های معین در کشورهای غربی نشان داد. اما در جامعه‌شـــناســـی چنین نمونه‌ای را نمی‌توانیم تصـــور کنیم. به جای از قبل فرض کردن مقادیر دقیق، می‌توان شاخص‌هایی از فواصل را که انتظار می‌رود ضرایب در آن حدود واقع شوند، در نظر گرفت. راه حل دیگری که کاربرد بیشتری در علوم اجتماعی داشته از قبل مرتّب کردن[1] ضرایب بر مبنای مقادیر آن هاست. این شیوه عملی دربردارنده این ایده است که عامل‌های علّی خاص نسبت به سایرین تأثیر بزرگتری دارند. راه‌حل آخری محدود شدن به نشان دادن **علائم** است، چنان که در مثال ما صورت گرفت. این کمترین شرط مورد نیاز هر قضیه فرضی – قیاسی است که باید جامه عمل بپوشد. در غیر

1-Predetermined variables — 2- Predetermining variables

1. arrangement — 2. Post factum — 3. Identification status???

این صورت، دیگر فرضیه‌ای آزمون نمی‌شود، بلکه یک شیوه بعد از وقوع[2] را پی می‌گیریم که منجر به نتیجه‌گیری پس‌آیند می‌شود که مثلاً X_4 بیشترین تأثیر را دارد، X_2 دارای تأثیر منفی است و غیره.

در این جا لازم به یادآوری است که واژه از قبل (یا پس از وقوع) در بیان *کانتین* به کار نرفته بلکه *با سبین* آن را به کار برده است که بدین معنا ست که فرضیات از قبل (یا بعد) از شناخت پیدا کردن درباره نتایجی که عملاً به دست آمده تدوین شده‌اند. دی فاینتی (۱۹۶۴) پیشنهاد مفیدتر بودن استفاده از واژه‌های ابتدایی و انتهایی را داد. ولی واژههای *از قبل* و *بعد از وقوع* چنان مصطلح شده‌اند که نمی‌توان از آن‌ها سرپیچی کرد.

مرحله ۲: وارسی فراهم بودن شرایط لازم برای تحلیل مسیر

تمام متغیرها در سطح سنجش **کمی** (فاصله‌ای یا نسبی) اندازه‌گیری شده‌اند. طرح (مدل) فرض شده، **بازگشتی** است یعنی بازخوردهای مستقیم یا غیرمستقیمی وجود ندارد. تعیین **حالت تطابق**[3] یک مدل، همیشه ساده نیست. زیرا، حتی ممکن است در صورت تطابق دقیق از لحاظ نظری، بعداً احساس شود که مدلی به لحاظ تجربی توان تطبیق ندارد. یک مدل، زمانی به عنوان مطابقت کننده در نظر گرفته می‌شود که به میزان پارامترهای آن بین متغیرهای مشاهده شده همبستگی وجود داشته باشد $\left[(\frac{۵}{۲})=۱۰\right]$. تعداد پارامترها معادل تعداد مسیرها ست، همبستگی‌های بین متغیرهای برون‌زا را در برمی‌گیرد، ولی مسیرهای باقی مانده‌ها به متغیرهای درون‌زاد را شامل نمی‌شود. در مثال ما، مدل بیش تطابقی است، زیرا تعداد داده‌های اطلاعاتی (۱۰) از پارامترهای فرض شده (۸) بیشتر است. مدل فقط شامل متغیرهای **مستقیماً مشاهده شده** است. روابط بین این متغیرها خطی و جمع‌پذیر به حساب می‌آید.آگاه هستیم آزمون‌هایی وجود دارند که با به کارگیری داده‌ها، متعاقباً بطلان فرض‌های خطی‌بودن و جمع‌پذیری را مورد وارسی قرار می دهند. آزمون‌های مزبور در کتاب آپ و اسمیت آمده است (۱۹۷۶، ص ۱۹۴ و ۲۲۱). همچنین فرض بر این است چند همخطی بودن زیاد وجود ندارد، این مخصوصاً یکی از مشکلات مدل‌های دارای چندین متغیر برون‌زاد است، اما در مدل ما که تنها یک متغیر برون‌زاد وجود دارد نیز هر معادله بایستی به طور جداگانه بررسی شود که همبستگی‌های درونی متغیرهای مستقل چندان زیاد نباشد.

اگر همه این شرایط برآورده شود آنگاه می‌توان تحلیل مسیر را اجرا نمود. همچنین قابل ذکر است که مدل علّی ایستا می‌باشد. پویایی‌های گذرا یک ضرورت حتمی برای اعمال این شیوه نیست، زیرا مدل‌های ایستا ممکن است روندی از پویایی‌های علّی را بازنمایی کنند. گاهی مدل‌های پویا به خاطر سبب‌سازی خودکار، مشکلات تفسیری زیادی را باعث می‌شوند. همچنین ضرورت دارد متغیرهای **باقی مانده** و **مستقیماً از پیش تعیین شده، ناهمبسته** باشند. این مطلب را در مرحله ۶ توضیح خواهیم داد.

مرحله ۳: استاندارد کردن متغیرها

در استاندارد کردن هر متغیر، یعنی تفاضل [1] میانگین و تقسیم آن بر انحراف معیار، نمرات Z به دست می آیند $[Z=(X-\mu)/\delta]$. با این کار ضرایب رگر سیون (b) به ضرایب مسیر (P) تبدیل می شوند که البته از طریق ضرب ضرایب رگر سیون در انحراف معیار متغیر مستقل و تقسیم آن بر انحراف معیار متغیر وابسته هم قابل محاسبه است. در اشتقاق زیر نسبت به این مکانیسم شناخت بیشتری حاصل می کنیم:

$$\begin{bmatrix} Y = b_{y۱}X_۱ + b_{y۲}X_۲ + b_{y۳}X_۳ + b_{y۴}X_۴ & \text{یک ثابت} \\ X_۳ = b_{۳۱}X_۱ + b_{۳۴}X_۴ + b_{۳a}X_a + & \text{یک ثابت} \\ X_۱ = b_{۱۲}X_۲ + b_{۱۴}X_۴ + b_{/v}X_v + & \text{یک ثابت} \\ X_۲ = b_{۲۴}X_۴ + b_{۲w}X_w + & \text{یک ثابت} \end{bmatrix}$$

ما هم اکنون برای هر یک از معادلات این دستگاه سه کار انجام می دهیم؛ اولاً، هر متغیر را به صورت انحراف از میانگین آن تعریف می‌کنیم؛ به طوریکه جمله‌های ثابت حذف می‌گردند. ثانیاً، متغیر وابسته سمت چپ علامت تساوی، بر انحراف معیار خود تقسیم می‌گردد. برای این که تساوی به هم نخورد، بایستی بعداً تمام جملات سمت راست علامت مساوی را بر انحراف معیار متغیر وابسته هم تقسیم کرد.

سوم این که هر متغیر وابسته $X_i-\bar{X}_i$ را بر انحراف معیار آن S_i تقسیم نموده، بی درنگ به S_i ضرب می‌کنیم تا در حاصل جمله تغییری به وجود نیاید. از این طریق دستگاه قبلی به شکل زیر بازنویسی می‌شود.

$$\frac{Y-\bar{Y}}{S_y} = b_{y۱}\frac{S_۱}{S_y}\frac{X_۱-\bar{X}_۱}{S_۱} + b_{y۲}\frac{S_۲}{S_y}\frac{X_۲-\bar{X}_۲}{S_۲} + b_{y۳}\frac{S_۳}{S_y}\frac{X_۳-\bar{X}_۳}{S_۳} + b_{yt}\frac{S_۱}{S_y}\frac{X_t-\bar{X}_t}{S_t}$$

$$\frac{X_۳-\bar{X}_۳}{S_۳} = b_{۳۱}\frac{S_۱}{S_۳}\frac{X_۱-\bar{X}_۱}{S_۱} + b_{۳۴}\frac{S_۴}{S_۳}\frac{X_۴-\bar{X}_۴}{S_۴} + b_{۳u}\frac{S_u}{S_۳}\frac{X_u-\bar{X}_u}{S_u}$$

$$\frac{X_۱-\bar{X}_۱}{S_۱} = b_{۱۲}\frac{S_۲}{S_۱}\frac{X_۲-\bar{X}_۲}{S_۲} + b_{۱۴}\frac{S_۴}{S_۱}\frac{X_۴-\bar{X}_۴}{S_۴} + b_{۱v}\frac{S_v}{S_۱}\frac{X_v-\bar{X}_v}{S_v}$$

$$\frac{X_۲-\bar{X}_۲}{S_۲} = b_{۲۴}\frac{S_۴}{S_۲}\frac{X_۴-\bar{X}_۴}{S_۴} + b_{۲w}\frac{S_w}{S_۲}\frac{X_w-\bar{X}_w}{S_w}$$

1-Subtraeting

عبارات $(X_i - \overline{X}_i)/S_i$، نمرات Z فرم Z_i هســتند و عبارات $b_{yi}(s_i / s_y)$ ضــرایب مســیر فرم P_{yi} هستند. بدین ترتیب این دستگاه را به شکل زیر هم می توان نوشت.

$$\begin{cases} Z_y = P_{y1}Z_1 + P_{y2}Z_2 + P_{y3}Z_3 + P_{y1}Z_1 \\ Z_3 = P_{31}Z_1 + P_{34}Z_4 + P_{3u}Z_u \\ Z_1 = P_{12}Z_2 + P_{14}Z_4 + P_{1v}Z_v \\ Z_2 = P_{24}Z_4 + P_{2w}Z_w \end{cases}$$

مرحله ۴: ضرب معادلات در هر یک از متغیرهای از پیش تعیین شده مستقیم

نتیجه این عمل یک دستگاه برای هر یک از چهار معادله است.

$$\begin{bmatrix} Z_yZ_1 = P_{y1}Z_1Z_1 + P_{y2}Z_2Z_1 + P_{y3}Z_3Z_1 + P_{yt}Z_tZ_1 \\ Z_yZ_2 = P_{y1}Z_1Z_2 + P_{y2}Z_2Z_2 + P_{y3}Z_3Z_2 + P_{y1}Z_1Z_2 \\ Z_yZ_2 = p_{py1}Z_1Z_3P_{y2}Z_2Z_3 + P_{y3}Z_3Z_3 + P_{y1}Z_1Z_3 \end{bmatrix}$$ دستگاه اول

$$\begin{bmatrix} Z_3Z_1 = P_{31}Z_1Z_1 + P_{34}Z_4Z_1 + P_{3u}Z_uZ_1 \\ Z_3Z_4 = P_{31}Z_1Z_4 + P_{34}Z_4Z_4 + P_{3u}Z_uZ_4 \end{bmatrix}$$ دستگاه دوم

$$\begin{bmatrix} Z_1Z_2 = P_{12}Z_2Z_2 + P_{14}Z_4Z_2 + P_{1v}Z_vZ_2 \\ Z_1Z_4 = P_{12}Z_2Z_4 + P_{14}Z_4Z_4 + P_{1v}Z_vZ_4 \end{bmatrix}$$ دستگاه سوم

$$\begin{bmatrix} Z_2Z_4 = P_{24}Z_4Z_4 + P_{2w}Z_wZ_4 \end{bmatrix}$$ دستگاه چهارم (فقط یک معادله)

مرحله ۵: محاســبه میانگین‌ها (جمع‌کردن و تقســیم کردن بر تعداد n) و صــورت دادن معادلات r (r به عنوان تابعی از P).

در هر یک از معادلات این دســتگاه‌ها، مجموع مقادیر را برای تمام موارد n به دســت آورده و بر n تقســیم می‌کنیم. بدین ترتیب تعدادی عبارت به دســت می‌آید که در آن‌ها هر جمله $(\Sigma ZiZj)/n$ برابر با ضــریب همبســتگی rij می‌باشــد. این عملیات را در این جا فقط برای دســتگاه اول اثبات می‌کنیم:

دستگاه اول

$$\begin{bmatrix} \frac{\Sigma Z_y Z_۱}{n} = P_{y۱}\frac{\Sigma Z_۱ Z_۱}{n} + P_{y۲}\frac{\Sigma Z_۲ Z_۱}{n} + P_{y۳}\frac{\Sigma Z_۳ Z_۱}{n} + P_{y۱}\frac{\Sigma Z_۱ Z_۱}{n} \\ \frac{\Sigma Z_y Z_۲}{n} = P_{y۱}\frac{\Sigma Z_۱ Z_۲}{n} + P_{y۲}\frac{\Sigma Z_۲ Z_۲}{n} + P_{y۳}\frac{\Sigma Z_۳ Z_۲}{n} + P_{y۱}\frac{\Sigma Z_۱ Z_۲}{n} \\ \frac{\Sigma Z_y Z_۳}{n} = P_{y۱}\frac{\Sigma Z_۱ Z_۳}{n} + P_{y۲}\frac{\Sigma Z_۲ Z_۳}{n} + P_{y۳}\frac{\Sigma Z_۳ Z_۳}{n} + P_{y۱}\frac{\Sigma Z_۱ Z_۳}{n} \end{bmatrix}$$

دستگاه اول

$$\begin{bmatrix} r_{y۱} = P_{y۱} + P_{y۲} r_{۲۱} + P_{y۳} r_{۳۱} + P_{yt} r_{t۱} \\ r_{y۲} = P_{y۱} r_{۱۲} + P_{y۲} + P_{y۳} r_{۳۲} + P_{yt} r_{۱۲} \\ r_{y۳} = P_{y۱} r_{۱۳} + P_{y۲} r_{۲۳} + P_{y۳} + P_{y۱} r_{۱۳} \end{bmatrix}$$

این یک دستگاه معادلات r (r تابعی از p) می‌باشد که از معادله ساختاری اوّل مشتق شده است. یک چنین دستگاه معادلات r را برای هر یک از چهار معادله ساختاری می‌توان تشکیل داد. در نتیجه به تعداد متغیرهای درون‌زاد دستگاه معادلات r وجود دارد . این دستگاه‌ها را از قضایای زیر بنایی تحلیل مسیر هم می‌توان به دست آورد، یعنی $r_{ij} = \Sigma_q p_{iq} r_{qj}$ که در آن اندیس‌های i و j نشانگر دو متغیر هستند و شاخص q نشان‌دهنده متغیری است که از آن مسیرهای مستقیم به X_i امتداد می‌یابند. این معادلات قابل شرح و تفصیل هستند در صورتی‌که rqJ به طور مشابهی بسط یابد.

برای مدل‌های بازگشتی این قضیه به سادگی به قاعده ی ردیابی[۱] زیر خلاصه می‌شود: همبستگی بین X_i و X_j برابر است با مجموعه مفروضات ضرایب مسیر تمام ردیابی‌های ممکن از X_j تا X_i. مجموعه ردیابی‌ها تمام مسیرهای ممکن از X_j تا X_i را شامل می شود، با این فرض که: (الف) متغیرهای یکسان دو مرتبه وارد نمی‌شوند، و (ب) یک متغیر، همزمان از یک پیکان داخل و خارج نمی‌شود، یعنی طرح $\rightarrow X_q \leftarrow$ وجود ندارد.

این تجزیه همبستگی به حاصل ضرب ضرایب مسیر در مرحله ۱۰ مجدداً مورد بحث قرار خواهد گرفت. در آنجا توجه خاصی صرف این واقعیت خواهیم کرد که ما صرفاً حاصل‌ضرب ضرایب مسیر را در مثال خود به دست نمی‌آوریم، بلکه افزودن بر آن حاصل ضرب مسیر و ضرایب همبستگی را هم محاسبه می‌کنیم (ضرایب همبستگی آخر مجدداً تجزیه خواهند شد).

به منظور کامل کردن بحث، دستگاه های معادلات r دوّم، سوم و چهارم را هم در زیر یادآور می‌شویم.

1. tracing rule
2. underidentified

دستگاه دوم
$$\begin{bmatrix} r_{31} = P_{31} + P_{34}r_{41} + P_{3u}r_{u1} \\ r_{34} = P_{31}r_{14} + P_{34} + P_{3u}r_{u4} \end{bmatrix}$$

دستگاه سوم
$$\begin{bmatrix} r_{12} = P_{12} + P_{14}r_{42} + P_{1v}r_{v2} \\ r_{14} = P_{12}r_{24} + P_{14} + P_{1v}r_{v4} \end{bmatrix}$$

دستگاه چهارم
$$\left[r_{24} = P_{24} + P_{2w}r_{w4} \right.$$

مرحله ۶: فرض همبستگی صفر بین متغیرهای باقی مانده و متغیرهای مستقیماً تعیین‌کننده

اجازه دهید دستگاه اول را به‌عنوان نمونه در نظر بگیریم. سه معادله با چهار پارامتر وجود دارد، طوری‌که دستگاه غیر شناسا[2] است.

با فرض اینکه $r_{t1} = h_2 = r_{t3} = 0$ ، دستگاه کاملاً شناسا می‌شود:

دستگاه اول
$$\begin{bmatrix} r_{y1} = P_{y1} + P_{y2}r_{21} + P_{y3}r_{31} \\ r_{y2} = P_{y1}r_{12} + P_{y2} + P_{y3}r_{32} \\ r_{y3} = P_{y1}r_{13} + P_{y2}r_{23} + P_{y3} \end{bmatrix}$$

برای دستگاه‌های دیگر همه جملات سمت راست را به طور مشابهی می‌توان حذف نمود.

در هر صورت چنان چه این نیاز به صفر بودن همبستگی بین عامل‌های مستقیم علّی و باقیمانده در عمل برآورده نگردد، آنگاه برآوردهای ضرایب مسیر، دچار سوگیری خواهند بود.

مثلاً اگر $r_{t1} \neq 0$ باشد، آنگاه ضریب مسیر Py1 معادله اول برابر با $r_{y1} - P_{yr}r_{21} - p_{y3}r_{31}$ نخواهد بود، بلکه مساوی $r_{y1} - p_{y2}r_{21} - p_{y3}r_{31} - p_{yt}r_{t1}$ می شود. همچنین نیازی به بیان این که اگر r_{t1} اساسی باشد، سوگیری جدی است وجود ندارد. در این جا باید متذکر شویم که تعیین حالت تشخیص در دستگاه نخست معادلات r مشتمل بر برهان مشابه آنچه برای دو دستگاه آخر انجام شد نمی‌گردد. در مراحل ۷ الی ۱۱ به این مطلب برمی‌گردیم

مرحله ۷: محاسبه ضرایب مسیر از طریق حل دستگاه معادلات r

اجازه دهید از دستگاه چهارم شروع کنیم که یک نمونه جالب و ساده است. تنها یک معادله r وجود دارد و با فرض گرفتن $r_{w4} = 0$ به $r_{24} = P_{24}$ ساده می‌شود. در نتیجه آن، ضریب مسیر P_{24} برابر ضریب همبستگی r_{24} یعنی ۰/۵۸۲- می‌باشد.

در دستگاه سوم دو معادله r است که ضرایب همبستگی که مقدار آن‌ها را می‌دانیم در این معادلات بکار می‌روند:

$$\begin{cases} 0.612 = P_{12} + P_{14}(-0.582) \\ -0.731 = P_{12}(-0.582) + P_{14} \end{cases}$$

با حل این دستگاه خواهیم داشت: $P_{14} = -0.567$ و $P_{12} = 0.282$.

البته برای دو دستگاه نخست مشکلاتی وجود دارد. زیرا در مرحله ۴ ما هر متغیر مستقیماً تعیین‌کننده را ضرب کرده‌ایم، یعنی آن هایی که در سمت راست معادله ی ساختاری بودند. در عین حال در متغیرهای تعیین‌کننده غیرمستقیم هم می توان ضرب کرد، در آن هایی که در طرح علّی در سمت چپ قرار دارند و در معادله ساختاری ظاهر نمی‌شوند. در دستگاه سوّم چنین متغیرهایی وجود نداشت. امّا در دستگاه دوم که، X_3 در X_1، X_4 و X_2 ضرب شده، چنین متغیر اضافی ای وجود دارد.

حال فرض کنید X_2 را هم ضرب کنیم آنگاه (با فرض مرحله ۶) یک دستگاه بیش شناسا[1](فراتشخیصی) از سه معادله r با دو مجهول خواهیم داشت. معادله اضافی r عبارت است از :

$r_{۳۲} = P_{۳۱}r_{۱۲} + P_{۳۴}r_{۴۲}$ برای دستگاه نخست که y در X_1، X_2 و X_3 ضرب شده، X_4 یک متغیر اضافی است. معادله r اضافی عبارت است از:

$$r_{y۴} = P_{y۱}r_{۱۴} + P_{y۲}r_{۲۴} + P_{y۳}r_{۳۴}$$

در حال حاضر این معادلات اضافی r را به کار نمی گیریم، امّا در مرحله ۱۱ نشان خواهیم داد که آن‌ها بکار برده می شوند تا مدل مورد نظر از جنبه هایی آزمایش شود. به منظور برآورد ضرایب مسیر، فقط شیوه ای را مشابه دستگاه سوّم دنبال می کنیم. از این گذشته، نشان خواهیم داد که در واقع درست ترین شیوه هم همین است.

بعد از جایگزینی ضرایب همبستگی معلوم، دستگاه دوم این گونه می‌شود:

$$\begin{cases} -۰/۶۲۳ = P_{۳۱} + P_{۳۴}(-۰/۷۳۱) \\ ۰/۷۶۲ = P_{۳۱}(-۰/۷۳۱) + P_{۳۴} \end{cases}$$

با حل این دستگاه، خواهیم داشت $P_{۳۱} = ۰/۱۴۱$ و $P_{۳۴} = ۰/۶۵۸$.

با جایگزینی ضرایب همبستگی در دستگاه نخست، نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} ۰/۲۵۱ = P_{y۱} + P_{y۲}(۰/۶۱۲) + P_{y۳}(-۰/۶۲۳) \\ ۰/۷۷۷ = P_{y۱}(۰/۶۱۲) + P_{y۲} + P_{y۳}(-۰/۷۰۴) \\ -۰/۸۰۲ = P_{y۱}(-۰/۶۲۳) + P_{y۲}(-۰/۷۰۴) + P_{y۳} \end{cases}$$

1. overidentified

حاصل حل این دستگاه می‌شود: $P_{y3} = -0/727, P_{y2} = 0/621, P_{y1} = -0/582$

قابل ذکر است که ضرایب مسیر می‌تواند تفسیر جالبی را به دست دهد، یکی از این نوع تفسیرها در مورد مجذور ضرایب است که رایت[1] (۱۹۳۴، ص ۱۶۴) آن را بیان کرده. به گفته وی مجذور یک ضریب مسیر، معادل بخشی از واریانس متغیر وابسته است که مستقیماً به حساب آن متغیر مستقل می‌آید و گویای آن است که همبستگی به شرح زیر ساخته می شود. P_{y1} را در نظر بگیرید. طبق نظر رایت مجذور این ضریب عبارت است از:

$$P_{y1}^{2} = \frac{S_{y.23t}^{2}}{S_{y}^{2}} \times \frac{S_{1}^{2}}{S_{1.23t}^{2}}$$

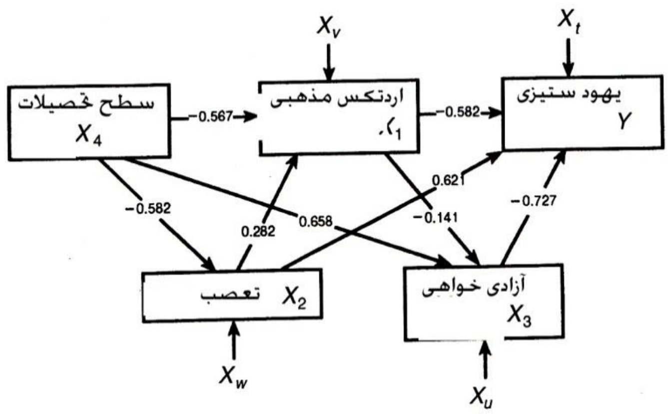
در این فرمول $S_{y.23t}^{2} / S_{y}^{2}$ معرف بخشی از واریانس Y است که پس از ثابت نگه داشتن X_2، X_3 و X_t باقی می‌ماند که ناشی از X_1 است. به هرحال اگر X_2 و X_3 ثابت نگه‌داشته شوند، در نتیجه ممکن است واریانس X_1 در اثر رابطه X_1 با X_2 و X_3 کاهش پیدا کند. بخش اضافی $S_{1}^{2} / S_{1.23t}^{2}$ یک ارتباط (همبستگی) برای این کاهش است. اگر r_{12} و r_{13} صفر باشند، این بخش نیز معادل صفر است. اگر r_{12} و r_{13} برابر صفر نباشد، آنگاه $S_{1}^{2} / S_{1.23t}^{2}$ یک عامل همبستگی است که واریانس X_1 ناشی از ثابت نگه داشتن X_2 و X_3 را اعاده می‌کند. در نتیجه مجذور ضریب مسیر P_{y1}^{2} مبین بخشی از واریانس Y است که به حساب X_1 گذاشته می شود، مشروط به این که منابع دیگر واریانس Y ثابت نگه‌داشته شوند و همچنین کل واریانس X_1 را قبضه کند.

مرحله ۸: بازبینی اینکه آیا نتایج مرحله ۷ پیشبینی‌های اولیه را منتفی می‌سازد

اینک باید بررسی کنیم که آیا علائم ضرایب مسیر با علائمی که از قبل در مرحله ۱ فرض شده تطبیق می‌کند یا نه. همان‌طور که از شکل ۱۱-۶ بر می آید جز یک علامت، باقی غلط درنیامده‌اند. فقط در مورد تأثیر مذهب بر یهودستیزی اشتباه کرده‌ایم. این تأثیر پس از کنترل تعصب و نگرش آزادی خواهانه منفی می‌باشد.

چنان چه ما از قبل یک ترتیب یا فواصل یا مقادیر دقیقی را فرض نموده باشیم، می‌بایستی این‌ها را هم وارسی کنیم. این که انحراف بایستی تا چه حد باشد، هیچ جا به خوبی بحث نشده است. با این حال این مسأله دو بعدی است.، علاوه بر بعد فرضی- قیاسی (مقایسه فرضیات از قبل طرح شده و نتایج تجربی) یک بعد استنتاجی نیز دارد (تعمیم از نمونه به جمعیت). بدین لحاظ اگر داده‌ها مجموعه‌ای از n= ۱۰ واحد تحلیل باشد، شامل یک نمونه ساده تصادفی برگرفته شده از یک جمعیت بزرگتر، آنگاه ضرایب مسیر به دست آمده لزوماً باز نمایی مطمئنی از ضرایب مربوط به جمعیت نیستند. فرض کنید فاصله اطمینان ۹۵٪ برای ضریب $p_{31}=-0/14$ بین

---
1. Wright



شکل ۱۱-۶ طرح علّی شامل اندازه‌ها

حدود ۰/۳۴- و ۰/۶۰+ واقع شده باشد، در این صورت امکان ضریب ۰ یا حتی یک ضریب مثبت برای جمعیت وجود دارد، به عبارت دیگر ۰/۱۴- معنادار نخواهد بود و ممکن اســـت علامت آن از پایایی برخوردار نبا شد. در ادبیات روش شنا سی این بعد ا ستنتاجی تحت عنوان "معناداری ضریب مسیر"مطرح است. چون کمترین شرط تعمیم نتایج نمونه به جمعیت معناداری آماری می‌باشد، یک بخش اساسی این مرحله منتفی‌سازی را تشکیل می‌دهد.

مرحله ۹: محاسبه واریانس تبیین کننده و ضریب مسیر باقی مانده

دستگاه اولیه ما، شامل یک معادله ساختاری برای هر متغیر درون‌زاد (=وابسته) بود. از طریق ضریب این معادلات ساختاری به شیوه مشابه مراحل ۴ و ۵ که این بار در متغیر وابسته و باقی مانده ضرب می‌شود، به محاسبه ضریب مسیر باقیمانده و ضریب همبستگی چندگانه می‌پردازیم.

اولین معادله ساختاری عبارت بود از:

$$Z_y = P_{y۱}Z_۱ + P_{y۲}Z_۲ + P_{y۳}Z_۳ + P_{yt}Z_t$$

این معادله در Z_y و Z_t ضرب شده و دو معادله زیر به دست می آید:

$$r_{yy} = ۱ = P_{y۱}r_{۱y} + P_{y۲}r_{۲y} + P_{y۳}r_{۳y} + P_{yt}r_{yt}$$
$$r_{yt} = P_{v۱}r_{۱t} + P_{v۲}r_{۲t} + P_{v۳}r_{۳t} + P_{vt}r_{tt} =$$
P_{yt} (برای $r_{it}=r_{2t}=r_{3t}=0$ براساس مرحله ۶)

طبق قسمت دوم این دو معادله، r_{yt} و P_{yt} می‌توانند مساوی با شند. با این کار، ضریب مسیر باقی مانده P_{yt}، از معادله اول قابل محاسبه است.

$$۱ = P_{y۱}r_{۱y} + P_{y۲}r_{۲y} + P_{y۳}r_{۳y} + P_{yt}^{۲}$$
$$P_{yt} = \left[۱-(P_{y۱}r_{۱y} + P_{y۳}r_{۳y})\right]^{۱/۲}$$
$$= \{1-[(-0.582)(0.25_t) + (0.621)(0.777) +$$
$$(-0.727)(-0.802)]\}^{1/2} = 0.284$$

و از آنجا که $P_{y۱}r_{۱y} + P_{y۲}r_{۲y} + P_{y۳}r_{۳y} = R^{۲}_{y.۱۲۳}$ است، همچنین معلوم می‌شود که:

$P_{yt} = (۱-R^{۲}_{y.۱۲۳})^{۱/۲}$، که در آن $R^2_{y.123} = ۰/۹۱۹$.

به سراغ سه معادله ساختاری دیگر می رویم و ضرایب باقی مانده مسیر را به همین صورت به دست می‌آوریم:

$$R^{۲}_{۳.۱۴} = P_{۳۱}r_{۱۳} + P_{۳۴}r_{۴۳} \text{ که } P_{۳u} = (۱-R^{۲}_{۳.۱۴})^{۱/۲}$$
$$R^{۲}_{۱.۲۴} = P_{۱.۲۴} + P_{۱۴}r_{۴۱} \quad \text{که} \quad P_{۱V} = (۱-R^{۲}_{۱.۲۴})^{۱/۲}$$
$$\text{(تحلیل دو متغیره !)} \quad r_{۲۴} = P_{۲۴} \quad \text{که} \quad P_{۲w} = (۱-r^{۲}_{۲۴})^{۱/۲}$$

با توجه به اینکه مجذور ضـــریب همبســـتگی چند متغیره، مثل $R^{۲}_{y.۱۲۳}$، به عنوان بخشـــی از واریانس متغیر وابسته y تفسیر می شود که توسط X_1، X_2 وX_3 با هم تبیین می‌گردد، P_{yt} بیانگر بخشی از واریانس است که تبیین نشده است. معمولاً دو منبع واریانس تبیین نشده تشخیص داده می‌شـود : (۱) عامل‌های تصـادفی (۲) عاملهای علّی، که در مدل علّی در نظرگرفته نشـده‌اند و از این جنبه که آیا صـرفاً سـبب پراکندگی تصـادفی می‌شـوند مد نظر قرار می‌گیرند. البته لازم اسـت که واریانس تبیین شده (چه در مورد نمونه و چه در مورد جمعیت) به اندازه کافی بزرگ باشد.

دانکن (۱۹۷۵، ص ۶۳) هشـدار می‌دهد که فایده ضـریب همبسـتگی چندگانه در مدل علّی در مقایسه با مدل پیش بینی کننده، کمتر است. زیرا، می‌دانیم که R^2 قابل تقسیم به سهم پیش بینین هر یک از پیش بینی‌کننده‌ها است به نحوی که بخش‌های واریانس تبیین شده جمع می شوند. با هر بار کنترل متغیرهای قبلی و در آن هر ضریب تفکیکی جدید بر روی بخشی از واریانس که قبل از این توضیح داده نشده، اعمال می‌گردد:

$$R^{۲}_{y.۱۲۳} = r^{۲}_{y۱} + r^{۲}_{y۲.۱}(۱-r^{۲}_{y۱}) + r^{۲}_{y۳.۱۲}(۱-R^{۲}_{y.۱۲})$$

این‌گونه بخش کردن $R^{۲}_{y.۱۲۳}$ امکان بازبینی ظرفیت‌های پیش‌بینی هر یک از متغیرهای X_1، X_2 و X_3 را درباره y فراهم می‌ســازد. امّا طبق نظر دانکن، این با تجزیه اجزاء علّی خیلی فرق دارد. زیرا، اثرات علّی X_1 و X_2 به میزان زیادی غیر مستقیم اعمال می شوند. بنابراین ساختار علّی را $R^{۲}$ پوشـش نمی‌دهد. از این گذشـته R۲ نه تنها تابعی از ضـرایب میسـر اسـت، بلکه تابع واریانس‌ها و کواریانس های متغیرهای در بر گرفته نیز می باشـد، بطوری که مقادیر متفاوت $R^{۲}$ برای مدل علّی

مشابه با ضرایب مسیر یکسان در جمعیت‌های مختلف به دست خواهد داد که واریانس‌های متغیرهای برون زاد آن‌ها فرق دارد. علاوه بر این، مقدار $R^۲$، وابسته به تعداد متغیرهای مستقلی است که در مدل رگرسیون چندگانه وارد شده اند، مثلاً در مقاله‌ای از گردون (۱۹۶۸) نشان داده شده که از این لحاظ $R^۲$ تا چه حد می‌تواند اشتباه برانگیز باشد. او مدلی را با پنج متغیر مستقل در نظر می‌گیرد که تمام متغیرها همبستگی یکسانی (۰/۶۰) با متغیر وابسته دارند و به طور دو جانبه همبسته هستند، طوری که دو زیر گروه متشکل از سه و دو متغیر مستقل به ترتیب همبستگی درون گروهی ۰/۸۰و بین گروهی ۰/۲۰ باشد. اگر به چنین مدلی یک متغیر اضافه کنیم که همین همبستگی قوی (۰/۶۰) را با متغیر وابسته نشان دهد و همبستگی ضعیفی (۰/۲۰) با هر یک از متغیرهای مستقل داشته باشد، آنگاه $R^۲$ از ۰/۶۴۴ به ۰/۸۲۱ افزایش می‌یابد. همچنین معلوم می‌شود که بالاترین ضریب رگرسیون برای کوچکترین گروه فرعی متغیرهای مستقل به دست می آید. بدین ترتیب، چنانچه اتفاقاً یک متغیر مستقل در دسترس باشد و در زمره روابط علت و معلولی قرار نگرفته باشد، می‌تواند تأثیر بزرگی بر جای گذاشته و $R^۲$ را به طور قابل ملاحظه ای افزایش دهد.

از دید ما، مباحث وانکن و گردون که در بالا ذکر شد، از بعضی جنبه ها بایستی اصلاح شوند. افزودن متغیرهای مستقل به یک مدل، انتظار معناداری بیشتری از $R^۲$ را به دنبال دارد. بنابراین مادامی که موضوع آمار استنباطی مد نظر باشد مجادلات دانکن و گردون را نمی‌توان قبول کرد.

همچنین ما نمی‌توانیم از روی نسبت $R^۲$ نتیجه‌گیری کنیم که با یک مقدار کم $R^۲$ رضایت حاصل کنیم. در قسمت پیشین ما نقش حامی فریبکارانه را از مباحث دانکن بر علّیه $R^۲$ (دانکن ۱۹۷۵) بازی کردیم، زیرا همین مؤلف (بلو و دانکن ۱۹۶۷) سعی کرد طبقات شغلی را تشریح کند، و واریانس تبیین کننده در مدل علّی او تنها ۰/۴۳ بود. ولفل و هابر (۱۹۷۱) در این زمینه مقاله جسورانه‌ای نوشتند. پس از برخوردهای انتقادی بر سر یک‌سری مطالعات تحقیقی از سوی جامعه‌شناسان آمریکایی، آن‌ها گزارش کردند به نظر می‌رسد که رکورد جهانی $R^۲$ در بین جامعه‌شناسان حدود ۰/۶۰ باشد.

کاربرد $R^۲$ یک بعد روان شناسی هم دارد. برای پشت سر گذاشتن انتقادهایی که به یک مدل می شود تمایل به استفاده از $R^۲$ =۰/۴۳ بیشتر از R=۰/۶۶ است، زیرا دومی ریشه دوّم عددی بین ۰و۱ است و به این خاطر همیشه بالاتر است. از سوی دیگر در ارائه کار تحقیقی، مقاومت در برابر وسوسه گزارش کردن R=۰/۶۶ به جای $R^۲$ =۰/۴۳ مشکل است. همین مطلب در مورد نسبت واریانس تبیین نشده ۱- $R^۲$ =۰/۵۷ در مقایسه با ریشه دوّم آن $(1-R^2)^{1/2}$ = ۰/۷۵ نیز صادق است. مورد دوم یعنی ضریب مسیر باقی مانده بیشتر از مجذور آن، یعنی نسبت واریانس تبیین نشده به عنوان یک معیار ابطال مدل مورد توجه قرارمی‌گیرد. برای ما روشن است که مجذور $R^۲$ و $۱-R^۲$ بسیار مناسب هستند، زیرا از تفسیر روشنی برخوردارند (البته در حالت پیش‌بینی‌کنندگی). این

موضوع ناشی از این حقیقت است که تقسیم شدن به بخش تبیین شده و غیر تبیین‌شده تنها برای ریشه‌ها مقدور است .

مرحله ۱۰ : تجزیه اثرات علّی به بخش‌های مستقیم، غیر مستقیم و جعلی

معادلات r که از قضیه اساسی تحلیل مسیر در مراحل ۴ و ۵ استخراج و در مرحله ۶ ساده‌تر شدند را باز هم می‌شود بیشتر ساخته و پرداخته کرد. این کار با جایگزین کردن هرچه بیشتر ضرایب همبستگی در سمت راست علامت تساوی انجام می شود، به طوری که آنچه در انتها باقی می‌ماند تقریباً منحصر به ضرایب مسیر می‌باشد. برای مثال، در مورد معادله r_{y1} این عمل به نتایج زیر منجر می‌گردد:

$$r_{y1} = P_{y1} + P_{y2}r_{21} + P_{y3}r_{31}$$

با

$$r_{21} = P_{12} + P_{14}r_{42}$$
$$r_{31} = P_{31} + P_{34}r_{41}$$

بدین ترتیب

$$r_{y1} = P_{y1} + P_{y2}(P_{12}tP_{14}r_{42}) + P_{y3}(P_{31} + P_{34}r_{41})$$
$$r_{y1} = P_{y1} + P_{y2}P_{12} + P_{y2}P_{14}r_{42} + P_{y3}P_{31} + P_{y3}P_{34}r_{41}$$

با

$r_{42} = P_{24}$ و $r_{41} = P_{14} + P_{12}r_{24} = P_{14} + P_{12}P_{24}$

و در نهایت خواهیم داشت :

$$r_{y1} = P_{y1} + P_{y2}P_{12} + P_{y2}P_{14}P_{24} + P_{y3}P_{31} + P_{y3}P_{34}P_{14} + P_{y3}P_{34}P_{12}P_{24}$$

در این جا

$P_{y1} = ۰/۵۸۲$ تأثیر علّی مستقیم X_1 بر Y است،

$P_{y3}P_{31} = (-۰/۷۲۷)(-۰/۱۴۱)$ تأثیر علّی غیرمستقیم به واسطه X_3،

$P_{y2}P_{12} = (۰/۶۲۱)(۰/۲۸۲)$ تأثیر جعلی ناشی از X_2،

$P_{y2}P_{14}P_{24}$, $P_{y3}P_{34}P_{14}$ و $P_{y3}P_{34}P_{12}P_{24}$ ترکیبات پیچیده‌تری از اثرات علّی غیرمستقیم و جعلی هستند.

نظیر این کار را در مورد سایر معادلات r هم می‌توانیم انجام دهیم. بنابراین، یک همبستگی کلی (در این‌جا r_{y1}) قابل تجزیه به اقسام گوناگونی از اثرات: مستقل، غیرمستقیم، جعلی و پیچیده است. این‌ها را می‌توان با استفاده از روش ردگیری در طرح فوق خواند . در مثال ما ضریب همبستگی

r_{y1} می‌تواند کلاً به عنوان تابعی از p ها گزارش شـــود. گاهی اوقات وقتی‌که طرح نه تنها پیکان‌های م ستقیم بلکه پیکان‌های دو سویه را هم در بر دا شته با شد، حذف تمام ضرایب همب ستگی می سر نخواهد بود. فرض کنید مثلاً یک پیکان منحنی شکل بین X_2 و X_3 در طرح فوق قرار داشته باشد که نشـان دهنده یک رابطه اسـت، امّا لزوماً این رابطه علّی نیسـت؛ در این صـورت $P_{y۲}P_{y۳}r_{۲۳}$ یک «اثر همبسته غیرمستقیم« خواهد بود.

اثرات م ستقیم و غیرم ستقیم در و ضعیت علت و معلول صورت می‌گیرد، مجموع این ها را اثر کل علّی می‌نامند. اثرات جعلّی (ظاهری) و همبسته غیرمستقیم در اصل علّی نیستند.

باید یادآور شـویم که حضـور همزمان اثرات مسـتقیم، غیرمسـتقیم، جعلی و عوامل همبسـته غیرم ستقیم در یک مدل پیچیده می‌تواند سبب م سائل تف سیری جدی شود. به ویژه در بخش‌های روابط انتقالی[1] (مجازی) مدل این مســأله وجود دارد. یک ســاختار انتقالی بدین شــکل اســت: $C \leftarrow B, B \leftarrow A$ و نیز $C \leftarrow A$. م ثالی از مدل ما این گو نه اســت: $X_۱ \leftarrow X_۲$ و $y \leftarrow X_۱$ و همچنین $y \leftarrow X_۲$، به زبان ساده: تع صب باعث ارتدکس مذهبی می شود، ارتدکس مذهبی سبب یهود ستیزی می شود و علاوه بر این، تع صب موجب یهود ستیزی می شود. این مکانیزم روابط انتقالی گاهی مبهم است. از یک سو بخشی از روابط بین مذهب و یهودستیزی یک اثر علّی مستقیم و بخشی یک رابطه علّی ظاهری نا شی از تع صّب ا ست. از سوی دیگر، مکانیزم م شابهی را می‌توان به رو شی مطالعه کرد که رابطه بین تعصــب و یهودســـتیزی قســـمتی به طور مســـتقیم و قســـمتی به‌طور غیرمســـتقیم از طریق ارتدکس مذهبی تأثیر علّی خود را بروز می‌دهد. در این تفســیر آخر، تأکید بر رابطه بین تعصّب و یهودستیزی است که مورد تأکید قرار گرفته است. اما هدف از این مثال تحقیقاتی به‌هیچ وجه این نبود، زیرا رابطه بین مذهب و یهودستیزی نقطه شروع بود به شکلی که در بخش ۷-۲-۲ آن را رابطه- م شکل[2] خواندیم؛ طبیعتاً، تعبیر نخ ست از سوی محققان برگزیده شده بود. اما در حقیقت هر دو تفسیر درست است و درنتیجه یک مکانیزم رابطه انتقالی همیشه نسبت به تفسیر، غیر اصـــیل خواهد بود. به عبارت دقیق‌تر تنها مکانیزم‌های $X_۱ \rightarrow X_۲ \leftarrow y_۱$ و $X_۲ \rightarrow X_۱ \rightarrow y$ واقعاً ناب هســـتند. در مکانیزم اول پیکان $X_۱ \rightarrow y$ (رابطه غیر واقعی) و در مکانیزم دوم پیکان $X_2 \rightarrow y$ حذف شده ا ست (رابطه غیرم ستقیم). همین حذف پیکان‌ها دلیل بر این ا ست که چرا یک مدل علّی فراتـ شخی صی (بیش شنا سا) می شود. چنان‌که گفته شد، محدودیت‌هایی که از این حالت فراتشخیصی ناشی می‌شود، به عنوان معادلات آزمون در نظر گرفته خواهد شد. این موضوع را در مرحله بعدی مورد بحث قرار خواهیم داد.

1. Transitive

1. Problem- relation

مرحله ۱۱: آزمون ترتیب علت و معلولی

مدل علّی فوق متشــــکل از چهار ســـاختار فرعی، یکی با y، یکی با X_3، یکی با X_1 و یکی با X_2 به عنوان متغیر وابسته تشکیل می‌شود. دو ساختار فرعی آخر کاملاً تشخیصی هستند. معادلات r حاصل شده، راه حل منحصربه فردی را برای P_{12} و P_{14} (ساختار فرعی سوم) و برای P_{24} (ساختار فرعی چهارم) ارائه می‌کنند. در مقابل، دو معادله ســاختاری اول، فراتشـخیصــی هســتند (مراجعه کنید به مرحله ۷). از این رو، معادله ساختاری اول که y متغیر وابسته است؛ قابل ضرب کردن در X_1، X_2 و X_3، و همچنین X_4 می‌باشــد. در نتیجه ما چهار معادله r (برای r_{y1}, r_{y2}, r_{y3} و r_{y4}) به دســت می‌آوریم با سه مجهول (P_{y1}, P_{y2}, p_{y3}). و معادله ساختاری دوم با متغیر وابسته X_3 قابل ضرب در X_1 و X_4 و همچنین X_2 است. این عمل سه معادله r (برای r_{31}, r_{34} و r_{32}) با دو مجهول (P_{31}, P_{34}) به دست می‌دهد. اطلاعات اضافی به دست آمده را به دو طریق می‌توان فهمید، به صورت مسأله برآورد یا آزمون‌پذیری. اولاً ممکن اســت ناراحت کننده به نظر برســد که برای P_{31}, P_{34} در ســاختار دوم راه حل انحصــاری یافت نمی‌شــود (به مرحله ۷ مراجعه شــود). در چنین حالتی درباره برآورد ضرایب مسیر، نگرانی پیش می‌آید. شیوه‌های برآورد متعددی پیشنهاد شده است. عموماً یک میانگین ساده یا وزن داده شده ی راه‌حل‌های مختلف عموماً مردود دانسته شده است. بودون[1] (۱۹۶۷، ص ۱۰۳) پیشــنهاد کرد تمام معادلات r به طور همزمان مدنظر قرار گرفته و برآورکننده‌های P_{31}, P_{34} را با روش کمترین مجذورات به گونه‌ای محاســبه کنند که اختلاف بین مقادیر r مشــاهده شــده و مقادیرr محاسبه شده از طریق معادلات به حداقل خود برسد. امّا این گلدبرگر[2] (۱۹۷۰) بود که نشان داد برآورد کننده‌های کمترین مجذورات حاصل از تحلیل رگرسون ساده به اندازه برآورد کننده‌های بودون عاری از سوگیری و حتی دقیق‌تر هستند، یعنی خطای معیار آن‌ها کمتر است. این پیشنهاد گلدبرگر در واقع همان چیزی اســت که ما در مرحله ۷ انجام داده‌ایم، برای حل دســتگاه معادلات r_{31}و r_{34} همان نتیجه‌ای به دست آمد که از محاسبه ضرایب استاندارد رگرسیون تفکیکی مربوط به معادله رگرســیون X_4 به عنوان تابعی از X_1 و X_4 حاصــل شــد. به طور مشــابهی می‌توان bها را در ساختار فرعی اول مربوط به Y به عنوان تابعی از X_1، X_2 و X_3 محاسبه کرد. اینها سپس بهترین برآورد کننده‌های ضرایب مسیر P_{y1}, P_{y2}, p_{y3} خواهند بود.

اکنون به نقطه نظر دوم می‌رسیم، یعنی به کار بردن اطلاعات اضافی برای بررسی آزمونپذیری. به طور مثال از دســتگاه دوم معادلات شــامل r_{31} و r_{34} راه حل کمترین مجذورات $P_{31} = -۰/۱۴۱$ و $P_{34} = ۰/۶۵۸$ را به دست آوردیم. اگر این مقادیر را در معادله اضافی r_{32} جایگزین کنیم می‌توانیم ارزیابی کنیم که آیا مقدار r_{32} از ضریب همبستگی مشاهده شده نظیر آن اختلاف زیاد دارد یا نه:

1. Boudon
2. Goldberger

اختلاف	مشاهده شده	انتظار مدل
۰/۲۳۵	$r_{32} = -۰/۷۰۴$	$r_{32} = P_{31}r_{12} + P_{34}r_{42}$
		$=(-۰/۱۴۱)(۰/۶۱۲)+(۰/۶۵۸)(-۰/۵۸۲)$
		$= -۰/۴۶۹$

به همین شـیوه سـاختار فرعی اول را می‌توان آزمود . از دسـتگاه معادلات r_{y3}, r_{y2}, r_{y1} راهحل کمترین مجذورات را به د ست می آوریم $P_{y1} = -۰/۵۸۲$ ، $P_{y2} = ۰/٦٢١$ و $P_{y3} = -۰/۷۲۷$. این مقادیر را در معادله r_{64} جایگزین نموده و به ارزیابی این مطلب می‌پردازیم که آیا مقدار r_{y4} مورد انتظار از مدل، با مقدار مشاهده شده آن اختلاف زیادی دارد یا نه:

اختلاف	مشاهده شده	انتظار مدل
$-۰/۰۴۸$	$r_{y4} = -۰/۴۴۲$	$r_{64} = P_{y1}r_{14} + P_{y2}r_{24} + P_{63}r_{34}$
		$= (-۰/۵۸۲)(-۰/۷۳۱)+(۰/۶۲۱)(-۰/۵۸۲)$
		$+(-۰/۷۲۷)(۰/۷۶۲) = -۰/۴۹۰$

چنانچه اختلاف r م شاهده شده از مدل، با مقدار r م شاهده شده، زیاد با شد، معلوم می شود مدل مشکل دارد. در معادله r_{y4} ناتوانی مدل واضح و مشخص نیست (اختلاف فقط ۰/۰۴۸- است)، اما در مورد معادله r_{32} اختلاف اسـاسـی تر اسـت (۰/۲۳۵). همین نتیجه را با اعمال روش سـیمون- بلالاک قبلاً به دست آورده بودیم.

چنانکه ملاحظه کردیم، معادلات اضـافی r این فرصـت را فراهم می‌کند که اعتبار مدل را مورد آزمون قرار دهیم. به این خاطر آن‌ها را معادلات آزمون می نامند. امّا این نام اشتباه برانگیز است. زیرا واقعاً یک آزمون آماری صـــورت نمی‌گیرد. تنها یک روش تجربی وجود دارد (ویدی آن را راه حل شرم ساری/د ستپاچگی نامیده ا ست). طبق آن اختلاف نباید بیش از ۱۰٪ با شد. بنابراین قابل فهم اســت که اســتفاده از معادلات آزمون از نقطه نظر آمار اســتنتاجی مورد انتقاد بوده و با آزمون های معناداری ضــرایب مســیر و آزمون انطباق مدل کلی جایگزین شــوند (جورس‌کگ[1]، ۱۹۷۳). آپ و اســمیت[2] (۱۹۷۶ ص ۱۵۵) به این موضـــوع پرداخته و معتقدند برای آزمونهای معناداری نیز مقدار محدودی وجود دارد، زیرا نتیجه آن همواره وابســته به اندازه نمونه اســت و ما نکته دیگری را اضــافه می‌کنیم، این که به میزان احتمال در نظر گرفته شده برای خطای α نوع اول هم وابسته ا ست (یک ضریب مسیر کم در صورت بزرگ بودن نمونه n و احتمال کم $1-\alpha$ همچنان معنادرا خواهد بود، و یک ضریب مسیر بزرگ در حالت کوچک بودن n و بزرگ بودن $1-\alpha$ ممکن است معنادرا نباشد). از این رو آپ و اسمیت هنوز از سودمندی استفاده از معادلات آزمون دفاع می‌کنند.

1. Joreskog
2. Opp & Schmidt

آن‌ها حتی از این فراتر رفته، معتقدند معادلات آزمون، فرصـــت پاســـخ نهایی به **ترتیب علّی** متغیرها دادن را فراهم می‌کنند.

مثلاً در مدل‌های

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A \arrow[rr] & & B \end{tikzcd}$$

و

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A & & B \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

معادلات r_{AB} به ترتیب چنین خواهد بود

$r_{AB} = P_{AC}r_{BC} + P_{AB}$ و $r_{AB} = P_{BC}r_{AC} + P_{BA}$. اگر تأثیر علّی B بر A یا A بر B وجود نداشت یعنی مدل $A \leftarrow C \rightarrow B$ این معادلات r به ترتیب به موارد زیر خلاصه می‌شوند: $r_{AB} = P_{AC}r_{BC}$ و $r_{AB} = P_{BC}r_{AC}$. از این طریق امکان آزمون حضـــور یا عدم حضـــور یک تأثیر علّی فراهم می گردد. البته امکانات آزمون خیلی محدود اســـت. مثلاً مدل $A \rightarrow C \rightarrow B$ را از مدل

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dr] & \\ A \arrow[ur] \arrow[rr] & & B \end{tikzcd}$$

می‌توان متمایز کرد اما از مدل

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dr] & \\ A \arrow[ur] & & B \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

نمی‌توان

چون مدل آخری بازگشتی نیست، چنان که شیوه‌های برآورد و فرض مربوط به مرحله ۶ (همبستگی صفر بین متغیرهای مستقیماً پیش‌بینی‌کننده) دیگر برقرار نخواهد بود.

با این وجود تلاش‌هایی به عمل آمده (آرمن و دیگران، ۱۹۷۵) تا معادلات آزمون برای مدل‌های غیر بازگشتی طرح شوند، ولی در این مورد هم ظاهراً امکانات آزمون ترتیب علّی، خیلی محدود است.

علاوه بر این بعضی مدلهای بازگشتی هم هستند که حتی اگر فراتشخیصی هم باشند، می‌توان برای آن‌هـــا معـــادله آزمون را طرح کرد. برای نمونه مدل

$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr] & \\ & B \\ A \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

شامل متغیرهای پیش بینی غیر مســـتقیم نمی باشـــد برای معادله آزمون از طریق ضـــرب لازم اســـت. اگر به مطالعه فوق این را اضـــافه کنیم که ماتریس داده‌های مشابه می‌تواند برای مدلهای متفاوت با ترتیب‌های علّی ناهمسان پشتیبانی تجربی فراهم کند، آنگاه به این نتیجه ناخوشایند می رسیم که عنوان مرحله ۱۱ با نام «آزمون ترتیب علّی» قدری ناپخته اســـت. این می‌تواند دلیلی باشـــد بر این که چرا ادبیات روش‌شـــناســـی به عنوان دقیق‌تر، «آزمون محدودیت‌های ناشی از فراتشخیصی» متوسل می‌شود.

مرحله ۱۲: مقایسه چند مدل علّی

به بیان روشن، کسی نمی‌تواند بیش از یک مدل را برای هر مجموعه از داده ها طرح و آزمون کند . از نقطه نظر آمار اســـتنتاجی، هر گاه مدل‌های علّی متفاوتی برای یک مجموعه از داده‌ها مورد آزمایش قرار می‌گیرند، همزمان مکانیزم اتکاء بر احتمال و شانس قوت می‌گیرد. به این خاطر، چنان چه میزان احتمال از قبل ۰/۹۹ فرض شـــده باشـــد، احتمال بطلان یک مدل نامعتبر برای دو آزمون مســـتقل به

میزان $(۰/۹۹)^{۲} = ۰/۹۸$ برای سه آزمون $(۰/۹۹)^{۳} = ۰/۹۷$، برای چهار آزمون $(۰/۹۹)^{۴} = ۰/۹۶$ و غیره می‌باشد. این میزان احتمال رفته رفته کمتر می‌شود، طوری که در مقابل، میزان احتمال عدم بطلان یک مدل نامعتبر افزایش می‌یابد. به دنبال آن ممکن است کسی به محض این که چند مدل را آزمود، آن را موفقیت‌آمیز ارزیابی می‌کنند. درست‌تر آن است که تنها یک آزمون برای هر ماتریس داده ها منظور شود. یک راه دیگر: همچنان که مدل های بیشتری مورد آزمایش قرار می گیرند آزمون‌ها محافظه‌کارانه‌تر شوند: به طور مثال، در هر یک از سه آزمون برای اهداف محاسباتی احتمال ۰/۹۹، و در تفسیر نتایج احتمال ۰/۹۷ پیش فرض قرار داده شود. روشی که بسیار توصیه شده است « شیوه تصنیف» است. نمونه به طور تصادفی به دو نیمه تقسیم می شود. یک نیمه جهت آزمایش چندین مدل به کار گرفته می‌شود و دانش حاصل از آن به کار گرفته می‌رود تا مدلی طراحی شود که در نیمه دوم مورد آزمون قرار می‌گیرد. نیمه دوم در حقیقت حالت یک تحقیق تازه را دارد.

اما در عمل همیشه امکان استفاده از روش تصنیف وجود ندارد، اولاً برای سه متغیر، با لحاظ کردن علائم، کمتر از ۹۶ مدل بازگشت خطی را نمی‌توان طراحی کرد. در مدل‌هایی که بیش از این تعداد متغیر داشته باشند و در آن‌ها روابط غیرخطی و غیربازگشتی وجود داشته باشد، این رقم چندان بزرگ خواهد بود که یک برنامه کامپیوتری بسیار پیچیده لازم است تا مدل‌های انطباق را انتخاب کند. آپ و اسمیت (۱۹۷۶، ص ۱۶۰) در این باره می‌گویند «تا آنجا که ما اطلاع داریم، هنوز چنین برنامه کامپیوتری ای ساخته نشده است». ثانیاً در آزمایش مدل‌های چندگانه، یک شیوه تصنیف، کافی نخواهد بود. برای این که در انجام آزمون‌های چندگانه در یک نیمه از نمونه، میزان خطای نوع اول چندان افزایش می‌یابد که مدل انتخابی ممکن است صرفاً ناشی از عامل شانس باشد. در این صورت احتمال این که چنین مدلی در نیمه دوم مورد تأیید قرار گیرد خیلی کم می شود. می توانیم تصور کنیم که این نمونه باز هم نصف شود، طوری که شیوه جزء دهم[1] یا حتی جزء پنجاهم اعمال شود. در این حال اندازه نمونه مورد نیاز بایستی ۱۰ یا ۵۰ بار بزرگتر از اندازه تعیین شده باشد. بدین ترتیب، طرح از اتکاء به شانس دوری می‌گزینند، امّا نیاز به سرمایه دارد.

به نظر می‌رسد برای محققان راهی جز انتخاب مدل‌های عملی‌تر وجود ندارد. برای این کار قواعد دقیق و مشخصی نیست. علمای روش‌شناسی این موضوع را به طرح نظریه در مرحله ۱ ارجاع می‌دهند. در این باره نقل قولی از اونتیس دونکن (۱۹۷۵، ص ۱۱) ذکر می کنیم: «مدل شما نمی‌تواند بهتراز ایده و فکر شما باشد». «برای این که با دانش عمل کنید» فرمول خاصی وجود ندارد. اگر چنین فرمولی کشف شده بود، می‌توانستیم برنامه ای کامپیوتری برای آن تهیه نموده و برای ملالت سودای فکری خود چاره‌ای بیندیشیم»(ص ۱۴۹). «یک تحلیل رسمی تنها قادر است شرایط ظاهری ای که یک مدل خوب بایستی داشته باشد (یا تا حدی برآورده سازد) را نشان دهد. این که

1-Split-10

این مدل واقعا خوب است را باید از روی زمینه‌های اساسی و زیربنایی با هدایت بهترین نظریه موجود تعیین کرد»(ص ۹۹).

دانکن و دیگر علمای روش شـــناســـی ظاهراً از تمایز آشـــکاری که در فلســـفه علم بین «زمینه کشف»و «زمنیه اثبات» قائل می‌شوند به خوبی آگاه بوده‌اند. تحلیل علّی قواعد «کشف» فرضیات علّی را به ما نمی‌دهد، بلکه به «اثبات» فرضیات علّی طرح شده کمک می‌کند. سیول رایت (۱۹۲۱) پیش از این تحلیل مســـیر خود را به این روش مطرح کرده اســـت، ویز (.viz) به عنوان یک روش تحلیل، دانشی که ما از روابط علّی داریم را با دانش مربوط به مقدار رابطه که از ضرایب همبستگی به دست می‌آید ترکیب می‌کند.

البته در مقایسه ی مدل‌های مختلف علّی، ملاحظات بسیاری می‌توانند نقش داشته باشند: کنار گذاشـــتن یا افزودن پیکان‌های علّی، کنار گذاشـــتن یا افزودن متغیرها، تغییر ترتیب متغیرها و موارد دیگر. نظر یه، نتایج تحقیقات قبلی، تحقیقات اولیه خود فرد و عقل جمعی می‌توانند در اتخاذ تصـــمیم‌های مناســـب، به ما کمک کنند . برای تعیین ترتیب علّی، بســـیاری اوقات در عمل ملاک تسلسل زمانی به کار گرفته می شود، حتی زمانی‌که فرد از سفسطه (مغالطه)[1] آگاه باشد. در هر حال ملاک‌های دیگری هم هست که در رساله‌های فلسفی پیرامون موضوع علّیت پیشنهاد شده است، مثل محصـــول، طرز عمل، مداخله، تثبیت، پراکندگی و ماهیت متغیرها (علت یا شـــاخص بودن، صـــورت احتمالی یا خصیصه ذاتی بودن، بزرگ و غیر عادی یا ریزنقش، اساسی بودن یا نبودن متغیرها). برای توضیح بیشتر درباره این ملاک ها به اثر تاک (۱۹۸۴) مراجعه کنید.

مرحله ۱۳: اصلاح مدل

پس از مقایســـه دوجانبه مدل‌های متفاوت، در مرحله خاصـــی می‌توان برای حذف یک پیکان علّی از مدل اصلی (درصورتی که ضریب مسیر خیلی پایین و غیر معنادار باشد)، افزودن یک پیکان علّی (اگر براســـاس معادلات آزمون معلوم شـــود به طور نابه جا حذف شـــده)، حذف یک متغیر (چنان چه تمام اثرات مستقیم و غیرمستقیم این متغیر بسیار کوچک باشند) و یا اضاف کرن یک متغیر جدید (در صورتی که واریانس تبیین کننده R^2 خیلی ناچیز باشد) تصمیم گرفت. در حالت آخر در واقع به یک تحقیق جدید نیاز است، زیرا برای متغیرهایی که باید اضافه شوند داده‌هایی جمع‌آوری نکرده‌ایم.

در مثال ما، پیشنهاد کردیم که یک پیکان دو سویه باید بین تعصب (X_2) و آزادی خواهی (X_3) اضافه گردد.

1. Post hoc crgo prepter hoc

۶-۶ نتایج برنامه spss برای ضرایب تفکیکی و تحلیل مسیر

در این جا نتایج حا صل از برنامه spss در محیط ویندوز که مربوط به مثال کوچک ما درباره سیاهه یهود ستیزی ا ست ارائه می شوند. خواننده می‌تواند یک‌سان بودن نتایج محا سبه شده با د ست و این نتایج را بررسی کند.

انتخاب یا ساختن یک فایل داده

طبق روشـــی که در فصـــل ۴ بیان شـــد فایلی از داده‌ها را تهیه کرده و برای تحلیل مورد نظر، مورد استفاده قرار می‌دهیم.

اجرای شیوه آماری مورد نظر

به ترتیب روی عبارات Analyze ســـپس Regression و بعد Linear کلیک کنید، یک پنجره فرعی برای رگر سون خطی نمودار می شود.. در ق سمت Source Variable list در سمت چپ روی متغیر واب سته Y و بعد روی علامت ▷ کلیک کنید . آنگاه متغیرهای X_1، X_2 و X_3 را از ق سمت Source Variable list انتخاب نموده و با کلیک روی علامت ▷ آن‌ها را به عنوان متغیرهای مســـتقل وارد کنید. شیوه پیش گزینه سیستم Enter می باشد که برای کار ما مناسب است.

در صـــورت لزوم می توانید روی عبارت Statisics کلیک کرده و انتخاب های بیشـــتری داشـــته با شید. همچنین می توانید روی عبارت Plots کلیک کرده و نمودار نقطه ای باقی مانده ها ا ستاندارد شده را به د ست آورید . این نمودارها در این قسمت مورد نظر ما نیست. تنها روی عبارت Continue کلیک کرده و به دریچه مربوط به رگرســـیون خطی بر می گردیم . آن گاه روی واژه Ok کلیک می کنیم. در این حال spss تحلیل رگرســـیون چندگانه Y به عنوان تابعی از X_1، X_2 و X_3 را اجرا می کند.

برای موارد زیر همین مراحل را تکرار می‌کنیم:

برای X_3 به عنوان تابعی از X_1 و X_4

برای X_1 به عنوان تابعی از X_2 و X_4

برای X_2 به عنوان تابعی از X_4

تا این جا تحلیل مســیر را انجام دادیم. ضــرایب تفکیکی را هم به طریقه زیر می توان به دســت آورد. روی عبارت Statisics، ســـپس Correlate و بعد Partial کلیک کنید . این کار دریچه مربوط به Partial Correlateans را باز می کند. بر روی دو متغیر در قســـمت فهرســـت متغیرها کلیک کرده، ســـپس روی علامت ▷ کلیک کنید . آنگاه روی واژه ok کلیک کنید. اکنون spss ضـــرایب تفکیکی درخواست شده را محاسبه می کند.

همچون همبستگی پاره ای شما ناگزیر از باز کردن دریچه دستورات و تایپ دستورات مناسب spss خواهید بود. بر رو ی عبارت file و سپس روی واژه New بعد spss syntax کلیک کنید، دستورات را وارد کرده و مکان نما را به خط نخست منتقل کنید، روی علامت Δ (یا اگر از فرم 5.0 spss ویندوز استفاده می‌کنید، روی واژه Run) کلیک کنید. دستورات زیر برای تحلیل مسیر ارائه می‌گردد.

1-REGRESSION/VARIABLES Y $X_1\,X_2$.
/STATISTICS ZPP /DEPENDENT Y/METHOD ENTER $X_1\,X_2$.
2-REGRESSION/VARIABLES Y $X_1\,X_3$
/STATISTICS ZPP /DEPENDENT Y /METHOD ENTER $X_1\,X_3$
3-REGRESSION /VARIABLES Y $X_1\,X_3\,X_4$
/STATISTICS ZPP /DEPENDENT Y /METHOD ENTER $X_1\,X_3\,X_4$
4-REGRESSION /VARIABLES Y $X_1\,X_3\,X_4$
/DEPENDENT Y /METHOD ENTER Y $^{X1\ X2x3}$
5-REGRESSION /VARIABLES $X_1\,X_3\,X_4$
/DEPENDENT $^{x}{}_3$ /METHOD ENTER $X_1\,{}^{x}{}_4$
6- REGRESSION /VARIABLES ^{X1} $X_2\,X_4$
/DEPENDENT ^{X1} /METHOD ENTER $X_2\,X_4$
7- REGRESSION /VARIABLES $X_2\,X_4$
/DEPENDENT X_2 /METHOD ENTER X_4

در دستورات ۱ الی ۳ همبستگی‌های مرتبه صفر، تفکیکی و پاره‌ای، به وسیله عبارت "Statisties=Zpp"خواسته شده است. در دستور ضریب همبستگی مرتبه صفر r_{y102}، در دستور ۲ ضریب همبستگی مرتبه صفر $^{r}{}_{y103}$ در دستور ۲ ضریب همبستگی مرتبه صفر r_{y103} داده شده و در دستور ۳ مربوط به تحلیل رگرسیون ضریب همبستگی مرتبه دوم r_{y1024} و همچنین همبستگی پاره‌ای $r_{y(1024)}$ درخواست گردیده است.

چهار تحلیل رگر سیون بعدی در د ستورات ۴ الی ۷ ا ساس تحلیل م سیر را ت شکیل می‌دهند. نتایج به شرح زیر است:

```
Listwise Deletion of Missing Data
Equation Number 1    Dependent Variable..   Y   degree of anti-Semitism
Block Number  1.  Method:  Enter      X1       X2


Variable(s) Entered on Step Number
   1..    X2        degree of dogmatism
   2..    X1        degree of religious orthodoxy


----- Variables in the Equation -----

Variable      Correl Part Cor  Partial

X2           .776501  .787654  .813752
X1           .251224 -.283829 -.450439

***********************************************************************************
Listwise Deletion of Missing Data
Equation Number 1    Dependent Variable..   Y   degree of anti-Semitism
Block Number  1.  Method:  Enter      X1       X3


Variable(s) Entered on Step Number
   1..    X3        libertarian attitude
   2..    X1        degree of religious orthodoxy


----- Variables in the Equation -----

Variable      Correl Part Cor  Partial

X3          -.801754 -.824711 -.852037
X1           .251224 -.316943 -.530312

***********************************************************************************

Listwise Deletion of Missing Data
Equation Number 1    Dependent Variable..   Y   degree of anti-Semitism
Block Number  1.  Method:  Enter      X1       X2       X4


Variable(s) Entered on Step Number
   1..    X4        educational level
   2..    X2        degree of dogmatism
   3..    X1        degree of religious orthodoxy
```

X4	-.442387	-.188801	-.335602
X2	.776501	.715732	.803679
X1	.251224	-.340681	-.540759

****

Listwise Deletion of Missing Data
Equation Number 1   Dependent Variable..   Y   degree of anti-Semitism
Block Number 1.   Method: Enter   X1   X2   X3

Variable(s) Entered on Step Number
1..   X3   libertarian attitude
2..   X1   degree of religious orthodoxy
3..   X2   degree of dogmatism

Multiple R	.95862
R Square	.91896
Adjusted R Square	.87844
Standard Error	.78823

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	3	42.27218	14.09073
Residual	6	3.72782	.62130

F = 22.67929   Signif F = .0011

Equation Number 1   Dependent Variable..   Y   degree of anti-Semitism

------------------ Variables in the Equation ------------------

Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
X3	-.864541	.207067	-.726689	-4.175	.0058
X1	-.560336	.150622	-.581849	-3.720	.0099
X2	.528463	.146522	.621390	3.607	.0113
(Constant)	9.571763	1.817108		5.268	.0019

****

Listwise Deletion of Missing Data
Equation Number 1   Dependent Variable..   X3   libertarian attitude
Block Number 1.   Method: Enter   X1   X4

```
Variable(s) Entered on Step Number
   1..    X4        educational level
   2..    X1        degree of religious orthodoxy

Multiple R           .76785
R Square             .58959
Adjusted R Square    .47233
Standard Error      1.38039


Analysis of Variance
                    DF      Sum of Squares      Mean Square
Regression           2           19.16163          9.58081
Residual             7           13.33837          1.90548

F =       5.02803       Signif F =  .0443


Equation Number 1    Dependent Variable..   X3   libertarian attitude


------------------ Variables in the Equation ------------------

Variable              B         SE B       Beta          T  Sig T

X4             .592745      .319441    .658413      1.856  .1059
X1            -.114446      .287225   -.141384      -.398  .7022
(Constant)    2.839128     2.738262                 1.037  .3343

*******************************************************************************

Listwise Deletion of Missing Data
Equation Number 1    Dependent Variable..   X1   degree of religious orthodoxy
Block Number  1.  Method:  Enter      X2       X4


Variable(s) Entered on Step Number
   1..    X4        educational level
   2..    X2        degree of dogmatism


Multiple R           .76628
R Square             .58718
Adjusted R Square    .46924
Standard Error      1.71029

Analysis of Variance
                    DF      Sum of Squares      Mean Square
Regression           2           29.12432         14.56216
Residual             7           20.47568          2.92510

F =       4.97835       Signif F =  .0452
```

فصل ۷

تحلیل واریانس و کوواریانس: تأثیر تعامل پاداش‌های مادی و علاقه به تکلیف بر انگیزش

۷-۱ مسأله تحقیق و طرح علّی

در تحقیق مربوط به انگیزش درونی افراد برای انجام یک تکلیف، تأثیر علّی پاداش‌های خارجی مورد آزمایش قرار گرفت. همچنین اثر جذّابیت تکلیف: تکالیف جذّاب، متوسط و کسل‌کننده، از یکدیگر متمایز گردید. انتظار این بود که هر دو عامل علّی بر انگیزش درونی تأثیر مثبت داشته باشند: اگر مقداری پول پاداش داده شود نسبت به حالتی‌که پولی ارائه نمی‌شود، انگیزش بیشتر باشد (اثر پاداش‌های خارجی) و با افزایش انگیزش، شیفتگی به تکلیف بیشتر گردد (تأثیر جذابیت تکلیف).

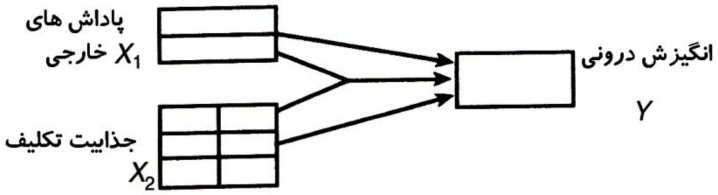
علاوه بر این اثرات مجزّا، اثر ترکیبی دو عامل نیز مورد انتظار بوده که به عنوان اثر تعاملی معروف است. این اثر قدری پیچیده‌تر است. یعنی اثر یک متغیر بایستی بر متغیر دیگر سایه افکند. به این ترتیب، اثر مثبت پاداش های خارجی بر انگیزش درونی، در مورد تکلیف کسل کننده باقی می‌ماند، امّا در مورد تکالیف دارای جذّابیت متوسط به حساب نمی‌آید، و حتّی برای تکالیف جذّاب این اثر، منفی خواهد بود یا برعکس؛ و با نتیجه مشابهی، اثر علاقه به تکلیف برای دو مقوله پاداش‌های مادی (وجود داشتن یا نداشتن پاداش) متفاوت است. در حالتی که اثر تعاملی معنادار باشد، ترکیب های دو عامل علّی را بایستی بر انگیزش درونی مد نظر قرار داد. برای مثال، ترکیب «دادن پاداش، تکلیف کسل‌کننده» معنای انگیزشی متفاوتی را با ترکیب «دادن پاداش، تکلیف جذّاب» نشان خواهد داد. شش ترکیب از این نوع وجود دارد، و اگر سطوح انگیزش این شش ترکیب به طور معناداری متفاوت باشد، یک اثر تعاملی وجود دارد.

در مثال ما، سه متغیر درگیرند: یک متغیر وابسته Y (انگیزش درونی) و دو متغیر مستقل X_1 (پاداش‌های خارجی) و X_2 (جذّابیت تکلیف). متغیر وابسته Y در سطح سنجش کمّی اندازه‌گیری شده است. از سوی دیگر، متغیرهای مستقل هر دو در سطوح پایین‌تر سنجش هستند. پاداش‌های مادی X_1 دو بخشی (شامل مقوله‌های: ارائه پاداش و عدم پاداش) و جذابیت تکلیف X_2 رتبه‌ای (رتبه‌ها: بالا، متوسط و پایین) هستند.

فرمت مسأله همان طور که در شکل۱-۷ در زیر نشان داده شده ساختار تعاملی دارد که در آن X_1 به صورت دو بخشی و X_2 به صورت سه بخشی ترسیم شده است:

پیکان $X_1 \rightarrow Y$ نشـــان‌دهنده اثر علّی مســـتقیم پاداش‌های خارجی بر انگیزش X_1 درونی است. پیکان $X_2 \rightarrow Y$ اثر مستقیم علّی جذابیت تکلیف بر انگیزش درونی را نشان می‌دهد.

پیکان چنگالی شـکل $\genfrac{}{}{0pt}{}{X_1}{X_2} \succ\!\!\rightarrow Y$ نمایانگر اثر تعاملی اسـت، یعنی اثر ترکیب‌های پاداش‌های خارجی و جذّابیت تکلیف بر انگیزش درونی .



شکل۱-۷ نمودار رابطه علّی شاختار تعاملی

به منظور توضـــیح حالات مختلف تحلیل واریانس و کوواریانس در این جا اجزاء **نمودار** فوق را بیشتر مورد توجه قرار داده و بین آن‌ها تمایزهایی قائل می‌شویم.

نخســـت این که دو متغیر مســـتقل وجود دارد. بنابراین شـــیوه به کار رفته، تحلیل واریانس **دوطرفه** اســـت. درحالتی‌که فقط یک متغیر مســـتقل وجود دارد، از تحلیل واریانس یک‌طرفه (آنوا) استفاده می‌کنیم. و برای n متغیر مستقل یک آنوای n طرفه بکار می‌بریم.

نکته دوم این که، در طرح‌های یک‌طرفه، متغیر مســـتقل می‌تواند دو بخشـــی باشـــد مثل پاداش‌های خارجی X_1. در این حالت آزمون T به عمل می‌آید. همچنین متغیر مستقل می‌تواند سه بخشی یا چند بخشی باشد، مثل جذابیت تکلیف X_2. در این حالت آزمون F به عمل می‌آید.

نکته سوم این که، طرح شامل یک پیکان چنگالی شکل است که اثر تعاملی را نشان می‌دهد. در غیاب اثر تعاملی، اثرات مجزّای پاداش‌های خارجی و جذابیت تکلیف به سبک انباشتی (افزایشی) عمل خواهند کرد. آنگاه یک مجموعه ی وزن یافته می‌تواند به وجود آید تا تأثیر ترکیبی آن‌ها بر انگیزش درونی تعیین شـــود (همچنان‌که در تحلیل رگرســـیون چندگانه صـــورت می‌گیرد). از این رو مدل را انباشتی (افزایشی) می‌نامند، در مقابل در مثال ما یک **مدل غیرافزایشی**[1] وجود دارد.

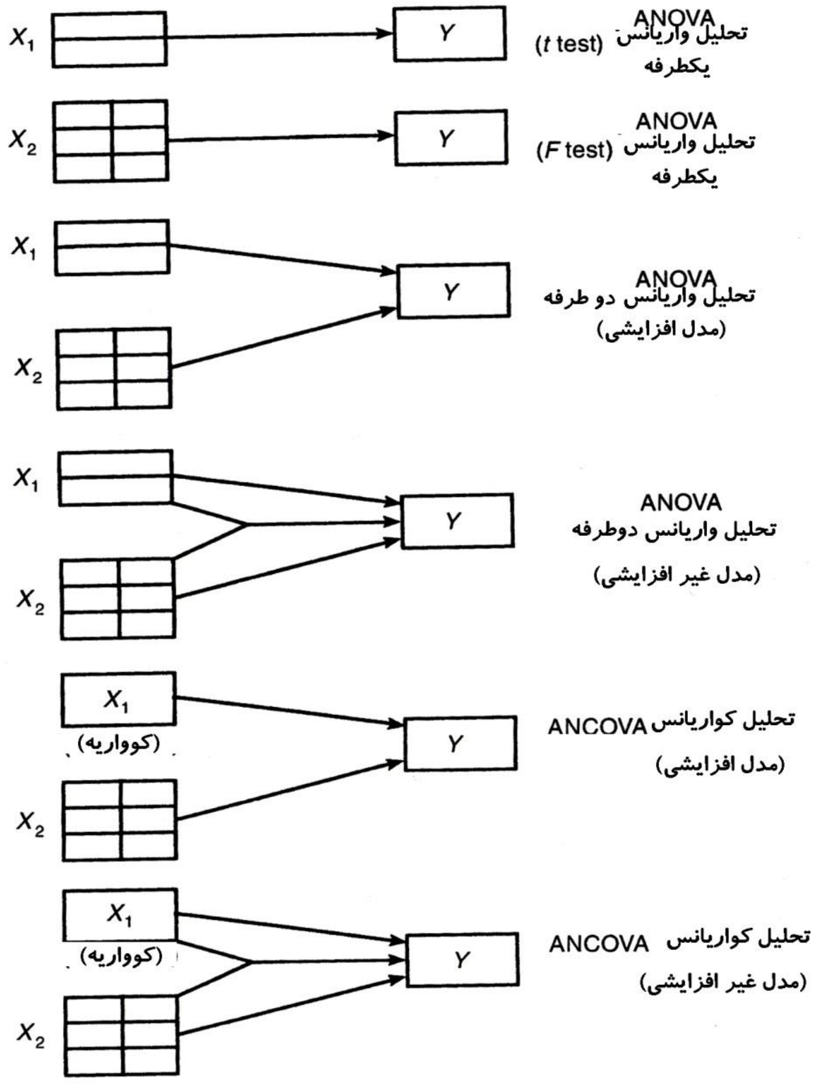
چهارم این که، هر دو متغیر مستقل در سطح سنجش پایین یعنی اسمی و ترتیبی قرار دارند. در چنین مواردی تحلیل واریانس (آنوا) به کار برده می‌شود. در هر حال اگر یک یا چند متغیر مستقل در سطح سنجش کمّی اندازه‌گیری شده باشند، آن‌ها را کوواریه (هم‌تغییر) می نامند و شیوه مناسب

[1] . non-additive model

برای آن‌ها تحلیل کوواریانس (آنکوا) ا ست. در مثال ما این مورد در حالتی ا ست که متغیر پاداش‌های خارجی به‌صورت میزان پول بیان گردد.

به طور خلا صه طرح‌های تحقیقاتی که می‌توانند به شکل نمودار علّی وجود دا شته با شند، در شکل ۲-۷ همراه با شیوه‌های تحلیلی مربوط به آن ارائه شده‌اند.

در راستای تحقیق انگیزش درونی اکنون با تحلیل واریانس دو طرفه شامل یک اثر تعاملی سر و کار داریم. در اینجا مدل‌هایی که با آن‌ها روبه رو هستیم خود به خود ساده‌تر خواهند بود.



شکل ۲ -۷ نمودارهای علّی برای تحلیل واریانس (آنوا) و تحلیل کوواریانس (آنکوا)

۷-۲ ماتریس داده‌ها

در مجموعه کوچک داده‌های (فرضـــی) ما ۲۴=n نفر را به عنوان واحدهای تحلیل در نظر می‌گیریم. متغیر وابسته Y انگیزش درونی است و به عنوان یک مقیاس فاصله‌ای با نمرات از ۰ تا ۹ اندازه‌گیری شده است. پاداش‌های خارجی دارای دو مقوله‌اند: عدم وجود (نمره=۱) یا وجود (نمره=۲) یک مقدار پول.

جذابیت تکلیف دارای سه رتبه است: بالا (نمره=۱)، متوسط (نمره=۲)و پایین (نمره=۳).

ماتریس داده‌ها به صورت جدول ۱-۷ می‌باشد.

جدول ۱-۷ ماتریس داده‌ها

Y	X_1	X_2
۶	۱	۱
۴	۱	۱
۳	۱	۱
۳	۱	۱
۴	۱	۲
۳	۱	۲
۳	۱	۲
۲	۱	۲
۳	۱	۳
۲	۱	۳
۲	۱	۳
۱	۱	۳
۹	۲	۱
۹	۲	۱
۸	۲	۱
۶	۲	۱
۷	۲	۲
۵	۲	۲
۴	۲	۲
۴	۲	۲
۴	۲	۳
۲	۲	۳
۱	۲	۳
۱	۲	۳

۷-۳ مدل تحلیل واریانس

همبســـتگی، تحلیل رگرســیون و تحلیل مســیر مربوطه در بســیاری مواقع به عنوان بخشـــی از آمار توصیفی به حساب آمده‌اند. این واقعیت که ضریب همبستگی، ضرایب رگرسیون و مدل کلی علت و معلولی بایستی از لحاظ معناداری آزموده شوند، اغلب نادیده گرفت می شود، یا این که در بسیاری مواقع به عنوان یک احتیاط افزوده می‌شود.

این کارها به طور سـنتی باید صـورت می‌گرفت. این رویه که تحلیل رگرسـیون عمدتاً به عنوان مدل پیش‌بینی و بعداً در تحلیل مسـیر به‌عنوان مدل علّی بکار گرفته شـده، یک شـیوه پیشـرفته‌تر ا ست. عمده‌ی توجه معطوف به این ا ست که ظرفیت پیش‌بینی‌کنندگی، پیش‌بینی‌کننده‌ها مقایـ سه شود یا اثرات علّی عامل‌های علّی مورد مقایسه قرار گیرد. پرسش از تعمیم نتایج نمونه به جمعیت، به طور نادرستی از نظر مخفی مانده است.

در مورد تحلیل واریانس، قضـیه برعکس اسـت؛ به خاطر این که این روش اسـاسـاً از سـوی سررونالد فیشر به عنوان بخشی از آمار ا ستنتاجی ارائه شده بود. و بدین‌گونه سؤال مربوط به تعمیم نتایج از نمونه به جمعیت به صورت تحت‌اللفظی در تحلیل واریانس (آنوا) شکل گرفت. این شیوه بر آزمون F (F فیشر) متمرکز ا ست که شکل گسترش یافته‌ای از آزمون t مورد ا ستفاده در طرح‌های تجربی می‌باشـد. بدین ترتیب ما تحلیل واریانس را وسـیله مناسـبی برای شـیوه تجربی سـنتی تلقی می‌کنیم. تعجبی ندارد که روان شناسان – افراد مشهور در طراحی آزمایش‌ها- از این شیوه به دفعات استفاده می‌کنند.

فیشر در رابطه با آزمون t استیودنت سنتی، از خود دو سؤال کرد. نخست اینکه، بجای دو گروه آزمایش و کنترل، گاهی می‌توان سـه گروه یا بیشـتر تشـکیل داد که به شـرایط آزمایشـی مختلف گمارده شوند. مقایسه هر جفت نمره این گروه به وسیله آزمون‌های t، موجب مسأله پرمخاطره تکرار آزمون‌ها می شود که در ادبیات آماری «مقایسه چندگانه» نام دارد و باعث اتکا به شانس می شود. از این گذشته این آزمون‌هایt، مستقل از یکدیگر نیستند. چگونه می‌توان برای این مسأله راه‌حلی پیدا کرد؟

ثانیاً به جای این که آزمونی‌ها را با شـرایط مختلف یک عامل مواجه کنیم، این کار را می‌توانیم با دو عامل یا بیشـتر به طور مشـابهی در یک طرح یکسـان انجام دهیم (آزمایش دو عاملی یا چند عاملی). در رابطه با این امکان، فیشر می‌دانست که علاوه بر اثرات هر یک از عامل‌ها، یک اثر تعاملی هم می‌تواند بروز کند. برای این گستره هم باید راه‌حلی می‌یافت.

با توجه به این دو موضوع بود که آزمون F پدید آمد.

برای توضـیح **مدل کلی** تحلیل واریانس ابتدا نقل قولی از کندال و اسـچارت[1] (۱۹۶۹، ص ۳) بیان می‌کنیم که به درستی دریافتند «تحلیل واریانس» در واقع روش بسیار مناسب‌تری می‌باشد؛ به دلیل این که، تغییرات کل به تغییرات درون گروهی و تغییرات بین گروهی تقسـیم می‌شـود (درون گروهی+ بین گروهی =کل). مثلاً فرض کنید سه گروه جذابیت تکلیف داشته باشیم. هر گروه را هشت نفر تشکیل دهند. میزانی که هشت نفر درون یک گروه از یکدیگر متمایز می شوند به وسیله مجموع مجذورات انحراف نمرات انگیزش آن‌ها از میانگین گروه بیان می‌شـود. این یک **تغییر درون گروهی** اسـت و سـه تا از آن‌ها وجود دارد؛ یعنی برای هر گروه، یکی. میانگین این سـه تغییر درون گروهی

1. Kendall& Stuart

چیزی راجع به تفاوت‌های بین افراد بیان می‌کند، بدون این که تأثیر گروه دخالت کند چون این تأثیر ثابت نگه داشته شده است.

از سوی دیگر ما همچنین می‌توانیم تفاوت‌های بین گروه‌ها را آزمایش کنیم، بدون این که تفاوت‌های افراد دخالت داشته باشند. برای این کار میانگین‌های گروهی را گرفته و مجموع مجذورات انحراف این نمرات میانگین انگیزش از میانگین اصلی را حساب می‌کنیم. اگر این تغییر در اندازه گروه ضرب شود (به دلیلی که بعداً توضیح خواهیم داد)، **تغییر بین گروهی** به دست می‌آید.

مشخص می شود که مجموع این تغییرات بین گروهی و تغییرات درون گروهی با **تغییرات کل** برابر است. تغییرات کل، مجموع مجذورات تغییرات همه ۲۴ نمره از میانگین اصلی است و از این رو تفاوت‌هایی که باید در مورد فردیت و همچنین یکسان بودن گروهی به حساب آیند را به دست می‌دهد.

در تحلیل واریانس تفاوت‌های بین گروهی و تفاوت‌های بین فردی با یکدیگر مقایسه می شوند. تغییرات بین گروهی نشان دهنده آن بخش از تفاوت‌هایی است که منحصراً ناشی از گروه است. با تقسیم آن بر تعداد درجات آزادی (در این جا ۱-۳= d_B، زیرا سه گروه وجود دارد و میانگین اصلی ثابت است)، **واریانس بین گروهی** را به دست می‌آوریم.

تغییرات درون گروهی معرف بخشی از تفاوت‌هاست که منحصراً به افراد بر می‌گردد. با تقسیم آن بر تعداد درجات آزادی (در این جا ۲۱= (۱-۸)۳ = d_W چون در هر گروه ۸ نفر وجود دارد که میانگین اصلی آن ثابت است)، **واریانس بین گروهی** حاصل می‌شود.

خارج قسمت واریانس بین‌گروهی بر واریانس درون‌گروهی، **نمره F** است که در آزمون F استفاده خواهد شد. صورت این نمره F، تفاوت‌های گروهی و مخرج آن تفاوت‌های بین‌فردی را شامل می‌شود. اگر F=۱ باشد، به طوری که گروه‌ها به اندازه‌ای که افراد از قبل با هم فرق دارند تفاوت کنند، در این صورت گروه‌های جذابیت تکلیف بر انگیزش درونی تأثیری ندارند. چنین تأثیری در حالتی وجود دارد که صورت بزرگتر از مخرج یعنی $F>$۱ باشد، زیرا واریانس گروه‌ها از واریانس بین فردی بیشتر می‌شود. این که نمره F بایستی چه مقدار از ۱ بزرگتر باشد، در مبحث آزمون F روشن خواهد شد. هدف ما در این جا صرفاً بیان خط مدل عمومی است. این مدل متشکل از سه بخش است: تجزیه تغییرات کل Y به تغییرات درون‌گروهی و بین‌گروهی، تقسیم کردن بر تعداد درجات آزادی برای به دست آوردن واریانس‌ها و محاسبه نسبت واریانس بین‌گروهی و درون‌گروهی به منظور مقایسه تفاوت‌های گروهی با تفاوت‌های بین‌فردی .

این مدل نوعی از **مدل خطی عمومی** است، که در تحلیل رگرسیون با آن سر و کار داریم. در شکل علائم ماتریسی، آن را برای جمعیت، به صورت $\mathbf{y}=\mathbf{X\beta}+\boldsymbol{\varepsilon}$ و برای نمونه، به صورت

$\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{e}$ می‌نویسند. مؤلفه $\mathbf{X}$ که در تحلیل رگرسیون،متغیرهای مستقل را در بر دارد، نشان‌دهنده گروه‌ها است. در اینجا متغیر دامی (تصنّعی) به کار گرفته می شود، اجزاء بردار $\mathbf{b}$ نشان دهنده تأثیرات گروهی هستند. تغییرات $\mathbf{(Xb)'(Xb)}$ که در تحلیل رگرسیون، تغییرات تبیین شده نامیده می‌شوند[1] و به صورت SSR (مجموعه مجذورات رگرسیون) نشان داده می‌شوند، در اصل همان تغییرات بین گروهی SSB (مجموعه مجذورات بین گروهی) هستند.

مؤلفهٔ e هم مثل تحلیل رگرسیون، عبارت باقی مانده است. تغییرات $\mathbf{e'e}$، تغییرات تبیین نشده SSE (مجموعه مجذورات خطا) هستند و در اصل همان تغییرات درون گروهی SSW (مجموعه مجذورات درون گروهی) می باشند.

بردار $\mathbf{y}$ در بردارنده نمرات متغیر وابسته است. تغییرات $y'y$ تغییرات کل SST (مجموعه مجذورات کل نمونه) می باشند. بنابراین عبارت SST=SSR +SSE در این جا به SST=SSB +SSW تغییر پیدا می‌کند.

اگر علاوه بر سه گروه جذابیت تکلیف که به وسیله X_2 نشان داده شد، دو گروه پاداش‌های (X_1) را هم وارد کنیم، آنگاه فرمول قبلی تغییرات کل **پیچیده‌تر** می‌شود. علاوه بر آزمون F مربوط به تأثیر X_2 چند آزمون F اضافه هم باید انجام شود: یک آزمون F برای تأثیر X_1 و احتمالاً یک آزمون F اثرات تعاملی. برای مورد آخر، مفهوم و تغییرات تعاملی SSI (مجموعه مجذورات تعاملی) را هم باید وارد کرد. فرمول تجزیه مجموعه مجذورات کل به این صورت در می‌آید:

$$SST = SSB_{(x1)} + SSB_{(x2)} + SSI + SSW$$

در هر یک از سه آزمون F، در مخرج کسر F، استفاده از SSW مرسوم است. صورت کسر به ترتیب شامل سه جزء دیگر می باشد.

۷-۴ رویکرد هندسی

ابتدا مدلی که براساس آن تغییرات کل نمرات Y به تغییرات بین گروهی و درون‌گروهی تقسیم شده‌اند را مورد بررسی قرار خواهیم داد. سپس به تحلیل واریانس به عنوان مدل خطی کلی توجه نموده و آن را با تحلیل رگر سیون مقایسه می‌کنیم. از هر یک از آن دو یک نمودار هند سی نیز ارائه خواهیم کرد.

از ساده‌ترین شکل تحلیل واریانس شروع می‌کنیم: آنوای (تحلیل واریانس) یک طرفه برای دو گروه. اثر پاداش‌های خارجی بر انگیزش درونی مورد بررسی است. دو گروه وجود دارد: گروهی که پولی دریافت نمی‌کند و گروهی که پول دریافت می‌کند. طبق فرض صفر این دو گروه، نمونه‌های تصادفی از یک جمعیت هستند، بدین لحاظ تنها در اثر تصادف ممکن است بین میانگین آن‌ها اختلافی وجود داشته باشد. این وضعیت در شکل ۳-۷ به تصویر کشیده شده است.

۱-فرض می کنیم که متغیرها به صورت انحراف از میانگین خود بیان شده اند.

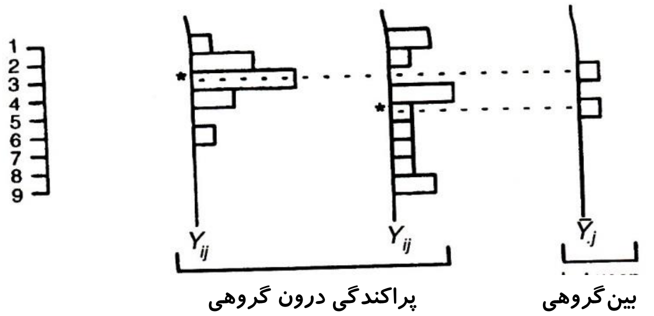
پراکندگی درونی هر یک از این دو گروه در سمت چپ تصویر نشان داده شده است. هر یک از گروه‌ها در درون خود دارای پراکندگی هستند. میانگین کلی این دو توزیع برآورد اولیه‌ای از توزیع جمعیت ارائه می‌کند که در فرض صفر طرح شده اند. در سمت راست، تصویر میانگین‌های گروهی در یک توزیع جمع شده است. پراکندگی این میانگین‌های گروهی به منظور سادگی، بسیار کوچک‌تر از پراکندگی درونگروهی است. به این خاطر، این شرایط را می‌توان با نوعی توزیع نمونه‌گیری مقایسه کرد که در آن میانگین‌ها نسبت به نمرات اصلی آزمودنی‌ها به صورت فشرده‌تری کنارهم چیده شده‌اند (برای نمونه‌هایی با حجم n ، واریانس n مرتبه کوچکتر است). با ضرب کردن توزیع میانگین‌ها در اندازه گروه (n=۱۲) برآورد ثانویه مناسبی از پراکندگی در جمعیت به دست می آوریم. چنان چه این برآورد ثانویه به طور معناداری از اولی بالاتر باشد، آنگاه میانگین‌های گروهی را خیلی کم می‌توان به شانس نسبت داد. در این صورت دادن پاداش مالی دارای اثر معناداری بوده است.

به همین ترتیب تأثیر جذابیت تکلیف بر انگیزش درونی را هم می‌توان به عنوان یک تجزیه ارائه کرد (شکل ۴-۷ را ملاحظه کنید). اکنون سه گروه وجود دارد، هر یک شامل هشت نفر: یکی با تکلیف جذاب، یکی با جذابیت متوسط و یکی با تکلیف خسته کننده.

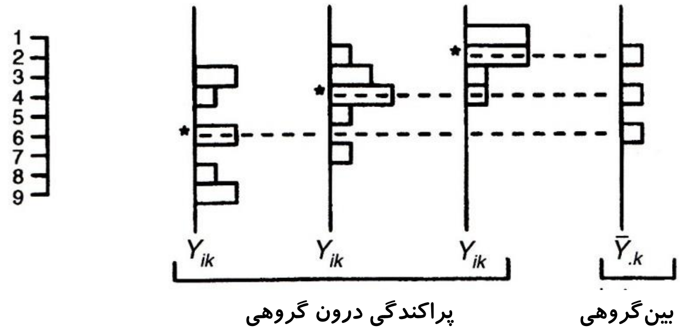
اگر اثرات پاداش‌های خارجی و جذابیت تکلیف به صورت ترکیبی مورد آزمون قرار گیرند یک طرح تحلیل واریانس (آنوا) دو طرفه پیچیده تر با ۶=۳×۲ گروهی که هر یک شامل چهار نفرند خواهیم داشت (نگاه کنید به تصویر ۵-۷).

این حالت را می‌توانیم به وسیله یک جدول توافقی ۳×۲ نشان دهیم که در هر شش خانه آن یک توزیع درون‌گروهی رسم شده است. طرح‌های یکطرفه قبلی در اینجا در حاشیه‌های جدول واقع می‌شوند. میانگین‌ها با علامت ستاره * مشخص شده‌اند.

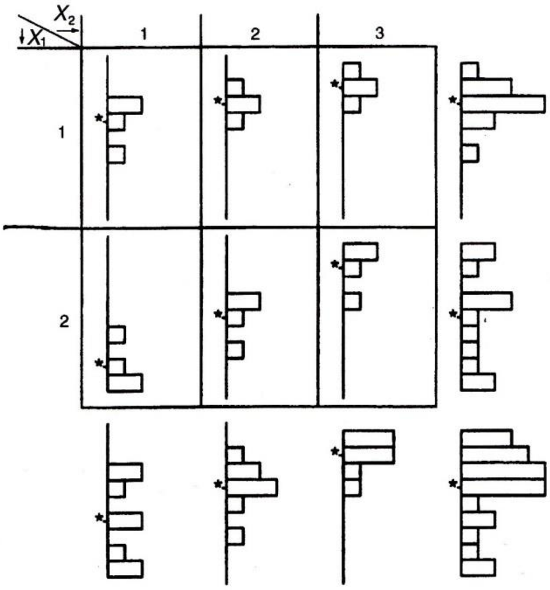
این طرز بیان تحلیل واریانس با میانگین و توزیع‌های درونی در هر خانه جدول، نقطه شروع محاسبات در رویکرد سنتی خواهد بود.



شکل ۳-۷ توزیع‌های درون گروهی و بین گروهی برای آنوای یک طرفه (I)



شکل ۴-۷ توزیع‌های درون گروهی و بین گروهی برای آنوای یک طرفه (II)

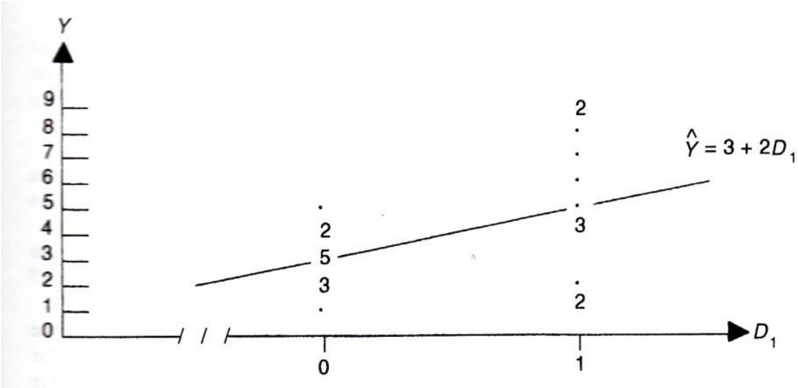


شکل ۵-۷ توزیع‌های درون گروهی آنوای دوطرفه

اکنون به رویکرد رگر سیون باز می‌گردیم. از این نقطه نظر به این شیوه به صورت نوعی از مدل خطی کلی نگریسته می‌شود. برای این منظور نمرات تصنعی (دامی) مورد استفاده قرار می‌گیرند. متغیر پاداش‌های خارجی $X_۱$ به عنوان متغیر دامی $D_۱$ با نمرات ۰ (عدم پاداش) و ۱ (ارائه پاداش) ن شان داده می شود. متغیر جذابیت تکلیف $X_۲$ با دو متغیر دامی $D_۲$ و $D_۳$ به ترتیب با نمرات ۱ و ۰ برای تکالیف جذاب، ۰ و ۱ برای جذابیت متو سط، و ۰و۰ برای تکالیف ک سلکننده جایگزین می شود. برای یک مدل غیرافزای شی (با تأثیر تعاملی) جملات ا ضافی ضرب $D_۴ = D_۱D_۲$ و $D_۵ = D_۱D_۳$ بایستی افزوده شوند. بنابراین ما یک فضای شش بعدی حاصل کردیم. برای این مدل رگرسیون یک متغیر وابسته (Y) و پنج متغیر مستقل ($D_۱$ الی $D_۵$) وجود دارد. از آن جا که این حالت را دیگر نمی

شود تر سیم کرد، به یک بیان هند سی از مطلب اکتفا می‌کنیم، ابتدا اثر $X_۱ \rightarrow Y$ در فضای ($D_۱$، Y) و بعد از آن اثر $X_۲ \rightarrow Y$ در فضای سه بعدی ($D_۲$، $D_۳$، Y) ارائه می‌شود.

اجازه دهید از ساده‌ترین حالت شروع کنیم: اثر پاداش‌های خارجی ($X_۱$) بر انگیزش درونی (Y). متغیر $X_۱$، بوسیله $D_۱$ جایگزین شده تنها دارای دو نمره است: ۰ (عدم پاداش مادی) و ۱ (پاداش مادی). مدل رگرسیون مربوطه در شکل ۶-۷ ارائه شده است.



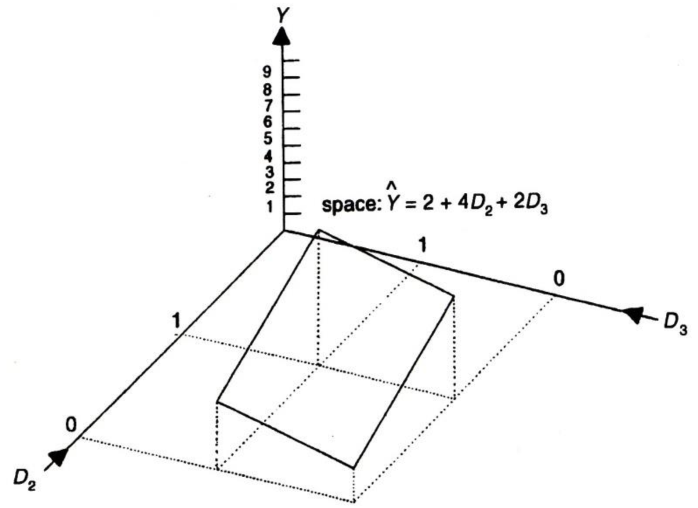
شکل ۶-۷ آنوای یک طرفه به عنوان رگرسیون با یک متغیر دامی

تفسیر رگرسیون در این جا سر راست است، به خصوص از این جهت که متغیر مستقل $D_۱$ تنها دارای دو نمره ا ست (۰ و ۱). مقدار ثابت برابر با ۳ ا ست. بدین معنا که مقدار پیش‌بینی شده Y برای $D_۱$ =۰ برابر با ۳ است: اگر هیچ مبلغی پاداش داده نشود، نمره انگیزش معادل ۳ پیش بینی می‌شود. این میانگین Y برای گروه بدون پاداش است. ضریب رگرسیون $b_{y۱}$ برابر با ۲ است. این مقدار افزایش انگیزش به ازاء هر واحد افزایش در $D_۱$ می باشـــد. زمانی‌که در واقع افزایش از $D_۱$=۰ به $D_۱$=۱ یک واحد افزایش با شد، ما با حرکت از گروه بدون پاداش به گروه دارای پاداش سر و کار داریم. به عبارت دیگر، ضریب $b_{y۱}$ بیانگر آن ا ست که پاداش دادن یک مبلغ پول به طور متو سط انگیزش را ۲ واحد افزایش می‌دهد. بدین ترتیب، میانگین Y برای گروه دارای پاداش، ۲ واحد بیشتر از گروه بدون پاداش است: ۵=۲+۳.

برای به تصویر کشیدن اثر جذابیت تکلیف ($X_۲$) بر انگیزش درونی (Y)، نیازمند یک فضای سه بعدی ($D_۲$، $D_۳$، Y هستیم، چنان که در شکل ۷-۷ نشان داده شده است.

تابع رگرسیون $Y = ۲ + ۴D_۲ + ۲D_۳ + e$ در قســمت زیر تحلیل خواهد شـد. مقدار ثابت معادل ۲ است. یعنی مقدار پیش‌بینی شده برای $D_۲$ =۰ معادل ۲ است؛ میانگین انگیزش گروهی که تکلیف کسل کننده ای داشته است ۲ می باشد. ضریب رگرسیون $b_{y۲.۳}$ برابر ۴ است. بدین معنا که

با رفتن به سوی گروهی که تکلیف جذابی داشته اند ($D_2=1$ ، $D_3=0$) نمره انگیزش به طور متوسط ۴ واحد افزایش می‌یابد. در حقیقت، میانگین انگیزش این گروه ۴ واحد بیشـتر از گروه (۰ ، ۰) اسـت: ۶=۴+۲. ضریب رگرسیون $b_{y3.2}$ معادل ۲ است. این مقدار افزایش Y به ازاء هر واحد افزایش D_3 ($D_3=1$) است وقتی که D_2 ثابت نگه داشته شود. ($D_2=0$). به عبارت دیگر با رفتن به سمت گروهی که جذابیت تکلیف آن متوسـط اسـت ($D_3=1$ ،$D_2=0$) به طور میانگین ۲ واحد در نمره ی انگیزش، افزایش حاصل می شود در مقایسه با گروه مرجع (۰،۰) :۴=۲+۲ .



شکل ۷-۷ بیان هندسی تحلیل واریانس به عنوان یک مدل رگرسیون دامی

۷-۵ اهداف روش تحلیل واریانس

در تحلیل واریانس بیشتر تأکید بر آزمون است تا توصیف کردن. اگر مثال انگیزش را در نظر بگیریم و به دو متغیر مستقل X_1 و X_2 اکتفا کنیم، این شیوه دارای اهداف زیر است :

۱- الف. آیا بین نمرات میانگین انگیزش گروهی که پاداش مادی دریافت می‌کنند و گروهی که دریافت نمی‌کنند، بدون توجه به جذابیت تکلیف تفاوتی وجود دارد؟ این موضـوع به انجام یک آزمون ساده t در طرح یک طرفه باز می‌گردد.

۲- ب. آیا بین دو گروه مذکور در صـورت کنترل متغیر جذابیت تکلیف، تفاوت معناداری وجود دارد؟ در این جا یک طرح دو طرفه را باید اجرا کنیم.

۳- الف. آیا بین نمرات انگیزش سـه گروه جذابیت تکلیف، بدون توجه به متغیر پاداش‌های خارجی تفاوت معناداری وجود دارد؟ این کار با انجام یک آزمون F برای معناداری تفاوت بین سه گروه در یک طرح یک طرفه صورت می‌گیرد.

۴- ب. آیا بین نمرات انگیزش سه گروه جذابیت تکلیف وقتی که از لحاظ متغیر پاداش‌های خارجی کنترل شود، تفاوت معناداری وجود دارد؟ در این جا همان سؤال بایستی در یک طرح دوطرفه به کار گرفته شود.

۵- آیا اثر تعاملی معناداری وجود دارد؟ به عبارت دیگر، آیا مابین میانگین نمرات انگیزش سه گروه جذابیت تکلیف برای گروهی که پول دریافت کرده و گروهی که پول دریافت نکرده است، تفاوت معناداری وجود دارد؟ این کار به وسیله یک آزمون F تعاملی در یک طرح دو طرفه انجام می‌شود.

۶- آیا مدل درست انتخاب شده، مدلی است که با واقعیت بهترین انطباق را دارد؟ آیا هر سه اثر فوق، شامل اثر X_1، اثر X_2 و اثر تعاملی آن‌ها بایستی در مدل قرار گیرند؟ از نقطه نظر رویکرد رگرسیون دامی این هدف از طریق یافتن یک تابع خطی شامل متغیر وابسته y و پیش‌بینی‌کننده‌هایی با کد دامی X_1 و X_2 همراه با جملات ضربی آن‌ها (D_1 تا D_5) به عنوان متغیر مستقل انجام می شود. یک آزمون F برای این مدل کلی نشان می‌دهد که آیا یک مدل بسنده انتخاب شده است یا این که باید تجدید نظر شود.

۶- ۷ محاسبات تحلیل واریانس (آنوای) یک طرفه: رویکرد سنتی

ابتدا از اهداف ۱ (الف) و ۲ (الف) مربوط به طرح یک طرفه شروع می‌کنیم. از آنجا که می‌توان یک آزمون ساده t را برای پاسخ به پرسش ۱ (الف) اجرا کرد، ابتدا محاسبات را برای پرسش ۲ (الف) نشان می‌دهیم. ما به این موضوع می‌پردازیم که آیا تفاوت معناداری بین میانگین نمرات انگیزش سه گروه جذابیت تکلیف وجود دارد؟ برای این که موضوع روشن‌تر بیان شود جدول داده‌ها را طوری بازنویسی می‌کنیم که گروه‌ها در سه ستون جداگانه ظاهر شوند (جدول ۲-۷).

فرض صفر گویای آن است که گروه‌های مذکور سه نمونه تصادفی از یک جمعیت مشابه هستند، به طوری‌که میانگین‌های آن‌ها در توزیع نمونه‌گیری یکسانی قرار گرفته و لذا فقط تفاوت‌های جزئی و ناشی از تصادف بین آن‌ها وجود دارد:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$$

جدول ۲-۷

گروه۱	گروه ۲	گروه۳
۳	۴	۶
۲	۳	۴
۲	۳	۳
۱	۲	۳
۴	۷	۹
۲	۵	۹
۱	۴	۸
۱	۴	۶

$\bar{Y}_{.۱} = ۶$	$\bar{Y}_{.۲} = ۴$	$\bar{Y}_{.۳} = ۲$

برای آزمون این فرض صفر، دو نمره تغییرات نمرات انگیزش مورد مقایسه قرار می‌گیرد: تغییرات بین گروهی مابین میانگین نمرات گروه‌ها، و تغییرات درون‌گروهی نمرات افراد در هر گروه. این مقایسه قابل انجام است، زیرا هر دو تغییرات، حاصل، یک بخش افزایشی تغییرات کل نمرات انگیزش هستند:

$$SST = SSB + SSW$$

این شیوه از دو برآورد جداگانه واریانس جمعیت بیان شده در فرض صفر تشکیل می‌شود. برآورد اول $\hat{\delta}_w^۲$ بر اساس تغییرات درون گروهی است. برآورد دوم $\hat{\delta}_b^۲$، بر مبنای تغییرات بین گروهی ا ست. هر کدام از این برآوردها شامل سه مرحله ا ست: (الف) تغییرات = مجموعه مجذورات، (ب) درجه آزادی، (ج) برآورد واریانس جمعیت. سپس نسبت این برآوردها محاسبه می‌شود. این نسبت F ا ست که در توزیع نظری F قرار خواهد گرفت تا با توجه به فرض صفر به یک نتیجه‌گیری برسند.

۱- اولین برآورد واریانس جمعیت به طریقه درون‌گروهی:

(الف) تغییرات درون گروهی SSW

تغییر نمرات افراد در مقایسه با میانگین گروه خود برای هر گروه به طور جداگانه محاسبه می‌شود:

$$\sum_i (y_{ij} - \bar{y}_{.۱})^۲ = (۶-۶)^۲ + (۴-۶)^۲ + \ldots = ۴۴$$

$$\sum_i (y_{ij} - \bar{y}_{.۲})^۲ = (۴-۴)^۲ + (۳-۴)^۲ + \ldots = ۱۶$$

$$\sum_i (y_{ij} - \bar{y}_{.۳})^۲ = (۳-۲)^۲ + (۲-۲)^۲ + \ldots = ۸$$

مجموع سه تغییر درون‌گروهی را حساب کرده و SSW را به دست می‌آوریم:

$$\sum_j \sum_i (y_{ij} - \bar{y}_{.j})^۲ = (۴۴+۱۶+۸) = ۶۸$$

(ب) درجات آزادی d_w

چنانچه میانگین (یا جمع کل) در یک مجموعه n_j از نمره‌ها ثابت باشد، در این صورت تعداد ۱- n_j نمره از تغییر آزاد هستند. تنها آخرین نمره معین شده است، زیرا برابر با جمع کل منهای جمع نمرات دیگر است. در مثال ما، سه گروه هشت نفری وجود دارد. در هر گروه میانگین ثابت است، طوری‌که ۱-۸ نمره از تغییر آزاد هستند. بنابراین تعداد درجات آزادی برابر است با: ۲۱=(۱-۸)۳.

(ج) واریانس جمعیت، برآورد شده از طریق درون گروهی

با تقسیم تغییرات درون‌گروهی SSW بر تعداد درجات آزادی d_w، MSW (میانگین مجموعه مجذورات درون گروهی) را به دست می‌آوریم. این نخستین برآورد واریانس جمعیت است (^ = برآورد) : $\hat{\delta}_w^{۲} = SS_w / d_w = ۶۸ \div ۲۱ = ۳.۲۴$.

۲- برآورد دوم واریانس جمعیت از طریق بین گروهی

(الف) تغییرات بین گروهی SSB

سه میانگین گروهی عبارتند از: ۶، ۴ و ۲. میانگین کل یعنی جمع ۲۴ نمره تقسیم بر ۲۴، از طریق محاسبه میانگین سه میانگین گروهی هم قابل محاسبه است که نشان می‌دهد اندازه گروه‌ها برابر است: $(۶+۴+۲) \div ۳ = ۴$.

تغییرات میانگین‌های سه گروه در مقایسه با میانگین کل را محاسبه می‌کنیم:

$$\sum_j (\bar{y}_j - \bar{y}_{..})^{۲} = (۶-۴)^{۲} + (۴-۴)^{۲} + (۲-۴)^{۲} = ۸$$

البته این تغییرات عمدتاً کوچک هستند، به خاطر این که همچون یک توزیع نمونه‌گیری، میانگین‌ها به لحاظ تعریف بسیار به هم نزدیک‌ترند تا نمرات افراد. با ضرب تغییرات محاسبه شده در اندازه گروه (در اینجا n_j =۸)، به یک برآورد نسبتاً خوبی از واریانس جمعیت به واسطه شیوه بین‌گروهی دست می‌یابیم:

$$SS_B = \sum_j nj(\bar{y}_j - \bar{y}_{..})^{۲} = ۸ \times ۸ = ۶۴$$

نتایج حاصله تصدیق می کند که :

SST=SSB +SSw:۱۳۲=۶۴+۶۸

ب) درجات آزادی d_B

سه میانگین گروهی در این محاسبات دخالت دارند. ما یک درجه آزادی را از دست می‌دهیم، چون میانگین کل ثابت است. بنابراین d_B=۳-۱=۲ .

ج) واریانس جمعیت، برآورد شده از طریق بین‌گروهی

با تقسیم تغییرات بین گروهیSSB بر تعداد درجات آزادی d_B میزان MSB (میانگین مجموع مجذورات بین‌گروهی) را به دست می‌آوریم. این برآورد ثانویه واریانس جمعیت است:

$$\hat{\delta}_b^{۲} = SS_B / d_B = ۶۴ \div ۲ = ۳۲$$

۳- اجرای آزمون F

نسـبت دو برآورد واریانس جمعیت، کسـر F را به دسـت می‌دهد، که صـورت آن شـامل برآورد درون‌گروهی و مخرج آن شامل برآورد بین‌گروهی است: $F =$ ۳۲/۳ ÷ ۳/۲۴ = ۹/۸۸.

اکنون با توجه به فرض صفر می‌توانیم به یک نتیجه‌گیری بر سیم. با در ست فرض کردن فرض صـفر، توزیع نمونه‌گیری نسـبت‌های F از یک توزیع نظری F تبعیت می‌کند که در هر کتاب آماری جداولی برای آن یافت می‌شـود. برای یک میزان احتمال از قبل در نظر گرفته شـده (مثلاً ۰/۹۵ = $1-\alpha$) و تعداد درجات آزادی در صـورت و مخرج (که در این جا ۲ و ۲۱ می‌باشـد) این جداول مقادیر بحرانی F^* را نشان دهند. به بیان روشن‌تر، اگر نسبت F در مثال ما از میزان F^* در جدول بزرگتر باشد، فرض صفر رد می‌شود. در مثال ما ۰/۰۵ = α در نظر گرفته شده و با d_B=۲ و d_W=۲۱ به میزان بحرانی ۳/۴۷ = F^* در جدول بر می‌خوریم. نسـبت F در این مثال F=۹/۸۸، از F جدول خیلی بیشتر است. از این رو می‌توانیم نتیجه‌گیری کنیم که بین جذابیت تکلیف و انگیزش پیشرفت رابطه معناداری وجود دارد. میانگین نمرات انگیزش سـه گروه جذابیت تکلیف به طور معناداری با هم متفاوت است.

در نتایج حاصـل از کامپیوتر مقدار F^* بحرانی ارائه نمی‌شـود، بلکه این عبارت را می یابیم: SIGNIF OF F=۰/۰۰۱. این سطح معناداری تجربی است که میزان احتمال خطا را نشان می‌دهد، یعنی احتمال یافتن نسـبت F معادل ۹/۸۸ یا حتی مقدار افراطی‌تری تحت فرض H_0 اگر این احتمال خیلی کم باشد (کمتر از ۰/۰۵ = α) آنگاه می‌توان فرض صفر را رد کرد.

در پایان این مبحث قابل ذکر اسـت که این آزمون F، تنها وجود تفاوت معنادار بین سه میانگین یاد شده را تصدیق می‌کند. معنایش این نیست که بین هر جفت از این میانگین‌ها تفاوت معناداری وجود دارد. این کار از طریق «آزمون‌های مقابله» جداگانه (آزمون‌های چند مقایسـه‌ای هم گفته می‌شوند) انجام می‌شود که در آن‌ها آزمون محافظه کارانه‌تر است (با αی کوچکتر).

۷-۷ جدول اختصاری آنوا (تحلیل واریانس)

نتایج آزمون F فوق را می‌توان به‌صـورت خلاصـه در یک جدول اختصـاری آنوا ارائه کرد که در نتایج کامپیوتری نیز به‌کار می‌رود. (جدول ۳-۷).

جدول ۳-۷ تحلیل واریانس

	SS	df	MS	F
بین گروهی	۶۴	۲	۳۲	
درون گروهی	۶۸	۲۱	۳/۲۴	۹/۸۸
کل	۱۳۲	۲۳		

۷-۸ آزمون t به عنوان شکل ساده آزمون F

برای تحلیل رابطه بین پاداش‌های خارجی و انگیزش درونی یک آزمون ساده t را می توان اجرا نمود (هدف ۱(الف)).

البته شیوه قبلی آزمون F را هم می توانیم دنبال کنیم. این کار را به اختصار انجام خواهیم داد. در ابتدا ماتریس داده‌ها را از نو طوری مرتب می‌کنیم که در گروه مورد نظر در ستون‌های جداگانه قرار گیرند (جدول ۴-۷).

جدول ۴-۷

گروه ۲	گروه ۱
۹	۶
۹	۴
۸	۳
۶	۳
۷	۴
۵	۳
۴	۳
۴	۲
۴	۳
۲	۲
۱	۲
۱	۱
$\bar{Y}_{.۲} = ۵$	$\bar{Y}_{.۱} = ۳$

۱- نخستین برآورد واریانس جمعیت از طریق درون گروهی:

(الف) تغییرات درون گروهی SSW:

$$SS_W = (6-3)^2 + (4-3)^2 + ... + (9-5)^2 + (9-5)^2 : SS_w + ... = 108$$

(ب) درجات آزادی: $d_w = ۲(۱۲-۱) = ۲۲$

(ج) واریانس جمعیت، برآورد شده از طریق درون‌گروهی: $SS_w / d_w = ۱۰۸ \div ۲۲ = ۴/۹۱$

۲- برآورد واریانس جمعیت، از طریق بین گروهی:

(الف) تغییرات بین‌گروهی SSB : $SS_B = ۱۲[(۳-۴)^۲ + (۵-۴)^۲] = ۲۴ : SS_B$

(ب) درجات آزادی: $d_b = ۲ - ۱ = ۱$

(ج) واریانس جمعیت برآورد شده از طریق بین گروهی: $SS_B / d_B = ۲۴ \div ۱ = ۲۴$.

۳- اجرای آزمون F

در یافتیم که $F = ۲۴ \div ۴.۹۱ = ۴.۸۹$. در جدول F برای $\alpha = ۰/۰۵$ و $d_w = ۲۲$، به مقدار بحرانی $F^* = ۴/۳۰$ بر می‌خوریم. نسبت F محاسبه شده در نمونه فوق کمی از این مقدار بزرگتر است. بنابراین نمرات انگیزش گروهی که پول دریافت می‌کنند و گروهی که پول دریافت نمی‌کنند، به طور معناداری متفاوت است.

چنانچه در این مثال یک **آزمون t** را برای ۲۲ = (۱-۱۲)+(۱-۱۲) درجه آزادی به اجرا درآوریم، به این نمره t دست می‌یابیم (فرمول فصل ۴): ۲/۲۱ = [$^{۱/۲}$(۱۲ ÷ ۴/۹۱ + ۱۲ ÷ ۴/۹۱)] ÷ (۳-۵)= t. در جدول t برای $\alpha = ۰/۰۵$ و d_f مقدار بحرانی $t^* = ۲/۰۴۷$ آزمون دو دامنه را پیدا می‌کنیم. می‌بینیم که $t = \sqrt{F}$ و $t^* = \sqrt{F^*}$ است. بدین ترتیب مجذور یک متغیر که به صورت t با n-۲ درجه آزادی توزیع شده همچنین به شکل F با ۱ و n-۲ درجه آزادی می‌تواند توزیع شود. نتیجه می‌گیریم که آزمون t مربوط به تفاوت بین دو گروه، با آزمون F یکسان است. همچنین می‌توانیم در این جداول بررسی کنیم که مقادیر F^* برای d_B=۱ معادل مجذور مقادیر t^* ناظر بر آن است.

توجه داشته باشید که این تناظر آزمون t و آزمون F تنها برای موارد دو گروهی است، یعنی d_B=۱ وقتی‌که از دو گروه بیشتر شد، امکان اجرای چند آزمون t برای مقایسه‌های چندگانه جفت میانگین‌ها فراهم خواهد بود. اما چنین روشی مجاز نیست، به دو دلیل، اول اینکه وقتی‌که آزمون‌های مکرر را اجرا می‌کنیم در واقع بر شانس تکیه کرده‌ایم، ثانیاً آزمون‌های مکرر مقابله، از یکدیگر مستقل نیستند.

۹-۷ محاسبات در تحلیل واریانس (آنوا) دوطرفه: رویکرد سنتی

برای پاسخ به سؤالات ۱ (الف)، ۲(ب)، ۳ و ۴ نیاز به تجزیه و تحلیل پیچیده‌تر تغییرات کل (SST) نمرات انگیزش می‌باشد. برای این منظور در طرح دو طرفه ما با سه اثر محتمل سر و کار داریم: اثر پاداش‌های خارجی ($X_۱$)، اثر جذابیت تکلیف ($X_۲$) و اثر تعاملی. تجزیه آن به صورت زیر است:

$$SST = SSB_{(x_1)} + SSB_{(x_2)} + SSI + SSW$$

این بار ما جدول داده‌ها را به شکل جدول تقاطعی ۳×۲ با چهار نمره انگیزش در هر خانه مرتب می‌کنیم (جدول ۵-۷).

۲۴ نمره منفرد Y_{ijk} وجود دارد. دو ردیف (r=۲) برای دو گروه پاداش‌های خارجی، سه ستون (c=۳) برای سه گروه جذابیت تکلیف، و k نشانه هر یک از این گروه‌ها است. در هر ترکیب پاداش‌های خارجی و جذابیت تکلیف n=۴ نمره منفرد وجود دارد. فرد i یکی از آن هاست. چهار نوع میانگین داریم:

$\bar{Y}_{.j}$ برای هر گروه پاداش بدون توجه به جذابیت تکلیف،

$\bar{Y}_{..k}$ برای هر گروه جذابیت تکلیف بدون توجه به پاداش،

$\bar{Y}_{jk}$ برای هر گروه ترکیب پاداش‌های خارجی و جذابیت تکلیف،

$\bar{Y}_{...}$ برای میانگین کل.

جدول ۵-۷

	جذابیت تکلیف			
پاداش خارجی	گروه ۱	گروه ۲	گروه ۳	
گروه ۱	۶ $\bar{Y}_{.۱۱}=۴$ ۴ ۳ ۳	۴ $\bar{Y}_{.۱۲}=۳$ ۳ ۳ ۲	۳ $\bar{Y}_{.۱۳}=۲$ ۲ ۲ ۱	$\bar{Y}_{.1.}=3$
گروه ۲	۹ $\bar{Y}_{.۲۱}=۸$ ۹ ۸ ۶	۷ $\bar{Y}_{.۲۲}=۵$ ۵ ۴ ۴	۴ $\bar{Y}_{.۲۳}=۲$ ۲ ۱ ۱	$\bar{Y}_{.2.}=5$
	$\bar{Y}_{..۱}=۶$	$\bar{Y}_{..۲}=۴$	$\bar{Y}_{..۳}=۲$	$\bar{Y}_{...}=۴$

خواننده ملاحظه می‌کند که ما روش نشانه‌گذاری نقطه‌ای را به کار برده‌ایم. یک نقطه به معنای آن ا ست که یک جمع از واحدهای مورد سؤال (افراد i، ردیف‌های j یا ستون‌های k) ت شکیل شده است.

اکنون می‌توانیم به سراغ **اهداف ۱(الف)، ۲(ب) و ۳** برویم:

۱(الف). آیا در مجموع، تفاوت‌های معناداری بین r=۲ ردیف میانگین‌ها در عرض ستون‌ها وجود دارد؟ به عبارت دیگر آیا بین پاداش‌های خارجی و انگیزش پیشـــرفت با کنترل جذابیت تکلیف رابطه معناداری وجود دارد؟

۲ (ب). آیا در مجموع تفاوت معناداری بین c=۳ میانگین ســـتونی وجود دارد؟ به بیان دیگر، آیا بین جذابیت تکلیف و انگیزش پیشرفت با کنترل پاداش‌های خارجی رابطه‌ای وجود دارد ؟

۳. آیا اثر تعاملی معناداری وجود دارد؟

برای هر یک از این سه آزمون شیوه‌ای م شابه آنچه در تحلیل یک طرفه واریانس اعمال شد را دنبال خواهیم کرد: واریانس جمعیت به دو طریق برآورد می شـــود، از طریق بین‌گروهی و از طریق

درون‌گروهی، و نسبت این دو برآورد مقدار نسبت F را به دست می‌دهد، که برای آزمون این که آیا بین میانگین‌ها تفاوت معناداری وجود دارد، به‌کار می‌رود.

البته برآورد **واریانس جمعیت از روی تغییرات درون‌گروهی** با طرح یکطرفه فرق می‌کند. در اینجا شش خانه هر یک متشکل از چهار نفر در یک جدول تقاطعی ۳×۲ وجود دارد. از آنجا که این برآورد واریانس جمعیت درون‌گروهی برای هر یک از سه آزمون یکسان است، ابتدا به محاسبه جداگانه آن می‌پردازیم:

(الف) تغییرات درون گروهی SSW

در هر یک از شش گروه، ما تغییر نمرات منفرد را در مقایسه با میانگین گروه محاسبه می‌کنیم. مجموع این شش تغییر درون‌گروهی را حساب کرده آنگاه SSW را به دست می‌آوریم:

$$SSW = (۶-۴)^۲ + (۴-۴)^۲ + (۳-۴)^۲ + (۳-۴)^۲$$
$$+ (۴-۳)^۲ + (۳-۳)^۲ + (۳-۳)^۲ + (۲-۳)^۲$$
$$+ (۳-۲)^۲ + (۲-۲)^۲ + (۲-۲)^۲ + (۱-۲)^۲$$
$$+ (۹-۸)^۲ + (۹-۸)^۲ + (۸-۸)^۲ + (۶-۸)^۲$$
$$+ (۷-۵)^۲ + (۵-۵)^۲ + (۴-۵)^۲ + (۴-۵)^۲$$
$$+ (۴-۲)^۲ + (۲-۲)^۲ + (۱-۲)^۲ + (۱-۲)^۲ = ۲۸$$

(ب) درجات آزادی d_w

تعداد ۶ = ۳ × ۲ گروه هر یک متشکل از چهار نفر مشمول این محاسبات می‌شوند. در هر گروه تعداد درجات آزادی برابر است با ۳=۱-۴ چون میانگین گروهی تعیین شده است. در نتیجه تعداد کل درجات آزادی برابر است با : $d_w = rc(n-1) = ۲×۳(۴-۱) = ۱۸$.

(ج) واریانس جمعیت برآورد شده از طریق درون گروهی

$$SSW / d_w = MSW = ۲۸ \div ۱۸ = ۱.۵۵۶$$

۱(ب) آیا بین میانگین ردیف‌ها تفاوت معناداری وجود دارد؟

۱- برآورد اولیه واریانس جمعیت از طریق درون گروهی :

این واریانس را کمی قبل محاسبه کردیم: MSW =۱/۵۵۶ .

۲- برآورد ثانویه واریانس جمعیت به روش بین گروهی:

این واریانس همان چیزی است که در طرح یکطرفه محاسبه شد و در بخش آزمون t به عنوان شکل ساده آزمون F اجرا شد. نتیجه این است: $MSB = SSB / d_B = ۲۴ \div ۱ = ۲۴$

۳-اجرای آزمون F

این آزمون مثل طرح یکطرفه نیست، زیرا در محاسبه مخرج MSW کسر F به جای دو گروه، با شش گروه سر و کار دارد. دریافتیم که $F = ۲۴/۱.۵۵۶ = ۱۵.۴۲$. در جدول F برای α=۰/۰۵ و درجات آزادی یک و ۱۸، مقدار بحرانی $F^* =$ ۴/۴۱ را مشاهده می‌کنیم. از آنجا که F=۱۵/۴۲ بزرگتر از مقدار جدول است، می‌توانیم نتیجه بگیریم که میانگین نمرات انگیزش گروهی که پول دریافت کرده‌اند و گروهی که دریافت نکرده‌اند تفاوت معناداری با یکدیگر دارد، حتی پس از این که جذابیت تکلیف را کنترل کنیم.

۲(ب)   آیا بین میانگین ستون‌ها تفاوت معناداری وجود دارد؟

۱- برآورد اولیه واریانس جمعیت از طریق درون گروهی

این مقدار در بالا محاسبه شد: MSW =۱/۵۵۶ .

۲- برآورد ثانویه واریانس جمعیت از طریق بین گروهی

این محاسبات مشابه طرح یک طرفه بوده و در بخش «محاسبات تحلیل واریانس یکطرفه: رویکرد سنتی» اجرا گردید: $MSB = SSB / d_B =$ ۶۴ ÷ ۲ = ۳۲ .

۳- اجرای آزمون F

باز هم دریافتیم که این آزمون مشابه طرح یک طرفه نیست، زیرا در این جا به جای سه گروه جذابیت تکلیف، شش خانه جدول مشمول محاسبات مخرج کسر F می شوند. ملاحظه کردیم که: ۲۰/۵۷ = ۱/۵۵۶ ÷ ۳۲ $= F = MSB / MSW$. در جدول F برای α=۰/۰۵ و درجات آزادی دو و ۱۸، مقدار بحرانی ۳/۵۵ = F^* را می‌خوانیم. از آنجا که F=۲۰/۵۷ خیلی بیشتر است، نتیجه می‌گیریم که میانگین‌های انگیزش سه گروه جذابیت تکلیف به طور معناداری با یکدیگر متفاوت هستند، حتی بعد از این که پاداش‌های خارجی کنترل شوند.

۳- آیا اثر تعاملی معناداری وجود دارد؟

۱- برآورد اولیه واریانس جمعیت از طریق درون گروهی

این واریانس قبلاً محاسبه شد: MSW =۱/۵۵ .

۲- برآورد ثانویه واریانس جمعیت از طریق تعاملی

(الف) تغییرات تعاملی SSI

همان‌گونه که اثر تعاملی را می‌توان به عنوان اختلاف بین تفاوت‌های میانگین‌ها در نظر گرفت، تغییرات تعاملی نیز به همین شکل قابل اندازه گیری هستند. اگر به جدول تقاطعی ۳×۲ نگاه کنیم، برای هر یک از سه ستون بین گروهی که پول دریافت نکرده‌اند، اختلافی را مشاهده می‌کنیم: $\bar{Y}_{.۲۱}-\bar{Y}_{.۱۲}$, $\bar{Y}_{.۲۲}-\bar{Y}_{.۱۳}$ و $\bar{Y}_{.۲۳}-\bar{Y}_{.۱۳}$. این تفاوت‌ها به ترتیب بدین‌گونه است : ۴=۴-۸ ، ۲=۳-۵ و ۰=۲-۲. تفاوت دو گروه پاداش در حاشیه جدول برابر است با : $\bar{Y}_{۲.}-\bar{Y}_{۱.}=۵-۳=۲$. تغییرات تعاملی را سپس می‌توان با مقایسه تفاوت بین سه میانگین ردیفی با تفاوت‌های حاشیه‌ای بین میانگین‌های ردیفی محاسبه کرد. یک شیوه محاسبه متداول‌تر که به نتایج مشابهی می‌انجامد به این شرح است. به جای محاسبه تفاوت گروهی که پول دریافت کرده و گروهی که دریافت نکرده‌اند در هر ستون (مثلاً ۴=۴-۸) تفاوت گروه پول دریافت کرده و میانگین حاشیه ستون (۲=۶-۸) را محاسبه می‌کنیم. این کار اطلاعات مشابهی را به دست می‌دهد، زیرا اگر دو گروه تفاوتی نداشته باشند از لحاظ میانگین ستونی فرقی ندارند. در حاشیه جدول، عمل مشابهی را انجام می‌دهیم. به جای محاسبه تفاوت در میانگین ردیفی (۲=۳-۵) تمام این ها از فرمول حاصل می‌شود: $(\bar{Y}_{.jk}-Y_{..k})-(\bar{Y}_{.j.}-\bar{Y}_{...})$. این اختلاف تفاوت در ستون و تفاوت در کل جدول را برای هر شش خانه جدول حساب می‌کنیم. مجموع این شش تفاضل اختلافات به دست می‌آید. در اینجا نیز بایستی اندازه گروه ($n_{jk}=۴$) را در حاصل جمع، ضرب کنیم تا تغییرات تعاملی حاصل شود:

$$
\begin{aligned}
SSI &= \sum\sum n_{Jk}[(\bar{Y}_{.Jk}-\bar{Y}_{..k})-(\bar{Y}_{.j.}-\bar{Y}_{...})]^{۲} \\
&= \Sigma\{[(۴-۶)-(۳-۴)^{۲}+[(۳-۴)-(۳-۴)]^{۲} \\
&+[(۲-۲)-(۳-۴)^{۲}+[(۸-۶)-(۵-۴)]^{۲} \\
&+[(۵-۴)-(۵-۴)^{۲}+[(۲-۲)-(۵-۴)]^{۲}]=۴\times۴=۱۶
\end{aligned}
$$

(ب) درجات آزادی d_{I}

محاسبات فوق تعداد $r\times c=2\times3=6$ میانگین خانه های جدول را شامل می‌شود. در هر ستون یک درجه آزادی را در میانگین ستونی از دست می‌دهیم. در هر ردیف نیز یک درجه آزادی را در میانگین ردیفی از دست می‌دهیم. بنابراین تعداد درجات آزادی برابر است با:

$$d_I=(r-۱)(c-۱)=(۲-۱)(۳-۱)=۲$$

(ج) واریانس جمعیت، برآورد شده از طریق تعامل

این واریانس از طریق تقسیم تغییرات تعاملی SSI بر تعداد درجات آزادی d_{I} به دست می‌آید :

$MST=SSI/d_I=۱۶\div۲=۸$.

۳- اجرای آزمون F

در یافتیم که $F = MSI / MSW = ۸ \div ۱/۵۵۶$ = ۵/۱۴. در جدول F مقدار بحرانی α=۰/۰۵ و برای دو و ۱۸ درجه آزادی $F^* =$ ۳/۵۵ می‌باشد. از آنجا که در نمونه مورد بررسی F=۵/۱۴ بزرگتر است، نتیجه می‌گیریم که یک اثر تعاملی معنادار پاداش‌های خارجی و جذابیت تکلیف بر انگیزش درونی وجود دارد. این مطلب را بیشتر شرح می‌دهیم. اگر به جدول تقاطعی نگاه کنیم می‌بینیم که یک اثر جذابیت تکلیف وجود دارد: همچنان‌که تکلیف خسته‌کننده‌تر می‌شود، میانگین انگیزش کاهش می‌یابد، چه در حاشیه جدول (۲، ۴، ۶) و چه در درون جدول (۲، ۳، ۴) و (۲، ۵ ، ۸). البته این کاهش در گروهی که پول دریافت نکرده‌اند از شدت کمتری برخوردار است (۲، ۳، ۴) تا در گروهی که پول دریافت کرده‌اند (۲، ۵، ۸). این مکانیزم که بر مبنای آن رابطه بین جذّابیت تکلیف و انگیزش در گروه پاداش ۱ ضعیف‌تر از گروه پاداش ۲ است، اثر تعاملی نامیده می شود و معنادار هم بوده است.

در این بخش رویکرد سنتی را مورد بحث قرار دادیم. خوانندگان با دقت توجه خواهند نمود که $SSB(x_1) + SSB(x_2) + SSI + SSW =$ ۲۴+۶۴+۱۶+۲۸=۱۳۲. این SST است.

۱۰-۷ رویکرد رگرسیون تصنّعی

تا به حال به طور مکرر بیان کردیم که مدل رگر سیون و مدل تحلیل واریانس به لحاظ شکلی معادل هم هستند، با درک این که کدگذاری تصنعی در دومی به کار گرفته شده است. به منظور رسیدن به یک تجسم اولیه از موضوع، اجازه دهید در ابتدا به بررسی اثر پاداش‌های خارجی ($X_۱$) بر انگیزش درونی (Y) اکتفا کنیم و ماتریس داده‌های $X_۱ - Y$ را از نو بنویسیم. متغیر $X_۱$ توسط $D_۱$ جایگزین شده و نمرات ۰ و ۱ به جای ۱و ۲ اختصاص داده می‌شوند (به ترتیب برای گروهی که پول دریافت نکرده و گروهی که پول دریافت کرده‌اند). این داده‌ها در جدول ۶-۷ نشان داده شده‌اند.

اگر این ماتریس را با کدهای دامی برای $D_۱$ به کامپیوتر بدهیم و یک تحلیل رگرسیون بخواهیم، همان نتایجی را به ما می‌دهد که هنگام ارائه ماتریس اصلی با کدهای ۱و ۲ برای $X_۱$ و یک تحلیل واریانس کلاسیک بخواهیم. اکنون این مطلب را به طور مقدماتی توضیح می‌دهیم و مشاهده خواهیم کرد که تحلیل رگرسیون و تحلیل واریانس دو شق مختلف از یک مدل خطی هستند.

برای رویکرد تحلیل واریانس به بخش قبلی با عنوان «آزمونt شکل ساده آزمون F» رجوع می‌کنیم. میانگین انگیزش گروهی که پول دریافت کرده‌اند ۵ و میانگین انگیزش گروهی که پول دریافت نکرده‌اند ۳ بود. تفاوت بین این دو میانگین (۲=۳-۵) معنادار بود. نسبت F برابر ۴/۸۹ به دست آمد که از مقدار بحرانی $F^* =$ ۴/۳۰ بزرگتر بود (α=۰/۰۵ و $d_B =$ ۱ و d_W=۲۲).

با در نظر گرفتن این نتایج، تحلیل رگرسیون را با استفاده از کدهای دامی اجرا می‌کنیم. برای کوتاه کردن محاسبات، از روش ماتریس استفاده می‌کنیم. ابتدا تابع رگرسیون را محاسبه کرده، بعد از آن آزمون F را اجرا می‌کنیم. در این جا از شیوه مقایسه مدل استفاده می‌شود.

(الف) محاسبه تابع رگرسیون

ضرایب رگرسیون b. و b_{y1} با هم بردار $\mathbf{b}$ را تشکیل می‌دهند که از $\mathbf{b} = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'y}$ مشتق شده است. در این فرمول $\mathbf{y}$ ستون (۱×۲۴) بردار نمرات Y است و $\mathbf{X}$ ماتریس ۲×۲۴ افزوده[1]، که نه تنها شامل نمرات D_1 بلکه همچنین یک ستون اولیه با نمرات ۱ (ماتریس افزوده) است. نخست به محاسبه حاصل‌ضرب ماتریس فرانهاده $\mathbf{X'}$ و $\mathbf{X}$ و نیز حاصل‌ضرب $\mathbf{X'}$ و $\mathbf{y}$ می‌پردازیم:

جدول ۶-۷

Y	D_1
۶	۰
۴	۰
۳	۰
۳	۰
۴	۰
۳	۰
۳	۰
۲	۰
۳	۰
۲	۰
۲	۰
۱	۰
۹	۱
۹	۱
۸	۱
۶	۱
۷	۱
۵	۱
۴	۱
۴	۱
۴	۱
۲	۱
۱	۱
۱	۱

1-Augmented Matrix

$$\mathbf{X'X} = \begin{bmatrix} 111...1 \\ 000...1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 00 \\ 00 \\ 00 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2412 \\ 1212 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X'y} = \begin{bmatrix} 1\ 1\ 1\ ...1 \\ 0\ \ 0\ \ 0...1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 69 \\ 60 \end{bmatrix}$$

معکوس ماتریس $\mathbf{X'X}$ با روش‌های استاندارد مشخص می‌شود.

$$\mathbf{(X'X)^{-1}} = \frac{\begin{bmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 24 \end{bmatrix}}{144} = \begin{bmatrix} 1.12 & -1.12 \\ -1.12 & 1.6 \end{bmatrix}$$

حاصل‌ضرب $\mathbf{(X'X)^{-1}}$ و $\mathbf{(X'y)}$ بردار $\mathbf{b}$ است:

$$\mathbf{b} = \mathbf{(X'X)^{-1}(X'y)} = \begin{bmatrix} 1.12 & -1.12 \\ -1.12 & 1.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 96 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

بدین ترتیب تابع رگرسیون $\hat{Y} = b_0 + b_{y1} D_1$ می‌شود: $\hat{Y} = 3 + 2D_1$. در این معادله مقدار ثابت ۳، میانگین گروهی است که پول دریافت نکرده است (با نمرات ٥). ضریب رگرسیون ۲ افزایش میانگین نمره انگیزش به ازاء یک واحد افزایش D_1 است. از آنجا که تغییر از نمره ٥ به نمره ۱ در متغیر D_1، در واقع یک واحد افزایش می‌باشد، میانگین انگیزش گروهی که پول دریافت کرده‌اند (با نمره ۱) از گروهی که پول دریافت نکرده‌اند ۲ واحد بالاتر قرار می‌گیرد: ٥=۲+۳. این مطلب قبلاً در بخش «رویکرد هندسی» توضیح داده شد.

ب) آزمون F براساس روش مقایسه مدل

در رویکرد رگر سیون، معناداری مدل با تمایز قائل شدن بین مدل کامل و مدل اخت صاری و با انجام آزمون F صورت می‌گیرد. در این مثال ساده، مدل کامل، تنها شامل یک متغیر م ستقل $D_۱$ ا ست. واریانس تبیین‌شده (رجوع کنید به نتایج کامپیوتری) ۰/۱۸۲ به دست آمده است. در مدل اختصاری، $D_۱$ حضور ندارد. در نتیجه، واریانس تبیین شده در این مدل، معادل ۰ ا ست، زیرا چیزی برای تبیین وجود ندارد.

بنابراین، مدل کامل عبارت است از: $R_f^۲ = ۰/۱۸۲$ با $y = b_۰ + b_{y۱}D_{۱+e}$.

مدل اختصاری عبارت است از : $R^۲ = ۰$ با $y = b_۰ + e$.

درجات آزادی به ترتیب عبارتند از :$d_f = ۲$ و $d_r = ۲۳$.

آزمون F مدل با $D_۱$ نتایج زیر را به دست می‌دهد:

$$F = \frac{(R_F^2 - R_r^2)(d_r - d_f)}{(1-R_f^2)/df} = \frac{(0.182-0)/(23-22)}{(1-0.182)/22} = ۴/۸۹$$

این دقیقاً همان نتایجی اســت که در بخش «آزمونt شــکل ســاده آزمون F» به دســت آوردیم. انطباق رویکرد کلاسیک و رگرسیون تصنعی (دامی) کامل است.

تابع رگر سیون برای **اثر جذابیت تکلیف بر انگیزش درونی** را نیز همین‌گونه می‌توان حساب کرد. در این حالت مدل کامل عبارت است از $Y = b_0 + b_{y2}D_2 + b_{y3}D_3 + e$ و مدل اختصاری عبارت است از $Y = b_0 + e$. ماتریس داده‌ها با متغیرهای Y و $X_۲$ ابتدا به شکل ماتریسی بازنویسی می‌شود (جدول ۷-۷)، که در آن $X_۲$ (با نمرات ۱، ۲ و ۳) توســـط متغیرهای $D_۲$ و $D_۳$ (به ترتیب با نمرات ۱و ۰ ، ۰ و ۱، ۰ و ۰) جایگزین شده است.

تابع رگرسون چندگانه را به سه طریق می‌توان محاسبه کرد: از طریق محاسبه ضرایب تفکیکی رگرسیون به طور جداگانه، رویکرد همبستگی تحلیل مسیر یا از طریق رویکرد ماتریسی. آنگاه خواهیم داشــت: $Y = 2 + \Sigma D_2 + 2D_3 + e$. این معادله قبلاً مورد بحث قرار گرفت. مقدار ثابت ۲ میانگین انگیزش گروه ۰-۰ با تکالیف کسل کننده است. این میانگین برای گروه ۰-۱ با تکالیف

جدول ۷-۷

Y	$D_۲$	$D_۳$
۶	۱	۰
۴	۱	۰
۳	۱	۰
۳	۱	۰
۹	۱	۰
۹	۱	۰

۰	۱	۸
۰	۱	۶
۱	۰	۴
۱	۰	۳
۱	۰	۳
۱	۰	۲
۱	۰	۷
۱	۰	۵
۱	۰	۴
۱	۰	۴
۰	۰	۳
۰	۰	۲
۰	۰	۲
۰	۰	۱
۰	۰	۴
۰	۰	۲
۰	۰	۱
۰	۰	۱

جذاب ۴ برابر بزرگتر و برای گروه ۱-۰ با تکالیف دارای جذابیت متوسط ۳ برابر بزرگتر است ($b_{y۳\cdot۲} = ۲$).

واریانس تبیین‌شده در این مدل با $D_۲$ و $D_۳$ به میزان ۰/۴۸۲ است (لطفاً خودتان محاسبه کنید یا به نتایج کامپیوتری مراجعه نمایید). واریانس تبیین شده بدون $D_۲$ و $D_۳$ طبعاً برابر صفر است. تعداد درجات آزادی به ترتیب d_r=۲۳ و d_f=۲۱ است. نتایج آزمون F بر اساس شیوه مقایسه مدل، یک نمره F را به دست می‌دهد:

$$F = [(۰/۴۸۵ - ۰) \div (۲۳ - ۲۱)] \div [(۱ - ۰/۴۸۵) \div ۲۱] = ۹/۸۸$$

این نتیجه با آنچه که در قسمت قبلی تحت عنوان «محاسبات تحلیل واریانس یک طرفه: رویکرد سنتی (کلاسیک)» به دست آمد، یکسان است.

۷-۱۱ آزمون مدل کلی از طریق رویکرد رگرسیون

با به کار گرفتن مجدد فرمول برابری مدل تحلیل واریانس و مدل رگرسیون، می‌توانیم به پرسش هدف ۴ (و همچنین هدف ۳) پاسخ دهیم: آزمون F مدل کلی که در آن متغیرهای تصنعی (دامی) D_1، $D_۲$ و $D_۳$ و همچنین عبارت ضرب $D_4 = D_1D_2$ و $D_5 = D_1D_3$ را شامل می شوند. ماتریس داده‌ها در جدول ۸-۷ نشان داده شده است.

جدول ۸-۷

Y	$D_۱$	$D_۲$	$D_۳$	$D_۴$	$D_۵$
۶	۰	۱	۰	۰	۰
۴	۰	۱	۰	۰	۰
۳	۰	۱	۰	۰	۰
۳	۰	۱	۰	۰	۰
۴	۰	۰	۱	۰	۰
۳	۰	۰	۱	۰	۰
۳	۰	۰	۱	۰	۰
۲	۰	۰	۱	۰	۰
۳	۰	۰	۰	۰	۰
۲	۰	۰	۰	۰	۰
۲	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۰	۰	۰
۹	۱	۱	۰	۱	۰
۹	۱	۱	۰	۱	۰
۸	۱	۱	۰	۱	۰
۶	۱	۱	۰	۱	۰
۷	۱	۰	۱	۰	۱
۵	۱	۰	۱	۰	۱
۴	۱	۰	۱	۰	۱
۴	۱	۰	۱	۰	۱
۴	۱	۰	۰	۰	۰
۲	۱	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۰	۰	۰	۰

براســاس شــیوه مدل تحلیل رگرســیون، مدل کامل (با D_1 تا $D_۵$) با مدل اختصــاری (بدون متغیرهای مستقل) مقایسه می‌شود:

مدل کامل: $\mathrm{Y} = b_0 + b_{y1}D_1 + b_{y2}D_2 + b_{y3}D_3 + b_{y4}D_4 + b_{y5}D_5 + e$

مدل اختصاری: $Y=\mathrm{b_0+e}$

برای پیدا کردن درجات آزادی، تعداد پارامترهای یک مدل را از تعداد کل مشــاهدات (۲۴) کم می‌کنیم. در مدل اختصاری تنها یک پارامتر وجود دارد (b_0)، در حالی‌که در مدل کامل، شش پارامتر است. در نتیجه d_r=۲۳ و $d_f = ۱۸$. واریانس تبیین‌کننده (R^2) مدل اختصاری برابر ۰ و برای مدل کامل ۰/۷۸۸ است.

بنابراین نمره F برابر است با :

$$F = [(۰.۷۸۸ - ۰) \div (۲۳ - ۱۸)] \div [(۱ - ۰.۷۸۸) \div ۱۸] = ۱۳.۳۷$$

در جدول F برای α=۰/۰۵ و درجات آزادی پنج و ۱۸، مقدار بحرانی $F^* =$ ۲/۷۸ است. از آنجا که مقدار F ما بزرگتر است، مدل کلی معنادار به نظر می‌رسد.

با اســتفاده از همین شــیوه مدل مقایســه می‌توانیم همچنین مشــخص کنیم که **آیا یک اثر تعاملی معنادار وجود دارد**. وقتی که کدهای دامی اعمال شـده باشـند این اثر تعاملی با دو عبارت ضـرب $D_4 = D_1D_2$ و $D_5 = D_1D_3$ بیان می‌گردد. این دو عبارت ضـرب در مدل کامل قرار دارند، اما در مدل اختصاری نیستند. پس تفاوت بین دو مدل شامل عبارت ضرب D_4 و D_5 است:

مدل کامل : $y = b_0 + b_{y1}D_1 + b_{y2}D_2 + b_{y3}D_3 + b_{y4}D_4 + b_{y5}D_5 + e$

مدل اختصاری: $y = b_0 + b_{y1}D_1 + b_{y2}D_2 + b_{y3}D_3 + e$

واریانس‌های تبیین‌شـده به ترتیب ۰/۷۸۸ و ۰/۶۶۷ هســتند (لطفاً خودتان محاســبات را انجا دهید یا به نتایج کامپیوتری مراجعه کنید). درجات آزادی عبارتند از $d_f = ۱۸$ و $d_r = ۲۰$. محاســبه نسبت F ساده است:

$$f = [(۰.۷۸۸ - ۰.۶۶۷) \div (۲۰ - ۱۸)] \div [(۱ - ۰.۷۸۸) \div ۱۸] = ۵.۱۴ .$$

توجه داشــته باشــید که این مقدار با آنچه قبلاً در بخش «محاســبات آنوای دو طرفه: رویکرد سنتی» به دست آمد یکسان است، که در آن به وجود اثر تعاملی معنادار پاسخ دادیم. اثر تعاملی در واقع معنادار می‌نماید، چون F= ۵/۱۴ است که بزرگتر از $F^* = ۳/۵۵$ برای $\alpha = ۰/۰۵$ و درجات آزادی دو و ۱۸ می‌باشد.

این آزمون تعامل معنادار نیز برای مدل‌های پیچیده‌تر قابل اجرا اســت که به وســیله رویکرد مقایسه مدل هم سانی انجام می‌گیرد. البته در این جا ذکر یک مورد احتیاط منا سب ا ست. تو صیه نمی‌شــود که تمام اثرات تعاملی (و عامل‌های دیگر) را به طور همزمان در یک آزمون واحد بررســی کنیم. زیرا با این کار دچار خطای «آزمون مکرر» می‌شــویم که طی آن احتمال موفقیت به طور مصــنوعی افزایش می‌یابد. بنابراین بهتر اســت با یک آزمون شــروع کنیم که در آن مدل کامل تمام عبارت ضرب (در دو، در سه، در چهار و غیره) را در بر می‌گیرد و یک عبارت ضرب در مدل اختصاری وجود نداشــته باشـد. این روش یک بار این موضــوع را آزمایش می‌کند که آیا هیچ اثر تعاملی در کل وجود دارد یا نه. اگر چنین نبا شد آنگاه می‌توانیم مدل افزای شی (جمع‌پذیری) را بدون عبارت ضرب ادامه دهیم. از سوی دیگر اگر اثرات تعاملی معناداری وجود داشته باشند، دیگر گزینشی وجود ندارد، بلکه باید آزمون‌های چندگانه را اجرا کرد. این آزمون‌ها بایستی بعداً محافظه‌کارانه‌تر شوند (با احتمال کمتر خطا نوع اول α). اما می‌توانیم این آزمون‌ها را بعداً هم تا حدی گروه‌بندی کنیم تا از اتکای زیاد به شــانس اجتناب کنیم. مثلاً می‌توان ابتدا اثرات تعاملی مراتب ســوم، چهارم یا بالاتر را از این لحاظ که آیا با هم یک اثر معنادار را نشــان می‌دهند آزمود. اگر چنین نباشــد آنگاه همه این عبارات ضرب را به و سیله یک آزمون منفرد کنار گذا شته و بعد از آن روی اثرات تعاملی مرتبه دوم متمرکز شویم.

برای طرح یک **نتیجه‌گیری اساسی**، ناگزیر از قبول این واقعیت هستیم که انتظارات اولیه ما از اثر تعاملی، از سوی داده‌های تجربی رد شده ا ست. در واقع یک اثر تعاملی معنادار وجود دارد، اما با آنچه که ما از قبل طرح کرده‌ایم تفاوت اساسی دارد. زیرا چنین فرض شده بود که ارائه پاداش‌های مادی (مبلغی پول) بر تکالیف کسالت‌آور اثر مثبت دارد، امّا بر تکالیف حد وسط، اثری ندارد و حتی بر تکالیف جذاب اثر منفی دارد، درحالی‌که نتایج تحلیل‌های ما نشان داد که پاداش و جذابیت تکلیف به طور مثبت یکدیگر را تقویت می‌کنند: بالاترین میانگین انگیزش در مورد تکالیف جذاب و ارائه پاداش پولی بود!

۱۲-۷ تحلیل کوواریانس

چنانچه یک یا چند متغیر مستقل در یک طرح آزمون آنوا در سطح سنجش فاصله‌ای مورد سنجش قرار گیرند، آن ها را «کوواریه» می‌نامند و روش به کار رفته را تحلیل کوواریانس (=آنکوا[1]) گویند. فرض کنید انگیزش درونی (Y) و همچنین سه گروه جذابیت تکلیف ($X_۲$) در مثال ما بدون تغییر باقی بمانند، اما متغیر $X_۱$ که دو وجهی بود (بدون دریافت پول و دریافت پول)، به یک متغیر فاصله‌ای با مبالغ متفاوت پول (از ۱۰۰۰تا ۹۰۰۰ فرانک) تبدیل شود. در این حال ما یک طرح آنکوا داریم.

از آنجا که $X_۱$ و Y به صورت فاصله‌ای اندازه گیری شده‌اند، می توانیم میانگین و میزان تغییرات را برای هر یک از این متغیرها در سه گروه جذابیت تکلیف (*SSW*) و همچنین بین این گروه‌ها (*SSB*) محاسبه کنیم. نه تنها میزان تغییرات (مجموع مجذورات)، بلکه کوواریانس (میزان هم تغییری) $X_۱$ و Y را در درون گروه‌ها و بین گروه‌ها می‌توان حساب کرد. در این روش قضایای پیچیده‌ای از کوواریانس همراه با آزمون‌های F مربوط به آن‌ها را می‌توان بنا نهاد. این روشی است که در ابتدا تحلیل کوواریانس به وسیله آن ارائه شد. این شیوه حرفه‌ای، ریشه در یک سنّت تجربی دارد، با در نظر گرفتن مدل OXO مربوط به آزمایش استاندراد، کوواریه $X_۱$ بایستی به عنوان متغیر وابسته در بررسی مقدماتی منظور شود: میانگین‌های گروه‌ها بایستی *قبل از* دخالت محرک آزمایشی تفاوت معناداری نداشته باشند. این در مورد متغیر وابسته (نمره پیش آزمون Y) و متغیرهای متنوع دیگر اعمال می‌گردد و تا جائی که چنین اختلاف‌هایی وجود دارد کنترل‌ها باید اجرا شوند. متغیر وابسته Y نمره پس آزمون در این مدل ا ست: *پس از* وارد کردن محرک، بین میانگین نمرات Y گروه‌ها تفاوت معناداری وجود دارد.

این رویکرد سنتی در این جا دنبال نمی شود، برای این که بسیار مشکل زا ست. به عنوان یک روش جایگزینی، رویکرد رگرسیون به ما این فرصت را می‌دهد که تحلیل کوواریانس را به صورت شکل خاصی از مدل خطی کلی ارائه کنیم. علاوه بر این، روش جدید بسیار کوتاه و مختصر است. اولاً متغیرهای مستقل در سطح سنجش پایین را به صورت دامی کد می‌کنیم (یک متغیر دامی کمتر از

1. ANCOVA

تعداد مقولهها). دوم این که متغیر وابسته و کوواریه‌ها با سطح سنجش فاصله‌ای را بدون تغییر باقی می‌گذاریم (یا این که آن‌ها را به شکل انحراف از میانگین بیان میکنیم). سوّم، این ماتریس داده ها را خواه با عبارت ضرب تعاملی یا بدون آن، به کامپیوتر سپرده و یک تحلیل رگر سیون انجام می‌دهیم. نتایج این تحلیل همراه با آزمون‌های F مربوط به آن، همانند نتایج تحلیل کوواریانس سنتی خواهد بود.

به طور مثال، آزمون کلی مدل غیرجمع‌پذیر، شامل مقایسه مدل‌های زیر است: (الف) مدل کامل با کوواریه X_1 (ارائه مبلغی پول)، با متغیرهای دامی D_2 و D_3 (که مبین سه گروه جذابیت تکلیف است) و با عبارت ضربی X_1D_2 و X_1D_3؛ (ب) مدل اختصاری بدون این متغیرهای مستقل. تنها فرق این روش با آنوا در این است که دیگر متغیر X_1 به عنوان متغیر دامی عمل نمی‌کند، بلکه به عنوان متغیری در سطح سنجش فاصله‌ای است (با مبالغی پاداش پولی به عنوان نمرات آن).

در این جا ذکر یک نکته حائز اهمیت است. لزومی ندارد **کدگذاری دامی** همواره به صورت ۱-۰ باشد. شیوه‌های فراوان دیگری هم وجود دارد. کدگذاری بایستی به صورتی ترتیب داده شود که در بین متغیرهای مستقل (همچنین متغیرهای دامی) هیچ گونه وابستگی خطی بروز نکند. این حالت را می‌توان در ماتریس همبستگی وار سی کرد که همه همبستگی‌های بین متغیرهای مستقل در آن صفر است. چنین ساختاری از متغیرهای دامی به طریقی که وابستگی‌های خطی بین متغیرهای دامی و پیش‌بینی‌کننده‌ها محو می‌گردد، به عنوان ساختار طرح تعامد ماتریس $\mathbf{X}$ معروف است. بدین معنی که ضرب $\mathbf{X'X}$ قطری است، یعنی عناصر غیر قطری همگی صفر هستند. تا بحال ما از کدهای ۰-۱و ۰-۰ برای کدگذاری D_2 و D_3 استفاده می‌کردیم. این شیوه در حقیقت در بین متغیرهای دامی ایجاد وابستگی خطی نمی‌کند:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

حال شیوه دیگری از کدگذرای D_2 و D_3 را نشان می‌دهیم، به نام ۱ ۱، ۲-۰ و ۱۱- که در آن هم $X'X$ قطری است:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & -۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۶ \end{bmatrix}$$

این شیوه کدگذرای را در قسمت زیر ادامه می‌دهیم.

جدول ۹-۷

Y	$X_۱$	$D_۲$	$D_۳$
۶	۸	۱	۱
۴	۵	۱	۱
۳	۲	۱	۱
۳	۳	۱	۱
۹	۹	۱	۱
۹	۷	۱	۱
۸	۶	۱	۱
۶	۴	۱	۱
۴	۸	۰	۲-
۳	۷	۰	۲-
۳	۶	۰	۲-
۲	۴	۰	۲-
۷	۵	۰	۲-
۵	۹	۰	۲-
۴	۳	۰	۲-
۴	۲	۰	۲-
۳	۴	۱-	۱
۲	۹	۱-	۱
۲	۸	۱-	۱
۱	۲	۱-	۱
۴	۶	۱-	۱
۲	۷	۱-	۱
۱	۵	۱-	۱
۱	۳	۱-	۱

ماتریس داده‌ها که در آن $X_۱$ به صورت χ ضربدر ۱۰۰۰ فرانک بلژیک درآمده به شکلی است که در جدول ۹-۷ نشان داده شده است.

تحلیل رگرسیون چندگانه مدل کلی با عبارت ضرب، معادله زیر را به دست می‌دهد:

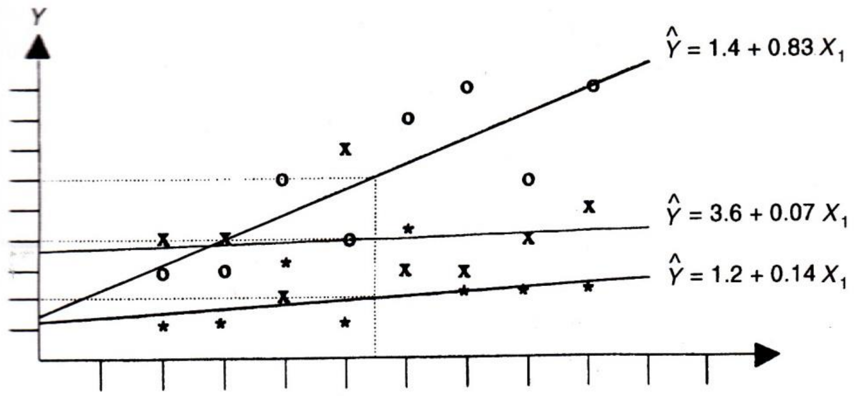
$$\hat{y} = ۴ + ۰.۳۵(X_۱ - \overline{X}_۱) + ۲D_۲ + ۰D_۳ + ۰.۳۵D_۲(X_۱ - \overline{X}_۱) + ۰.۱۴D_۳(X_۱ - \overline{X}_۱)$$

همراه با $R^2 = ۰/۷۱$ و یک نتیجه معنادار (F=۸/۹۸ و ۱۸ و۵ : d_f).

یک آزمون تعامل با مقایسه این مدل کلی و مدل اختصاری بدون عبارت ضرب به عمل آمد: $\hat{y} = 4 + 0.35(X_1 - \overline{X}_1) + 2D_2 + 0D_3$، با $R^۲ = ۰/۶۰$ و یک نتیجه معنادار (F=۱۰/۰۵ و ۲۰ و ۳: d_f) حاصل شد.

استفاده از این رویکرد مقایسه مدل، نتیجه‌ای را از آزمون تعامل به دست داد که نزدیک به حد معناداری است: $F = [(۰.۷۱ - ۰.۶۰) \div (۲۰ - ۱۸)] \div [(۱ - ۰.۷۱) \div ۱۸] = ۳.۴۱$، (۲ و ۱۸: d_f ، α=۰/۰۵).

به بیان هندسی، یک اثر تعاملی به معنای آن است که میزان رابطه بین $X_۱$ و y در سه گروه متفاوت است. برای داده‌های فرضی ما، تصویر این روابط در شکل ۸-۷ نشان داده شده است.



شکل ۸-۷ اثر پاداش‌های درونی انگیزش بر سه گروه جذابیت تکلیف

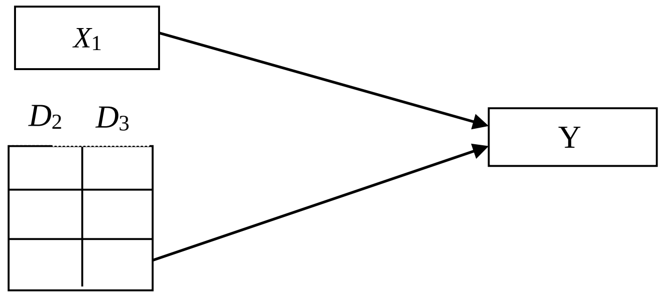
اگر خط‌های رگرسیون درون‌گروهی با یکدیگر متفاوت باشند، یعنی موازی با هم نباشند یک اثر تعاملی وجود دارد. در شــکل ملاحظه می‌شــود که اثر پاداش‌های مادی بر انگیزش، برای گروه اول با تکالیف جذاب (b_{y1} = ۰/۸۳) خیلی بزرگتر از دو گروه دیگر اســت (b_{y1}=۰/۰۷ و ۰/۱۴). به هر حال از آزمون F فوق چنین بر می‌آید که این اثر تعاملی معنادار نیست.

از این شـــکل می‌توان روابط دیگری را هم فهمید. مثلاً، میانگین مبلغ پول X_1 برای هر یک از ســه گروه برابر ۵/۵ اسـت که از روی محور X می‌توان تشـخیص داد. بدین ترتیب بین کوواریه X_1 و گروه‌ها رابطه‌ای وجود ندارد.

میانگین نمره انگیزش به ترتیب ۶، ۴، ۲ است؛ با نگاهی به محور Y می‌توان مشاهده کرد که در واقع میانگین‌های سه گروه هر یک بالای دیگری واقع شده است.
بنابراین بین Y و گروه‌های جذابیت تکلیف رابطه‌ای برقرار است.

وجود رابطه بین کوواریه X_1 و متغیر وابسته y را از روی شیب خط‌های رگرسیون نیز می‌توان فهمید: در هر گروه با افزایش پاداش مادی، میانگین انگیزش افزایش می‌یابد. به طور اجمالی می‌توان دریافت که ضریب رگرسیون X_1 یک ضریب تفکیکی است. چنان که این ضریب حد متوسط ضرایب مذکور است: رقم ۰/۳۵ در واقع حد وسط بین رقم‌های ۰/۸۳، ۰/۰۷، و ۰/۱۴ است.

از این تحلیل چنین بر می‌آید که مدل فوق با ســـه گروه و کوواریه و بدون عبارت ضـــرب مناســـب‌ترین حالت اســـت. به نظر می‌رســـد این مدل از لحاظ روابط متقابل متغیرهای مســـتقل نیز مصونیت دارد، چیزی‌که در تحلیل واریانس با عنوان «متعامد بودن» و در تحلیل رگرسیون «چندهم خطی نبودن» از آن یاد کردیم. اکنون به عنوان نتیجه‌گیری روابط علّی مدلی را که دارای بهترین انطباق است در شکل ۹-۷ رسم می کنیم.



شکل ۹-۷ طرح علّی

۱۳ -۷ آزمایش عاملی

مدل تحلیل واریانس به طور خاص به آمار«استنباطی» تعلق دارد. یک نسبت F از دو واریانس، یعنی واریانس بین‌گروهی و درون‌گروهی برای آزمون معناداری به عمل می‌آید. تا به‌حال درباره اندازه توان یک اثر یا مقایسه‌های دو به دوی اثرها، ذکری به میان نیامد، به جز در تحلیل رگرسیون که ضرایب همبستگی و رگرسیون- به ویژه بتاها- این کار را انجام می‌دادند.

به‌منظور بسط این جنبه «توصیفی» تحلیل واریانس، «**آزمایش عاملی**» طرح شده است. اصطلاح آزمایش عاملی گاهی هم تحت عنوان «طرح عاملی» به کار می‌رود. واژه آزمایشی به زمینه تجربی (آزمایشی) موضوع اشاره دارد. «عامل‌ها» محرک‌هایی هستند که وارد آزمایش می شوند. این‌ها متغیرهای مستقل هستند. واژه «طرح» به ساختار یک طرح ماتریس $\mathbf{X}$ اشاره دارد که در بخش‌های قبلی نمونه‌هایی از آن ارائه شده است. اصطلاح اخیر به تازگی بیشتر مورد توجه قرار گرفته چون از روی ماتریس طرح روشن می‌شود که چه عامل‌هایی را می‌خواهیم محاسبه کنیم.

۱۴-۷ طرح عاملی ۲×۲

در مثال ما در مورد تحلیل واریانس، متغیر پاداش‌های خارجی، ($X_۱$) یک متغیر دو وجهی، و جذابیت تکلیف ($X_۲$) یک متغیر سه وجهی بودند. بنابراین، طرح ما دو طرفه ۳×۲ بوده است. اما به خاطر ملاحظات آموزشی در اینجا با یک طرح دو طرفه ۲×۲ آغاز می‌کنیم که هر یک از دو عامل آن، دو وجهی است. برای این کار، گروه با جذابیت تکلیف حد متوسط را حذف کردیم. طرح را دو طرفه عنوان کردیم، چون دو متغیر مستقل وجود دارد. آن را یک طرح ۲×۲ یا به طور کلی طرح ۲^k می‌نامیم، چون تمام متغیرهای مستقل دارای دو مقوله هستند.

توان یک عامل به وسیله تفاوت میانگین‌ها نشان داده می شود، مثلاً تفاوت میانگین انگیزش در گروهی که پول دریافت کرده منهای میانگین انگیزش گروهی که پول دریافت نکرده است. چنین

تفاضـــلی از میانگین‌ها، ترکیبی خطی از ضـــرایب ۱+ و ۱- اســـت: $\bar{Y}_{۱}-\bar{Y}_{۲}=(+۱)\bar{Y}_{۱}+(-۱)\bar{Y}_{۲}$. بنابراین ماتریس طرح شامل ۱ ها و ۱- ها خواهد بود. البته گاهی قضیه پیچیده‌تر از این است، زیرا ناچاریم به طور تفکیکی محاسـبه کنیم. این مطلب را در ماتریس داده‌ها که به شـکل جدول متقاطع ارائه شده است، مشاهده می کنیم (جدول ۱۰-۷).

جدول ۱۰-۷

پاداش‌های مادی	جذابیت تکلیف: گروه ۱	جذابیت تکلیف: گروه ۲	
گروه ۱	۶، ۴، ۳، ۳ — $\bar{Y}_{۱۱}=۴$	۳، ۲، ۲، ۱ — $\bar{Y}_{13}=2$	$\bar{Y}_{1.}=3$
گروه ۲	۹، ۹، ۸، ۶ — $\bar{Y}_{۲۱}=۸$	۴، ۲، ۱، ۱ — $\bar{Y}_{23}=2$	$\bar{Y}_{۲.}=۵$
	$\bar{Y}_{..}=6$	$\bar{Y}_{.3}=2$	$\bar{Y}_{..}=۴$

بدون محاسـبه تفکیکی، اثر پاداش‌های خارجی به طور سـاده همان تفاضـل میانگین‌های گروه ۲(۵) و گروه ۱ (۳) خواهد بود. در این صـورت وانمود می‌کنیم که گروه‌های جذابیت تکلیف وجود نداشتند و تنها یک تحلیل دو متغیره اثر پول بر انگیزش بدون جذابیت تکلیف را اجرا خواهیم کرد.

محاسـبه تفکیکی به معنای این اسـت که تفاوت میانگین‌های گروه ۲ و گروه ۱ دو بار حسـاب می‌شود، یک بار برای گروه با تکالیف جذاب (۴=۴-۸) و یک بار برای گروه با تکالیف غیرجذاب (۰=۲-۲)، و آنگاه میانگین این دو تفاضل را به دست می‌آوریم [۲=۲÷(۰+۴)]. با انجام این کار، جذابیت تکلیف را کنترل می‌کنیم. اثر جذابیت تکلیف را هم به سـبک مشـابهی می توان محاسـبه کرد، خواه پاداش‌های خارجی را کنترل کنیم یا نکنیم.

حال اجازه دهید پاداش‌های خارجی به عنوان «عامل A» و اثر آن را d_A در نظر بگیریم. همچنین جذابیت تکلیف را به عنوان «عامل B» و اثر آن را d_B می‌نامیم. آنگاه محاسـبات تفکیکی اثرات به شرح زیر خواهد بود:

$$d_A=\frac{۱}{۲}[(\bar{Y}_{۲۱}-\bar{Y}_{۱۱})+(\bar{y}_{۲۳}-\bar{y}_{۱۳})]=\frac{۱}{۲}[(۸-۴)+(۲-۲)]=۲$$

$$d_B=\frac{۱}{۲}[(\bar{Y}_{۱۳}-\bar{Y}_{۱۱})+(\bar{y}_{۲۳}-\bar{y}_{۲۱})]=\frac{۱}{۲}[۲-۴)+(۲-۸)]=-۴$$

$$d_{AB} = \frac{۱}{۲}[(y_{۲۳} - \bar{y}_{۲۱}) + (\bar{y}_{۱۳} - \bar{y}_{۱۱})] = \frac{۱}{۲}[(۲-۸)-(۲-۴)] = -۲$$

یا معادل با آن

$$\frac{1}{2}[(\bar{y}_{23} - \bar{y}_{13}) - (\bar{y}_{21} - \bar{y}_{11})] = \frac{1}{2}[\ (2-2)-(8-4)] = -2$$

اثر آخر یعنی d_{AB}، اثر تعاملی بوده و به صورت تفاضل تفاوت میانگین‌ها محاسبه می‌شود. تقسیم بر ۲ (ضرب در $\frac{۱}{۲}$) در راستای این هدف است که امکان مقایسه با اثرات اصلی d_A و d_B حفظ شود.

با تشکیل **ماتریس طرح** شامل ۱ ها و ۱- ها، محاسبات فوق بسیار ساده می‌شود، چنان که در جدول ۱۱-۷ نشان داده شده است.

جدول ۱۱-۷

	d_A	d_B	d_{AB}
Cell $a_۱b_۱(\bar{Y}_{۱۱} = ۴)$	-۱	-۱	۱
$a_۱b_۲(\bar{Y}_{۱۳} = ۲)$	-۱	۱	-۱
$a_۲b_۱(\bar{Y}_{۲۱} = ۸)$	۱	-۱	-۱
$a_۲b_۲(\bar{Y}_{۲۳} = ۲)$	۱	۱	۱
	۴	-۸	-۴

در هر ستون چهار خانه نشان داده شده. برای اثر اصلی d_A، هر کجا $a_۲$ (گروهی که پول دریافت کرده‌اند) باشد، عدد ۱ و هر کجا که $a_۱$ (گروهی که پول دریافت نکرده‌اند) باشد، عدد ۱- را می‌نویسیم. برای اثر اصلی d_B جائی که $b_۲$ (تکالیف غیر جذاب) باشد عدد ۱ و جائی که $b_۱$ (تکالیف جذاب) باشد، عدد ۱- را می‌نویسیم. برای اثر تعاملی d_{AB} به طور ساده حاصل‌ضرب دو ستون اوّل را قرار می‌دهیم.

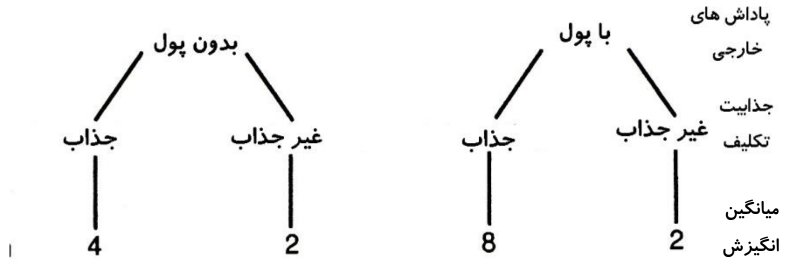
سپس حاصل ضرب میانگین‌های خانه‌های ۱ و ۱- را برای هر ستون جمع می‌کنیم. مثلاً جمع ستون مربوط به اثر d_{AB} می شود: ۴-=(۲)(۱)+(۸)(۱-) + (۲)(۱)+(۴)(۱) حاصل تقسیم سه مجموع حاصل‌ضرب‌های فوق (۴-، ۸- ، ۴) بر ۲، سه اثر از A، B و تعامل AB را به دست می‌دهد که در قسمت بالا محاسبه شده‌اند (۲-، ۴- ، ۲).

توجه داشته باشید که ماتریس طرح X با ۱ ها و ۱- متعامد است، زیرا $X'X$ غیر متعامد است. بنابراین، در مورد این کدگذاری دامی روش رگرسیون را نیز می‌توانیم به کار ببریم.

باید به این نکته نیز اشاره کنیم که علامت یک اثر ، نسبی است. مثلاً در مورد اثر تکلیف، میانگین انگیزش گروه دارای تکلیف جذاب از میانگین انگیزش گروه با تکلیف غیر جذاب کسر گردید و حاصل منفی بود: $\frac{1}{2}(-۸) = -۴$. در حالی‌که اگر نمره گروه با تکلیف غیرجذاب را از گروه جذاب

کســر کرده بودیم، حاصــل مثبت می‌شــد، چون نمره گروه اخیر بالاتر اســت. در مورد اثر پاداش‌های خارجی نیز این مطلب صادق است.

تشکیل یک ماتریس طرح برای محاسبه سریع اثرات، سودمند است. این کار همچون طرح یک **نمودار درختی** است، چنان‌که در شکل ۱۰-۷ نشان داده شده. اثرات را می‌توان با یک نگاه در ردیف زیرین مربوط به میانگین انگیزش خواند.



شکل ۷-۱۰ طرح درختی

به طور مثال، اثر پول، میانگین دو اختلاف بین گروه پولی و گروه بدون پول اســـت: ۴-۸ و ۲-۲. اثر جذابیت تکلیف، میانگین دو اختلاف مابین گروه با تکلیف جذاب و گروه با تکلیف غیر جذاب اســـت: ۲-۴ و ۸-۲. اثر تعاملی برابر با تفاضل دو اختلاف میانگین است.

۱۵-۷ طرح عاملی ۳×۲

اکنون به مثال اصــلی تحلیل واریانس دوطرفه بر می‌گردیم که در آن عامل A دو وجهی (پاداش‌های خارجی: گروهی که پول دریافت می‌کند و گروهی که پول دریافت نمی‌کند) و عامل B ســه وجهی اســت (جذابیت تکلیف: جذاب، جذابیت متوســط، و غیر جذاب). یک طرح ۳×۲ از این نوع به دلیل سه وجهی بودن عامل B که تفسیر جداگانه‌ای دارد، مشکل‌تر است. اثر B در واقع چه معنایی دارد؟ آیا می‌خواهیم گروه تکالیف جذاب را با دو گروه دیگر مقایسه کنیم؟ آیا می‌خواهم سه گروه را دو به دو مقایســه کنیم؟ یا این که می‌خواهیم گروه تکالیف غیرجذاب را به‌عنوان گروه مرجع در نظر گرفته و ببینیم آیا دو گروه دیگر از لحاظ میانگین انگیزش با یکدیگر فرق دارند یا نه؟ ما این خط مشی آخر را در پایین دنبال خواهیم کرد و ماتریس طرح مناسب با آن را تشکیل می‌دهیم.

جدول ۱۲-۷

پاداش‌های مادی(A)	جذابیت تکلیف(B) گروه ۱	گروه ۲	گروه ۳	
گروه ۱	۶ ۴ ۳ ۳ $\bar{Y}_{.11}=4$	۴ ۳ ۳ ۲ $\bar{Y}_{.12}=3$	۳ ۲ ۲ ۱ $\bar{Y}_{.13}=2$	$\bar{Y}_{.1.}=3$
گروه ۲	۹ ۹ ۸ ۶ $\bar{Y}_{.21}=8$	۷ ۵ ۴ ۴ $\bar{Y}_{.22}=5$	۴ ۲ ۱ ۱ $\bar{Y}_{.23}=2$	$\bar{Y}_{.2.}=5$
	$\bar{Y}_{..}=6$	$\bar{Y}_{.2}=4$	$\bar{Y}_{.3}=2$	$\bar{Y}_{..}=4$

ماتریس داده‌ها در جدول تقاطعی ۱۲-۷ نشان داده شده است. برای اثر اصلی d_A اینک بایستی سه اختلاف میانگین را شامل هر یک از گروه‌های جذابیت تکلیف حساب کنیم، سپس میانگین آن‌ها را به دست آوریم. برای عامل B نمی‌توانیم صحبت از اثر اصلی d_B کنیم چون سه گروه وجود دارد. گروه ۳ با تکالیف غیر جذاب را به‌عنوان گروه مرجع در نظر می‌گیریم. ابتدا گروه ۱ را با گروه ۳ مقایسه می‌کنیم و گروه ۲ را صفر می‌گیریم. بعد گروه ۲ را با ۳ مقایسه کرده و گروه ۱ را صفر می‌گیریم. از این طریق اثر B با دو تفاوت میانگین از گروه سوّم نشان داده می‌شود: یکی برای گروه ۱ و یکی برای گروه ۲.

از آنجا که سهم عامل B با دو اثر نشان داده می‌شود، اثر تعامل هم شامل دو بخش است.

$$d_A=\frac{۱}{۳}[(\bar{Y}_{.۲۱}-\bar{Y}_{.۱۱})+(\bar{Y}_{.۲۲}-\bar{Y}_{.۱۲})+(\bar{Y}_{.۲۳}-\bar{Y}_{.۱۳})]$$

$$=\frac{۱}{۳}[(۸-۴)+(۵-۳)+(۲-۲)]=۲$$

$$d_{B۱}=\frac{۱}{۲}[(\bar{Y}_{.۱۱}-\bar{Y}_{.۱۳})+(\bar{Y}_{.۲۱}-\bar{Y}_{.۲۳})]=\frac{۱}{۲}[(۴-۲)+(۸-۲)]=۴$$

$$d_{B۲}=\frac{۱}{۲}[(\bar{Y}_{.۱۲}-\bar{Y}_{.۱۳})+(\bar{Y}_{.۲۲}-\bar{Y}_{.۲۳})]=\frac{۱}{۲}[(۳-۲)+(۵-۲)]=۲$$

$$d_{AB۱}=\frac{۱}{۲}[(\bar{Y}_{.۲۱}-\bar{Y}_{.۲۳})-(\bar{Y}_{.۱۱}-\bar{Y}_{.۱۳})]=\frac{۱}{۲}[(۸-۲)-(۴-۲)]=۲$$

$$d_{AB۲}=\frac{۱}{۲}[(\bar{Y}_{.۲۲}-\bar{Y}_{.۲۳})-(\bar{Y}_{.۱۲}-\bar{Y}_{.۱۳})]=\frac{۱}{۲}[(۵-۲)-(۳-۲)]=۱$$

این شیوه پر زحمت را می‌توان با تشکیل ماتریس طرح به‌صورت قاعده‌مند و اختصاری درآورد. در این جا ماتریس تنها شامل ۱ها و ۱- ها نخواهد بود، بلکه ۰ ها را هم شامل می‌شود، چون در

محاســـبه تفاوت میانگین‌ها برای عامل B گروه ســـومی را کنار گذاشـــته‌ایم (به جای آن یک صـــفر می‌گذرایم). ضرایب اثر تعاملی به طور ساده حاصل‌ضرب $AB_۱$ و $AB_۲$ می‌باشند.

مجموع حاصل‌ضرب خانه‌ها و ضرایب، مقادیر اثرات مختلف را به ما می‌دهد. سپس بایستی این مقادیر را بر تعداد تفاوت‌های میانگین که در هر محاســـبه دخالت دارند تقســـیم کرد تا اندازه اثرات اصلی به دست آید.

همه‌ی این محاسبات در ماتریس طرح نشان داده شده در جدول ۱۳-۷ آمده‌اند.

اغلب برنامه‌های کامپیوتری امکاناتی برای انتخاب ماتریس‌های دیگری از این نوع را بسته به این که چه تفاوت میانگین‌هایی خواســـته شـــده باشـــد، فراهم می‌کنند. عموماً این موارد را تحت عنوان "Contrast" در برنامه‌های کامپیوتری می توان جستجو کرد چون ماتریس طرح مشخص می کند که کدام «مقابله‌های» خاص بین میانگین خانه‌ها محاســـبه خواهند شـــد. آزمون‌های معناداری مربوطه (آزمون‌های مقابله) نیز ارائه شـــده و اگر چند مقابله آزموده شـــود این آزمون‌ها محافظه‌کارانه‌تر می‌باشند.

جدول ۱۳-۷

	d_A	d_{B1}	d_{B2}	d_{AB1}	d_{AB2}
cell $a_۱b_۱(\bar{Y}_{.۱۱}=۴)$	-۱	۱	۰	-۱	۰
$a_۱b_۲(\bar{Y}_{.۱۲}=۳)$	-۱	۰	۱	۰	-۱
$a_۱b_۳(\bar{Y}_{.۱۳}=۲)$	-۱	-۱	-۱	۱	۱
$a_۲b_۱(\bar{Y}_{.۲۱}=۸)$	۱	۱	۰	۱	۰
$a_۲b_۲(\bar{Y}_{.۲۲}=۵)$	۱	۰	۱	۰	۱
$a_۲b_۳(\bar{Y}_{.۲۳}=۲)$	۱	-۱	-۱	-۱	-۱
	۶	۸	۴	۴	۲

گزینه "default" (پیش‌گزینه) عموماً هر اثر را به‌صـــورت یک تفاوت بین میانگین خاص و میانگین کل نشان می‌دهد، طوری‌که مقابله‌ها به شکل $\mu_۲-\mu_۱$ نیستند، بلکه به صورت $\mu_i-\mu$ می‌باشـــند. این روش را که در این جا ادامه نمی‌دهیم، در اغلب متون آماری کلاســـیک می‌توان پیدا کرد.

۱۶-۷ متعامد بودن، هم‌واریانسی، بهنجاری، خطی بودن

همچون تحلیل رگرسیون، در تحلیل واریانس هم بسیار مهم است که پیش‌فرض‌های مدل یک آزمون را رعایت کنیم. در بخش‌های پیشـــین اغلب یک آزمون **جمع‌پذیری** (عدم حضـــور اثر تعاملی) و همچنین آزمون‌های مختلف اثرات مجزّا برای به دست آوردن مناسب‌ترین مدل را اجرا نمودیم.

خطی بودن و **بهنجار بودن** دو پیش‌فرض مهم هستند که بایستی در یک آزمون اعمال کرد، و گر نه به کار بردن یک روش آماری ممکن اســت به نتیجه‌گیری غلط منجر شــود. تحلیل باقیمانده‌ها در اینجا می‌تواند بسیار مفید باشد و اغلب برنامه‌های پیشرفته کامپیوتری آن را بسیار فراتر از آنچه مورد اســـتفاده قرار می‌گیرد، اجرا میکنند. گاهی یک نمودار توزیع باقی مانده‌ها کفایت می‌کند، برای اینکه یک الگوی تصادفی از باقی مانده‌ها نشان‌دهنده آن است که توزیع تقریباً بهنجار است و یک الگوی غیرخطی باقی مانده‌ها نشان می‌دهد که مدل خطی برای داده‌های تجربی نامناسب است.

موضـــوع **متعامد بودن** در بخش‌های پیشـــین به طور کامل مورد بحث قرار گرفت. در تحلیل رگرســـیون، آن را عدم چندهم‌خطی بودن، می‌نامند، در حالی‌که در تحلیل واریانس، واژه «متعامد» بکار برده می شود. برای ماتریس طرح $\mathbf{X}$ لازم است که ضرب $\mathbf{X'X}$ خطی باشد، یعنی عناصر غیر قطری، همگی صـفر باشـند. معنی سـاده آن، این اسـت که متغیرهای مسـتقل دو به دو ناهمبســته هستند. در تحلیل واریانس که متغیرهای مستقل مقیاس‌های بهنجار را تشکیل می‌دهند، زیرا معرف گروه‌ها هستند، اگر تمام خانه‌های جدول واحدهای مساوی داشته باشند این شرط برآورده می شود. ولی در کارهای تحقیقاتی به ندرت چنین است. در صورتی‌که فراوانی‌ها یکسان نباشند چه راهبردی را باید در پیش گرفت؟ یک راه ساده تشکیل دادن طرح غیرمتعامد است. ما به‌هرحال در این باره اغلب متکی به مشاوره با یک متخصص هستیم، زیرا کمتر کتابی این موضوع را به طور دقیق توضیح داده و برنامه‌های کامپیوتری هم با عنوان «مقایسه تعریف شده از سوی کاربر» مهارت لازم را بر دوش کاربر می‌گذراند؛ با افزودن این تذکر که «مقایسه‌های متعامد مفیدترین نوع هستند». راه دیگر این است که از درون خانه‌ها، نمونه‌هایی تصـادفی با بیشـترین فراوانی را بیرون بکشـیم که اندازه آن‌ها با میانگین اندازه خانه‌های دیگر برابر باشد. طبعاً این راهبرد منجر به از دست رفتن بخشی از اطلاعات می شود، امّا واحدهایی که انتخاب نشده‌اند را برای انجام کنترل‌ها می‌شود نگه‌داشت.

فرض **هم‌واریانســـی** که «تجانس واریانس‌ها» هم گفته می‌شـــود به معنای این اســـت که پراکندگی متغیر وابســته Y در خانه‌های جدول نباید تفاوت معناداری داشــته باشـد. اگر تفاوت وجود داشــته باشــد، واژه «ناهم‌واریانســی» را به کار می بریم. این حالت از تخطّی را می‌توان تا حدودی به وســـیله تحلیل باقی مانده ها کنترل کرد. نمونه‌ای از آن تحقیقی اســـت که در مورد رفتار مصـــرف دخانیات در زنان و مردان صورت گرفته است. در این تحقیق زنان دو تا چهار بار در روز تنباکو مصرف می‌کردند (به طور متوسط ۳ بار) و مردان بین شش تا ۱۶ بار مصرف می‌کردند (به طور متوسط ۱۱ بار)، بدین ترتیب دامنه مصـرف روزانه در زنان ۲=۲-۴ و در مردان ۱۰=۶-۱۶ می‌باشـد. انحراف معیار

آن‌ها چیزی که اغلب در حدود یک چهارم دامنه ا ست (چون انحراف معیار تقریباً به اندازه کل ف ضای زیر منحنی توزیع بهنجار اســـت، یعنی ۹۵٪ از جامعه آماری در یک توزیع بهنجار)، در این جا در حدود ۰/۵ و ۲/۵ اســـت. در هر برنامه کامپیوتری، یک آزمون معناداری تفاوت بین واریانس گروه ها نیز گنجانده شده ا ست. این آزمون تجانس واریانس‌ها نباید به نتیجه معناداری منجر گردد. در نتایج کامپیوتری در برابر عبارت ...=Signifcance می‌بایســـت عددی بزرگتر بلکه خیلی بزرگتر از ۰/۰۵ را بخوانیم، اگر غیر از این باشد آنگاه یا باید نتیجه بگیریم که این شیوه کاربرد مناسبی نداشته است یا این که تغییراتی در متغیر وابسته داده شود تا از این مشکل جلوگیری شود.

در مثال ما با داده‌های غیرواقعی، تا حدودی متوجه شــدیم که پراکندگی‌ها در هر یک از شــش خانه چندان اختلافی با هم ندا شتند، دامنه آن چنین بود: ۳=۳-۶ ، ۲=۲-۴ ، ۲=۱-۳، ۳=۶-۹، ۳=۴-۷، ۳=۱-۴.

برای پرهیز از هر گونه اســـتنباط غلط می خواهیم باز هم اشـــاره کنیم که تفاوت پراکندگی‌ها الزاماً بد نیســـت. گاهی خود آن‌ها موضـــوع تحقیق می‌شـــوند. مثالی از این مورد رفتار خوابیدن دانشجویان است. در یک برر سی در بین دانشجویان دانشگاه لوین بلژیک ساعات و دامنه خواب آنان به فاصله سه ماه قبل از امتحانات، یک ماه قبل از آن و در حین امتحانات به این ترتیب مشاهده شد: (الف) ۸ و ۱۲=۲-۱۴، (ب) ۷/۵و ۵=۵-۱۰ و (ج) ۷ و ۲=۶-۸. کاهش دامنه (۱۲، ۵، ۲) در این جا نشان می‌دهد که رفتار خوابیدن با نزدیک شدن امتحانات، متجانس‌تر می‌شود.

۷-۱۷ برون‌داد نرم افزار SPSS تحت ویندوز برای آنوا و آنکوا

برون داد کامپیوتری در زمینه مثال اخت صاری مربوط به تحقیق انگیزش از سه بخش ت شکیل شده ا ست: (الف) یک تحلیل واریانس کلا سیک، (ب) تحلیل واریانس به صورت تحلیل رگر سیون دامی با کدهای ٥ و ۱ و (ج) یک تحلیل کوواریانس به صورت رگرسیون دامی امّا با استفاده از ماتریس قطری.

اجرای تحلیل واریانس کلاسیک

به شیوه‌ای که در فصل ۴ توضیح داده شد یک فایل داده ها را تهیه نموده و دستورات زیر را به ترتیب اجرا می‌کنیم.

اجرای آنواهای کلاسیک

روی عبارت Analyze کلیک کنید. سپس روی واژه ANOVA و بعد روی عبارت Simple factorial کلیک کنید. با این کار وراد پنجره مربوطه خواهید شد، آنگاه متغیر واب سته Y را از فهر ست متغیرها پیدا کرده روی آن کلیک کنید و ســـپس با کلیک کردن روی علامت ⊳ متغیر وابســـته را وارد می‌نمایید. به همین ترتیب متغیر مســـتقل X_1 را نیز به عنوان یک عامل منظور کنید. روی عبارت

Define Range کلیک کرده تا وارد زیرمجموعه مربوط به آن شـــوید. مقدار ۱ را به عنوان کمترین ارزش و مقدار ۲ را به عنوان بیشترین ارزش وارد کرده و با کلیک روی واژه Continue به بخش قبلی برگردید.

شما می‌توانید روی واژه option کلیک کرده و امکاناتی را که در اختیار می‌گذارد، ببینید، امّا در این مرحله ما با آن کاری نداریم. با بازگشـــت به زیر مجموعه و کلیک روی واژه ok دســـتور اجرا می‌شود.

اکنون SPSS یک تحلیل واریانس یک طرفه را با متغیر وابســـته (Y) انگیزش درونی و متغیر مستقل ($X_۱$) پاداش های خارجی انجام می‌دهد.

به همین طریق می‌توانید تحلیل واریانس‌های کلاسیک دیگری را اجرا نمایید:

- انگیزش درونی (Y) با جذابیت تکلیف ($X_۲$ با دامنه ۱ تا ۳)،
- انگیزش درونی (Y) با جذابیت $X_۱$ و $X_۲$
- انگیزش درونی (Y) با جذابیت $X_۱$ و $X_۲$ بدون اثرات تعاملی.

برای کنار گذاشتن اثرات تعاملی، روی واژه option کلیک کرده سپس گزینه None را انتخاب کنید.

اجرای تحلیل واریانس به شیوه رگرسیون دامی

برای اجرای رگرسیون‌های دامی، بایستی ابتدا حاصل‌ضرب پاداش‌های خارجی (که به وسیله دامی $D_۱$ نشان داده می شود) و جذابیت تکلیف را (که به وسیله دامی $D_۲$ نشان داده می شود) حساب کنید. برای انجام این کار روی قسمت Transform و بعد روی واژه compute کلیک کنید. با این کار پنجره مربوطه گشود می‌شود. روی $D_۱$ و بعد روی علامت ▶ و سپس * کلیک کنید. آنگاه روی $D_۲$ و علامت ▶ و سپس عبارت Target variable کلیک کرده و بدان نام $D_۴$ بدهید. بدین ترتیب شما $D_۴$ را به عنوان حاصل‌ضرب $D_۱$ و $D_۲$ محاسبه می‌کنید. همین کار برای $D_۵$ به عنوان حاصل‌ضرب $D_۱$ و $D_۳$ انجام دهید.

اینک می‌توایند تحلیل های رگرسیون را به همان صورتی که که در فصل‌های ۵ و ۶ نشان داده شد، اجرا کنید:

- Y به عنوان تابعی از $D_۱$؛
- Y به عنوان تابعی از $D_۲$ و $D_۳$؛
- Y به عنوان تابعی از $D_۱$،$D_۲$ و $D_۳$؛و
- Y به عنوان تابعی از D_1،D_2 و D_3، D_4 و $D_۵$.

اجرای تحلیل کوواریانس

در این جا آنکوا (تحلیل کوواریانس) نیز به روش تحلیل رگرسیون دامی اجرا می شود، طوری که چیز جدیدی وراد نمی شود شما به راحتی می توانید اعمال لازم را از روی دستوراتی که در دریچه دستوری زیر است بفهمید. توجه داشته باشید که از ماتریس طرح قطری دیگری استفاده شده است تا تغییری داده باشیم.

دستورات آنوای کلاسیک بدین گونه است:

```
1 LIST
2  ANOVA/VARIABLES  Y BY X1 (1.2).
3  ANOVA/VARIABLES  Y BY X2 (1.3).
4  ANOVA/VARIABLES  Y BY X1 (1.2) X2(1.3).
5  ANOVA/VARIABLES  Y BY X1 (1.2) X2 (1.3)
6             /MAXORDERS NONE.
```

در دستور ۱ ماتریس داده ها دستور «list» درخواست شده است. این ماتریس شامل نمرات ۱ و ۲ برای متغیر X_1 و نمرات ۱، ۲ و ۳ برای متغیر X_2 است. دستورات ۲ و ۳، تحلیل‌های واریانس یک طرفه را خواسته اند.

در جمله ۴ یک تحلیل واریانس دو طرفه برای مدل غیر افزایشی با اثر X_1 و X_2 و اثر تعاملی محاسبه می شود.

در جملات ۵ و ۶ عبارت MAXORDER NONE (که با option ۳ به کار گرفته شده به معنای آن است که اثر تعاملی حذف گردد و بدین ترتیب مدل افزایشی درخواست شده است.

دستورات تحلیل رگرسیون دامی به صورت زیر است:

```
1 LIST
2   COMPUTE  D4 =D1 * D2
3    COMPUTE  D5 =D1 * D3
4 REGRESSION /VARIABLES Y D1 /DEPENDENT Y/METHOD ENTER D1
5 REGRESSION /VARIABLES Y D2 D3 /DEPENDENT Y/METHOD ENTER D2 D3
6  REGRESSION /VARIABLES Y D1 D2 D3 /DEPENDENT Y/METHOD ENTER D1
D2 D3.
7  REGRESSION /VARIABLES Y D1 D2 D3 D4 D5 /DEPENDENT Y
8                    / METHOD ENTER D1 D2 D3 D4 D5
```

ماتریس داده‌ها که در دستور ۱ درخواست شده در اینجا شامل نمرات ۰ و ۱ است پاداش‌های خارجی به وسیله متغیر دامی d_1 و جذابیت تکلیف توسط متغیرهای دامی d_2 و d_3 نشان داده شده است.

در جملات ۲ و ۳ دو عبارت ضرب محاسبه شده اند.

تحلیل رگرسیون جمله ۴ اثر پاداش های خارجی (d_1) بر انگیزش درونی را محاسبه می‌کند. تحلیل رگرسیون جمله ۵، اثر جذابیت تکلیف (d_2 و d_3 با هم) بر انگیزش را محاسبه می‌کند.

سپس ، اثرات d_1 از یک سو و d_2 و d_3 از سوی دیگر با هم در یک مدل پیچیده تر مورد تحلیل قرار گرفته اند؛ ابتدا بدون عبارت ضرب (جمله ۶: مدل افزایشی) و بعد با عبارت ضرب d_4 و d_5 (جملات ۷ و ۸ : مدل غیر افزایشی).

برای تحلیل کوواریانس به شکل رگرسیون دامی، دستورات به قرار زیر است:

```
1  LIST
2   COMPUTE NEWY =Y-4.
3   COMPUTE NEWX1 =X1-5.5.
4   COMPUTE NEWD4  =NEWX1*D2
5   COMPUTE NEWD5 = NEWX1*D3
6   REGRESSION /VARIABLES NEWY NEWX1 /DESCRIPTIVES ALL
7       /STATISTICS ALL/DEPENDENT NEWY/METHOD ENTER NEWX1
8    REGRESSION /VARIABLES NEWY D2 D3 /DESCRIPTIVES ALL
9       /STATISTICS ALL/DEPENDENT NEWY/METHOD ENTER D2 D3
10    REGRESSION /VARIABLES NEWY D2 D3 /DESCRIPTIVES ALL
11    /STATISTICS ALL/DEPENDENT NEWY/METHOD ENTER NEWX1  D2 D3
12    REGRESSION /VARIABLES Y NEWX1 D2 D3 NEWD4  NEWD5
13   / DESCRIPTIVES ALL/ STATISTICS ALL/ DEPENDENT Y
14       / METHOD ENTER NEWX1 D2 D3 NEWD4 NEWD5
```

جمله ۱ ماتریس داده‌ها را درخواست می‌کند. متغیر وابسته Y و کوواریه X_1 در سطح سنجش فاصله با نمرات ۰ تا ۹ اندازه گیری شده اند. می توانیم متغیرهای دامی d_2 و d_3 را با کدهای ۰ و ۱ کدگذاری کنیم، اما برای تنوع یک ماتریس طرح با کدهای ۱، ۰ و ۱- را برای d_2 و ۱، ۲- ، ۱ را برای d_3 بکار برده ایم. این کدگذاری گویای آن است که میانگین d_2 و همچنین d_3 برابر ۰ است، که خروجی کامپیوتر را می‌توان بازبینی نمود، چنان‌که دستور descriptive همه میانگینها را درخواست می‌کند. از این گذشته مجموع مضروبات نمرات d_2 و d_3 برابر ۰ است. به این معنی که ماتریس ضرب تقاطعی $\mathbf{X'X}$ مربوط به ماتریس طرح $\mathbf{X} = [d_2 d_3]$ قطری می باشد. به این ترتیب متعامد بودن تخمین زده می شود. این متعامد بودن را هم می توان از طریق ماتریس همبستگی وارسی کرد که در آن d_2 و d_3 ناهمبستگی ظاهر می شوند. دستور descriptives این ماتریس همبستگی را به دست می دهد. راه دیگر وارسی متعامد بودن متغیرهای مستقل در دستور "statistics" آمده است که درجه تحمل را در مدل رگرسیون برای هر متغیر مستقل به دست می دهد. این درجه تحمّل (آزادگی)، مقیاسی برای عدم چند هم خطی بودن است (متعامد بودن متغیرهای مستقل را بخوانید). اگر درجه تحمل برابر با ۱ باشد، و همبستگی بین متغیر مورد نظر و همه متغیرهای مستقل دیگر برابر ۰ باشد، آنگاه چند هم خطی بودن کامل را شاهد هستیم که البته جنبه نمایشی و غیر واقعی دارد.

در جملات ۲و ۳، Y و $X_۱$ به صورت انحراف از میانگین خود ($X_۱$ جدید و Y جدید) بیان شده اند، زیرا میانگین y برابر ۴ و میانگین $x_۱$ معادل ۵/۵ است. توجه داشته باشید که لازم نیست $d_۲$ و $d_۳$ به صورت انحراف از میانگین بیان شوند، چون نظام کدگذاری به گونه ای بنا شده است که میانگین معادل ۰ شود.

در جملات ۴ و ۵ عبارات ضرب $d_۴$ جدید و d_5 جدید حساب شده اند. این عبارات معرف حاصل ضرب کوواریه $X_۱$ جدید و هر یک از متغیرهای دامی $d_۲$ و $d_۳$ هستند. در جملات ۶ و ۷ اثر کوواریه $X_۱$ جدید بدون توجه به متغیرهای دیگر مورد تحلیل قرار گرفته است. اثر جذابیت تکلیف از جملات ۸ و ۹ به دست می آید که متغیرهای دامی $d_۲$ و $d_۳$ در آن متغیرهای مستقل هستند.

مدل افزایشی تحلیل کوواریانس در جملات ۱۰ و ۱۱ آزمایش می شود که شامل کوواریه $X_۱$ جدید و همچین متغیرهای دامی $d_۲$ و $d_۳$، بدون عبارت ضرب است.

در جملات ۱۲ تا ۱۴ نه تنها کوواریه $X_۱$ جدید و متغیرهای دامی $d_۲$ و $d_۳$ بلکه عبارات ضرب $d_۴$ جدید و $d_۵$ جدید هم گنجانده شده اند. لذا این پیچیده ترین مدل کلی می باشد. برای ایجاد تنوع ما نه تنها متغیر وابسته «انگیزش» را به صورت انحراف از میانیگن (y جدید) گنجانده ایم بلکه شکل نمرات اصلی (خام) Y آنرا هم آورده ایم. در نتایج کامپیوتری می توان مشاهده کرد که ثابت تابع رگرسیون ۰ نیست، بلکه میانگین انگیزش است (۴). با آگاهی ای که از تحلیل رگرسیون داریم این نتیجه دور از انتظار نیست.

نتایج سه تحلیل یاد شده به شرح زیر است:

Y	X_1	X_2
6	1	1
4	1	1
3	1	1
3	1	1
4	1	2
3	1	2
3	1	2
2	1	2
3	1	3
2	1	3
2	1	3
1	1	3
9	2	1
9	2	1
8	2	1
6	2	1
7	2	2
5	2	2
4	2	3
2	2	3

1	2	3
1	2	3

Number of cases read = 24 Number of cases listed = 24

Y intrinsic motivation

BY X_1 external rewards

Source of variation	Sum of squares	DF	Mean square	F	signif of F
Main Effects	24.000	1	24.000	4.889	.038
X_1	24.000	1	24.000	4.889	.038
Explained	24.000	1	24.000	4.889	.038
Residual	108.000	22	4.909		
Total	132.000	23	5.739		

24 cases were processed

0 cases (.0 PCT)were missing

Y intrinsic motivation

BY X_1 external rewards

X_2 task interest

Source of variation	Sum of squares	DF	Mean square	F	signif of F
Main Effects	88.000	3	29.333	18.857	.000
X_1	24.000	1	24.000	15.429	.001
X_2	64.000	2	32.000	20.571	.000
2-way Interaction	16.000	2	8.000	5.143	.017
X_1 X_2	16.000	2	8.000	5.143	.017
Explained	104.000	5	20.800	13.371	.000
Residual	28.000	18	1.556		
Total	132.000	23	5.739		

24 cases were processed

0 cases (.0 PCT)were missing

Y intrinsic motivation

BY X_1 external rewards

X_2 task interest

Source of variation	Sum of squares	DF	Mean square	F	signif of F
Main Effects	88.000	3	29.333	13.333	.000
X_1	24.000	1	24.000	10.909	.004
X_2	64.000	2	32.000	9.882	.001
Explained	88.000	3	29.333	13.333	.000
Residual	44.000	20	2.200		
Total	132.000	23	5.739		

****

Y	D_1	D_2	D_3
۶	۰	۱	۰
۴	۰	۱	۰
۳	۰	۱	۰
۳	۰	۱	۰
۴	۰	۰	۱
۳	۰	۰	۱

۳	۰	۰	۱
۲	۰	۰	۱
۳	۰	۰	۰
۲	۰	۰	۰
۲	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۰
۹	۱	۱	۰
۹	۱	۱	۰
۸	۱	۱	۰
۶	۱	۱	۰
۷	۱	۰	۱
۵	۱	۰	۱
۴	۱	۰	۱
۴	۱	۰	۱
۴	۱	۰	۰
۲	۱	۰	۰
۱	۱	۰	۰
۱	۱	۰	۰

Number of cases read = 24 Number of cases listed = 24
Listwise Deletion of Missing Data
Equation Number 1 Dependent variable .. Y intrinsic motivation
Block Number 1. Method: Enter D1

Variable(s) Entered on step Number
۱.. D1 external rewards

Multiple R .42640
R square .18182
Adjusted R square .14463
Standard Error 2.21565

Analysis of variance

	DF	Sum of squares	Mean square
Regression	1	24.00000	24.00000
Residual	22	108.00000	4.90909

F= 4.88889 signif f= .0377
Equation Number 1 Dependent variable .. Y intrinsic motivation
…………….variables in the Equation……………….

Variable	B	SE B	Beta	T	sig T
D1	2.000000	.904534	.426401	2.211	.0377
(constant)	3.000000	.639602		4.690	.0001

****

Listwise Deletion of Missing Data
Equation number 1 Dependent variable. Y intrinsic motivation
Block number 1. Method: Enter D2 D3

Variable (s) Entered on step Number
1.. D3 interest-dummy 2

2.. D2 interest-dummy 1

Multiple R .69631
R Square .48485
Adjusted R Square .43579
Standard Error 1.79947

Analysis of variance

	Df	Sum of Squares	Mean Squares
Regression	2	64.00000	14.09073
Residual	21	68.00000	3.23810

F = 9.88235 Signif F =.0009

Equation Number 1 Dependent Variable .. Y intrinsic motivation
…… Variables in the Equation…….

Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
D3	2.000000	.899735	.402015	2.223	.0373
D2	4.000000	.899735	.804030	4.446	.0002
(constant)	2.000000	.636209		3.144	.0049

****

Listwise Deletion of Missing Data
Equation Number 1 Dependent Variable .. Y intrinsic motivation
Block Number 1. Method : Enter D1 D2 D3

Variable(s) Entered on step Number
1… D3 interest-dummy 2
2.. D1 external rewards
3.. D2 interest-dummy 1

Multiple R .81650
R Square .66667
Adjusted R Square .61667
Standard Error 1.48324

Analysis of variance

	Df	Sum of Squares	Mean Squares
Regression	3	88.00000	29.33333
Residual	20	44.00000	2.20000

F = 13.33333 Signif F =.0001

Equation Number 1 Dependent Variable .. Y intrinsic motivation

…… Variables in the Equation…….

Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
D3	2.000000	.741620	.402015	2.697	.0139
D1	2.000000	.605530	.426401	3.303	.0036
D2	4.000000	.741620	.804030	5.394	.0000
(constant)	1.000000	.605530		1.651	.1143

****

Listwise Deletion of Missing Data
Equation Number 1 Dependent Variable .. Y intrinsic motivation
Block Number 1. Method : Enter
D1 D2 D3 D4 D5

Variable(s) Entered on step Number

1…	D5	
2..	D4	
3..	D3	interest-dummy 2
4	D2	interest-dummy 1
5	D1	external rewards

Equation Number 1 Dependent Variable .. Y intrinsic motivation

Multiple R	.88763
R Square	.78788
Adjusted R Square	.72896
Standard Error	1.24722

Analysis of variance

	Df	Sum of Squares	Mean Squares
Regression	5	104.00000	20.80000
Residual	18	28.00000	1.55556

F = 13.37143 Signif F =.0000

Equation Number 1 Dependent Variable .. Y intrinsic motivation

…… Variables in the Equation…….

Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
D5	2.000000	1.247219	.317821	1.604	.1262
D4	4.000000	1.247219	.635642	3.207	.0049
D3	1.000000	.881917	.201008	1.134	.2717
D2	2.000000	.881917	.402015	2.268	.0359
D1	-5.89523E-15	.881917	-1.257E-15	.000	1.0000
(constant)	2.000000	623610		3.207	.0049

****

Y	X1	D2	D3
۶	۸	۱	۱
۴	۵	۱	۱
۳	۲	۱	۱
۳	۳	۱	۱
۴	۸	۰	-۲
۳	۷	۰	-۲
۳	۶	۰	-۲
۲	۴	۰	-۲
۳	۴	-۱	۱

۲	۹	-۱	۱
۲	۸	-۱	۱
۱	۲	-۱	۱
۹	۹	۱	۱
۹	۷	۱	۱
۸	۶	۱	۱
۶	۴	۱	۱
۷	۵	۰	-۲
۵	۹	۰	-۲
۴	۳	۰	-۲
۴	۲	۰	-۲
۴	۶	-۱	۱
۲	۷	-۱	۱
۱	۵	-۱	۱
۱	۳	-۱	۱

Number of cases read = 24 Number of cases listed = 24

Listwise Deletion of Missing Data

	Mean	Std Dev	Variance	label
NEWY	.000	2.396	5.739	
NEWX1	.000	2.341	5.478	

N of cases = 24
Crrelation, covariance , 1-tailed sig , Cross –product:

	NEWY	NEWX1
NEWY	1.000	.341
	5.739	1.913
	.	.051
	132.000	44.000
NEWX1	.341	1.000
	1.913	5.478
	.051	.
	44.000	126.000

Equation Number 1 Dependent Variable .. NEWY
Block Number 1. Method : Enter.. NEWX1
Equation Number 1 Dependent Variable .. NEWY

Variable(s) Entered on step Number
1.. NEWX1

Multiple R	.34118		
R Square	.11640	R Square change	.11640
Adjusted R Square	.07624	F Change	2.89820
Standard Error	2.30252	Signif F Change	.1028

Analysis of variance

	Df	Sum of Squares	Mean Squares

Regression	1	15.36508	15.36508
Residual	22	116.63492	5.30159

F = 2.89820 Signif F =.1028

Equation Number 1 Dependent Variable .. NEWY

………… Variables in the Equation…….

Variable	B	SE B	95%confdnce	Intrv B	Beta
NEWX1	.349206	.205125	-.076196	.774609	.341178
(constant)	.000000	.469999	-.974719	. 974719	

………… Variables in the Equation…….

Variable	SE Beta	Correl	Part Cor	Partial	Tolerance	VIF
NEWX1	.200408	.341178	.34117	. 341178	1.000000	1.000

Equation Number 1 Dependent Variable .. NEWY

-------------In---------------

Variable	T	Sig T
NEWX1	1.702	.1028
(constant)	.000	1.0000

****

Listwise Deletion of Missing Data

	Mean	Std Dev	Variance	label
NEWY	.000	2.396	5.739	
D2	.000	.834	.696	interest-dummy 1
D3	.000	1.445	2.087	interest-dummy 2

N of cases = 24

Crrelation, covariance , 1-tailed sig , Cross –product:

	NEWY	D2	D3
NEWY	1.000	.696	.000
	5.739	1.391	.000
	.	.000	.500
	132.000	32.000	.000
D2	.696	1.000	.000
	1.391	.696	.000
	.000	.	.500
	32.000	16.000	.000
D3	.000	.000	1.000
	.000	.000	2.087
	.500	.500	.

.000	.000	48.000

Equation Number 1 Dependent Variable .. NEWY
Block Number 1. Method : Enter.. D2 D3
Equation Number 1 Dependent Variable .. NEWY

Variable(s) Entered on step Number
1.. D3 interest-dummy 2
2… D2 interest-dummy 1

Multiple R	.69631		
R Square	.48485	R Square change	.48485
Adjusted R Square	.43579	F Change	9.88235
Standard Error	1.79947	Signif F Change	.0009

Analysis of variance

	Df	Sum of Squares	Mean Squares
Regression	2	64.00000	32.00000
Residual	21	68.00000	3.23810

F = 9.88235 Signif F =.0009

Equation Number 1 Dependent Variable .. NEWY

………… Variables in the Equation…….

Variable	B	SE B	95%confdnce	Intrv B	Beta
D2	.000000	.259731	-.540141	.540141	.000000
D3	2.000000	.449868	1.064449	2.935551	.696311
(constant)	.000000	.367315	-.763874	. 763874	

………… Variables in the Equation…….

Variable	SE Beta	Correl	Part Cor	Partial	Tolerance	VIF
D3	.156624	.000000	.000000	.000000	1.000000	1.000
D2	. 156624	.696311	.696311	.696311	1.000000	1.000

Equation Number 1 Dependent Variable .. NEWY

-------------In---------------

Variable	T	Sig T
D3	.000	1.0000
D2	4.446	.0002
(constant)	.000	1.0000

Listwise Deletion of Missing Data

	Mean	Std Dev	Variance	label
NEWY	.000	2.396	5.739	
NEWX1	.000	2.341	5.478	
D2	.000	.834	.696	interest-dummy 1
D3	.000	1.445	2.087	interest-dummy 2

N of cases = 24

Crrelation, covariance , 1-tailed sig , Cross –product:

	NEWY	NEWX1	D2	D3
NEWY	1.000	.341	.696	.000
	5.739	1.913	1.391	.000
	.	.051	.000	.500
	132.000	44.000	32.000	.000
NEWX1	.341	1.000	.000	.000
	1.913	5.478	.000	.000
	.051	.	.500	.500
	44.000	126.000	.000	.000
D2	.696	.000	1.000	.000
	1.391	.000	.696	.000
	.000	.500	.	.500
	32.000	.000	16.000	.000
D3	.000	.000	.000	1.000
	.000	.000	.000	2.087
	.500	.500	.500	.
	.000	.000	.000	48.000

Equation Number 1 Dependent Variable .. NEWY
Block Number 1. Method : Enter. .NEWX1 D2 D3
Equation Number 1 Dependent Variable .. NEWY

Variable(s) Entered on step Number
1.. D3 interest-dummy 2
2… D2 interest-dummy 1
3.. NEWX1

Equation Number 1 Dependent Variable .. NEWY

Multiple R	.77540		
R Square	.60125	R Square change	.60125
Adjusted R Square	.54144	F Change	10.05227
Standard Error	1.62227	Signif F Change	.0003

Analysis of variance

	Df	Sum of Squares	Mean Squares
Regression	3	79.36508	26.45503
Residual	20	52.63492	2.63175

F = 10.05227 Signif F =.0003

Equation Number 1 Dependent Variable .. NEWY

………… Variables in the Equation…….

Variable	B	SE B	95%confdnce	Intrv B	Beta
D3	.000000	.234154	-.488436	.488436	.000000

D2	2.000000	.405566	1.154003	2.845997	.696311
NEWX1	.349206	.144523	.047737	.650676	.341178
(constant)	.000000	.331144	-.690753	. 690753	

………… Variables in the Equation…….

Variable	SE Beta	Correl	Part Cor	Partial	Tolerance	VIF
D3	.141200	.000000	.000000	.000000	1.000000	1.000
D2	. 141200	.696311	.696311	.740757	1.000000	1.000
NEWX1	.1411200	.341178	.341178	.475349	1.000000	1.000

Equation Number 1 Dependent Variable .. NEWY

-------------In---------------

Variable	T	Sig T
D3	.000	1.0000
D2	4.931	.0001
NEWX1	2.416	.0254
(constant)	.000	1.0000

Listwise Deletion of Missing Data

	Mean	Std Dev	Variance	label
Y	4.000	2.396	5.739	intrinsic motivation
NEWX1	.000	2.341	5.478	
D2	.000	.834	.696	interest-dummy 1
D3	.000	1.445	2.087	interest-dummy 2
NEWD4	.000	1.911	3.652	
NEWD5	.000	3.310	10.957	

N of cases = 24

Crrelation, covariance , 1-tailed sig , Cross –product:

	Y	NEWX1	D2	D3	NEWD4	NEWD5
Y	1.000	.341	.696	.000	.275	.192
	5.739	1.913	1.391	.000	1.261	1.522
	.	.051	.000	.500	.096	.185
	132.000	44.000	32.000	.000	29.000	35.000
NEWX1	.341	1.000	.000	.000	.000	.000
	1.913	5.478	.000	.000	.000	.000
	.051	.	.500	.500	.500	.500
	44.000	126.000	.000	.000	.000	.000
D2	.696	.000	1.000	.000	.000	.000
	1.391	.000	.696	.000	.000	.000
	.000	.500	.	.500	.500	.500
	32.000	.000	16.000	.000	.000	.000
D3	.000	.000	.000	1.000	.000	.000
	.000	.000	.000	2.087	.000	.000
	.500	.500	.500	.	.500	.500

	.000	.000	.000	48.000	.000	.000
NEWD4	.275	.000	.000	.000	1.000	.000
	1.261	.000	.000	.000	3.652	.000
	.096	.500	.500	.500	.	.500
	29.000	.000	.000	.000	84.000	.000
NEWD5	.192	.000	.000	.000	.000	1.000
	1.522	.000	.000	.000	.000	10.957
	.185	.500	.500	.500	.500	.
	35.000	.000	.000	.000	.000	252.000

Equation Number 1 Dependent Variable .. Y intrinsic motivation

Block Number 1. Method : Enter.
.NEWX1 D2 D3 NEWD4 NEWD5
Equation Number 1 Dependent Variable .. Y intrinsic motivation

Variable(s) Entered on step Number
1.. NEWD5
2.. NEWD5
3.. D3 interest-dummy 2
4… D2 interest-dummy 1
5.. NEWX1

Equation Number 1 Dependent Variable .. Y intrinsic motivation

Multiple R	.84494		
R Square	.71392	R Square change	.71392
Adjusted R Square	.63446	F Change	8.98411
Standard Error	1.44841	Signif F Change	.0002

Analysis of variance

	Df	Sum of Squares	Mean Squares
Regression	5	94.23810	18.84762
Residual	18	37.76190	2.09788

F = 8.98411 Signif F =.0002

Equation Number 1 Dependent Variable .. Y intrinsic motivation

………… Variables in the Equation…….

Variable	B	SE B	95%confdnce	Intrv B	Beta
NEWD5	.138889	.091241	-.052802	.330579	.191903
NEWD4	.345238	.158034	.013221	.677256	.275405
D3	.000000	.209060	-.439218	.439218	.000000
D2	2.000000	.362102	1.239252	2.760748	.696311
NEWX1	.349206	.129034	.078115	.620298	.341178
(constant)	4.000000	.295655	3.378852	4.621148	

Equation Number 1 Dependent Variable .. Y intrinsic motivation

………… Variables in the Equation…….

Variable	SE Beta	Correl	Part Cor	Partial	Tolerance	VIF
NEWD5	.126068	.191903	.191903	.337711	1.000000	1.000
NEWD4	.126068	.275405	.275405	.457787	1.000000	1.000
D3	.126068	.000000	.000000	.000000	1.000000	1.000
D2	. 126068	.696311	.696311	.740757	1.000000	1.000
NEWX1	.126068	.341178	.341178	.475349	1.000000	1.000

Equation Number 1 Dependent Variable .. Y intrinsic motivation

-------------In---------------

Variable	T	Sig T
NEWD5	1.522	.1453
NEWD4	2.185	.0424
D3	.000	1.0000
D2	5.523	.000
NEWX1	2.706	.0145
(constant)	13 .529	.0000

فصل ۸

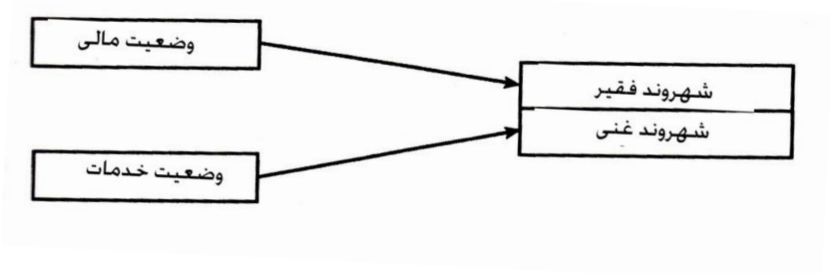
تحلیل افتراقی (تشخیصی) دوگروهی: همسایگان فقیر و غنی

۸-۱ مسأله تحقیق و طرح علّی

در تحقیق پیرامون تمایز بین همسایگان فقیر و غنی، شش متغیر متمایز کننده مشخص گردید (وضعیت مالی، وضعیت تحصیلی، وضعیت شغلی، موقعیت محل سکونت، سطح مشارکت اجتماعی ساکنین و وجود خدمات شهری) و این شش متغیر با هم از لحاظ توان تشخیص بین دو نوع همسایگان مورد آزمایش قرار گرفتند.

برای رعایت سادگی و فهم آسان‌تر، ما کار خود را به دو متغیر متمایز کننده وضعیت مالی (X_1) و سطح خدمات شهری (X_2) محدود می کنیم. در بخش ۵-۲-۱ گفته شد که تحقیق علمی روی خصوصیاتی که موجب تشخیص بین گروه‌های جمعیتی در جامعه می‌شود، دربر دارنده مبحثی شامل سه مرحله است. اولا و تا حد ممکن از پایایی، **یک طبقه‌بندی اولیه** از گروه‌ها به عمل می‌آوریم. این طبقه‌بندی که موضوع بحث است، متغیر وابسته (دو وجهی) Y با مقوله‌های فقیر و غنی را بیان می‌کند. دوم اینکه، برای خصیصه‌های مورد بررسی (در این جا دو خصیصه)، داده‌های آماری جمع‌آوری شده، ظرفیت متمایزکنندگی آن‌ها به وسیله **تحلیل** آماری تعیین و یک حاصل‌جمع وزن یافته محاسبه می‌گردد. این خصیصه‌ها همان متغیرهای مستقل X_1 و X_2 هستند، وزن‌های آن‌ها به ترتیب k_1 و k_2 است، و حا صل‌جمع وزن داده شده ی آن‌ها $k_1 X_1 + k_2 X_2$ است. در مرحله سوم، چنان چه تحلیل مرحله دوّم موفقیت‌آمیز به نظر برسد (ظرفیت تشخیص حاصل‌جمع وزن داده شده و هر یک از خصیصه‌ها به طور جداگانه معنادار باشد)، آنگاه ابزار خوبی برای دسته‌بندی واحدهای دیگر در یکی از گروه‌ها خواهیم داشت. این مرحله آخر، **طبقه‌بندی**، فرصتی فراهم می‌کند برای تعیین یک ملاک مستحکم در باره اینکه آیا همسایگانی که در تحلیل شرکت نداشته‌اند فقیر هستند یا غنی.

از آنچه گفته شد چنین بر می آید که ساختار تحلیل افتراقی (تشخیصی) شبیه به تحلیل رگرسیون است، به جز این که در این جا متغیر وابسته دو وجهی است نه کمّی. طرح علّی منطبق با این مسأله تحقیقاتی در زیر نشان داده شده است.



متغیرهای تشخیصی وضعیت مالی (X_1) و سطح خدمات (X_2) در سطح سنجش فاصله‌ای و نسبی اندازه‌گیری شده‌اند. همچون تحلیل چندگانه رگرسیون، این متغیرها را می‌توان به عنوان عامل‌های علّی در مدل علت و معلولی چندگانه به حساب آورد. متغیر وابسته Y دو گروه را نشان می‌دهد. می‌توان آن را به‌عنوان متغیر دو وجهی «توان مالی» با دو مقوله فقیر و غنی در نظر گرفت. به این دلیل ما از پیش‌بینی نمرات Y سخن نخواهیم گفت، بلکه به جای آن از طبقه‌بندی به دو گروه صحبت می‌کنیم. مدل هم مثل تحلیل رگرسیون چندگانه افزایشی است، بدین معنی که اثرات تعاملی در اصل وجود ندارند، یعنی یک حاصل‌جمع وزن یافته X_1 و X_2 دنبال می‌شود و عبارت ضرب $X_1 X_2$ مد نظر قرار نمی‌گیرد.

۸-۲ ماتریس داده‌ها

واحدهای تحلیل، مناطق شهری یا همسایگان هستند. در مجموعه داده‌های فرضی محدودمان، تعداد n=۱۵ شهروند (همسایه) را در نظر می‌گیریم.

متغیرهای مستقل X_1 و X_2 که متغیرهای تشخیصی (متمایز کننده) نیز نامیده می‌شوند، به صورت یک مقیاس فاصله‌ای با نمرات از ۰ تا ۹ اندازه‌گیری شده‌اند. وضعیت مالی (X_1) به صورت عملیاتی به عنوان میانگین درآمد هم سایگان تعریف شده ا ست. و سطح خدمات (X_2) یک شاخص کمّی است که از روی خدمات آموزشی، استراحت‌گاه‌های ویژه، تفریح، زمین‌های بازی کودکان، فضای سبز عمومی، خدمات اجتماعی و بهداشتی اندازه‌گیری شده است. متغیر وابسته توان مالی (Y) در سطح کیفی با مقوله‌های فقیر و غنی سنجیده شده ا ست. با توجه به رویکرد دامی، ما قبلاً کدهای ۰ و ۱ را به ترتیب برای مقوله‌های فقیر و غنی تعیین کردیم. ماتریس داده‌ها در جدول ۱-۸ آمده است.

جدول ۱-۸ ماتریس داده‌ها

Y	X_1	X_2
۰	۱	۱
۰	۱	۴

۱	۲	۰
۵	۴	۰
۵	۵	۰
۹	۵	۰
۲	۴	۱
۴	۴	۱
۶	۵	۱
۳	۶	۱
۶	۶	۱
۶	۷	۱
۷	۸	۱
۷	۹	۱
۸	۹	۱

۳-۸ مدل تحلیل افتراقی

از طریق تحلیل افتراقی دو گروهی می‌خواهیم به آزمون این موضـوع بپردازیم که آیا یک مجموعه از متغیرها (X_1 و X_2) قادر به تشخیص بین این دو گروه هستند. بنابراین ما در پی یک ترکیب خطی از متغیرهای متمایز کننده (X_1 و X_2) به طریقی هســـتیم که دو گروه (همســـایگان فقیر و غنی) با حداکثر تمایز از یکدیگر تفکیک شـــوند. چنین ترکیب خطی یک تابع افتراقی نامیده می‌شـــود و فرم کلی زیر را دارد:

$$T-\overline{T}=k_1(X_1-\overline{X}_1)+k_2(X_2-\overline{X}_2)+\ldots+k_1(X_p-\overline{X}_p)$$

یا

$$t=k_1x_1+k_2x_2+\ldots+k_px_p$$

در این فرمول t و x_i معرف نمرات انحراف از میانگین ه ستند (حروف کوچک)، ضرایب k_i، وزن‌های افتراق (تشـخیص) نامیده می‌شـوند. متغیرهای x_1 تا x_p متغیرهای متمایز کننده هســتند و p معرف تعداد آنها اســـت. در مثال ما، $p=2$ اســـت، در نتیجه، تابع افتراقی به این شـــکل ســـاده می‌شـــود: $t=k_1x_1+k_2x_2$.

این را می‌توان به وسیله علائم ماتریسی به شکل خیلی ساده‌تر به صورت **t=Xk** نوشت که در آن t یک بردار ستونی۱× ۱۵ از نمرات تشخیص است، **X** یک ماتریس ستونی۲× ۱۵ از نمرات متغیرهای تشخیصی و **k** یک بردار ستونی۱× ۲ ستونی از وزن‌های تشخیص است:

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ . \\ . \\ . \\ t15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-5.067 & 1-4.933 \\ 1-5.067 & 4-4.933 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 9-5.067 & 8-4.933 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

در حالت دو گروهی، تنها یک تابع تشخیصی وجود دارد. چنان چه چند گروه، مورد مقایسه قرار بگیرند، حداکثر تعداد تابع‌های تشخیصی درکمترین حد خواهد بود(p, g-۱). به طور مثال اگر g = ۴ گروه با ۵ = p متغیر تشخیصی مورد تحلیل قرار گیرد، آن گاه داریم ۳=۱ -g و ۵=p، طوری‌که حداکثر تعداد تابع‌های تشخیصی برابر ۳ است.

پس از محاسبه تابع یا توابع تشخیصی، آنگاه دو هدف اصلی تحلیل افتراقی یعنی تحلیل و طبقه‌بندی را می‌توان مورد بحث قرار داد.

در مرحله تحلیل، این مسأله مورد آزمون قرار می‌گیرد که آیا متغیرهای قادر به افتراق گروه‌ها هستند و تا چه حد. متغیرهای x قادر به تشخیص بین گروه‌ها هستند. در مرحله طبقه‌بندی ابتدا بررسی می شود که آیا تابع تشخیصی، از ۱۵ واحد مورد نظر طبقه‌بندی خوبی در گروه‌های متفاوت ارائه می‌کند. پس از آن، واحدهای جدیدی را می‌توان در گروه‌های متفاوت دسته‌بندی کرد. مثلاً اگر مشخص شد که میانگین درآمد و سطح خدمات یک شهروند به ۱۵ واحد تحلیل شده‌ی ما تعلق ندارد آنگاه می‌توان تعیین کرد که به چه گروهی تعلق دارد: فقیر یا غنی. مورد اخیر در واقع شکلی از پیش‌بینی است که می‌توان همه نوع قوانین طبقه‌بندی را برای آن بنا کرد. برای انجام این کار مرسوم است که حساب احتمالات، به ویژه آمار بیزی[1] به کار گرفته شود.

برای توضیح بیشتر، مدل تحلیل افتراقی را از زوایای مختلفی می‌توان نگاه کرد. ما ابتدا رویکرد کلاسیک را طبق روش فیشر دنبال می‌کنیم. در مرحله بعد رویکرد رگرسیون دامی را ارائه خواهیم کرد.

اجازه دهید ماتریس داده‌های زیر را به عنوان یک نقطه مرجع عینی به خاطر بسپاریم:

1-Bayesian Statisties

$$\begin{array}{ll} & \\ & ۱ \\ \text{گروه ۰} & \vdots \\ & n_۰ \\ & ۱ \\ \text{گروه ۱} & \vdots \\ & n_۱ \end{array}\begin{bmatrix} x_۱ & x_۲ & \cdots & x_p \\ & & & \\ & & & \\ - & - & - & - \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

دو گروه وجود دارد، گروه ۰ با واحدهای n_0 و گروه ۱ با واحدهای n_1. تابع تشـــخیصـــی t یک ترکیب خطی از p متغیر تشخیصی ($x_۱, x_۲,\dots, x_p$) بوده و بایستی به‌طریقی محاسبه شود که حداکثر تمایز بین دو گروه را به همراه داشته باشد. در نتیجه ما به ملاکی نیاز داریم که براساس آن حداکثر تمایز بین دو گروه به دســـت آید. برای معین کردن این ملاک به اصـــطلاحات فنی تحلیل واریانس کلاسیک و مخصوصاً به **آنوای** یک طرفه رجوع می‌کنیم.

به خاطر دارید که تحلیل واریانس شـــامل یک آزمون F در زمینه تفاوت بین میانگین‌های تعدادی گروه است و این F به صورت نسبت بین دو پراکندگی است: پراکندگی میانگین‌های گروهی (SSB) و پراکندگی واحدهای درون‌گروه‌ها (SSW- مشـــترک) که هر یک بر درجات آزادی خود تقســیم شــده‌اند. بدین ترتیب ملاک جذب تمایز میانگین‌های دو گروه به صــورت بالاترین نســبت واریانس بین‌گروهی و درون‌گروهی تعیین می‌شود.

در تحلیل افتراقی نیز ملاک مشـــابهی مورد اســـتفاده قرار می‌گیرد، به جز این که در تحلیل واریانس یک‌طرفه متغیر وابسته یک مقیاس فاصله‌ای یا نسبی را تشکیل می‌دهد و متغیر مستقل که چند گروه را تعریف می‌کند در سـطح پایین‌تر اندازه‌گیری شـده اسـت. در تحلیل افتراقی راه دیگری دور زده می‌شود: متغیر وابسته معرف گروه‌ها است و متغیرهای مستقل $x_1 \dots x_p$ در سطح سنجش فاصله‌ای اندازه‌گیری می‌شوند. در هر صورت به دو حالت ساختگی این روش توجه کنید. نخست این که مجموعه متغیرهای $x_1 \dots x_p$ با یک ترکیب خطی t جایگزین شـــده‌اند، به طوری‌که تنها یک متغیر در سـطح سـنجش فاصـله‌ای باقی می‌ماند (تذکر: در این جا حالت چندین تابع افتراقی را فعلاً کنار می‌گذرایم). ثانیاً جهت تحلیل عوض می‌شود، یعنی متغیر وابسته به عنوان متغیر مستقل به کار می‌رود. به این ترتیب تحلیل افتراقی، دست کم از جنبه‌ی آمار رسمی، به یک مسأله تحلیل واریانس یک‌طرفه تبدیل می‌شود.

این روشـی بود که رونالد فیشـر در ابتدا به آن دسـت یافت (در ۱۹۳۶). در بخش‌های بعدی، محاسبات براساس این رویکرد شبه آنوا انجام خواهد شد. نسبت واریانس بین‌گروهی و درون‌گروهی

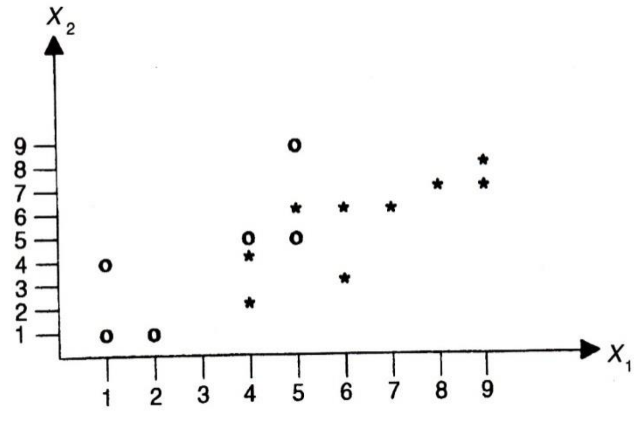
حداکثر خواهد بود. البته باید متذکر شـــویم که امروزه رویکردهای بســـیار دیگری همچون رویکرد تحلیل رگرســـیون چندگانه با متغیر وابســـته اســـمی و غیره وجود دارند. در بخش‌های بعدی آن‌ها را توضـیح خواهیم داد، امّا شـیوه فیشـر را بعد از چند بند توضـیح رویکرد هندسـی و اهداف آن، آغاز خواهیم کرد.

۸-۴ رویکرد هندسی

ابتدا نمودار پراکندگی داده‌ها را در شکل ۸-۱ رسم می‌کنیم. ما یک نظام مختصات با محورهای X_1 و X_2 را مورد اســـتفاده قرار می‌دهیم. نمرات گروه ۰ به صـــورت دایره (O) و نمرات گروه ۱ به‌صـــورت ستاره (*) نشان داده شده‌اند.

با یک نگاه به این نمودار روشـــن می‌شـــود که گروه دوم همســـایگان غنی دارای نمرات بالاتری نسبت به گروه اول در متغیر X_1 و همچنین X_2 هستند، چون ستاره‌ها (*) اغلب بالاتر و بیشتر به سمت راست پراکنده شده‌اند. به عبارت دیگر این گروه غالباً شامل همسایگانی می‌شود که از سطح درآمد و خدمات بالایی برخوردارند، نســـبت به گروه اول یعنی همســـایگان فقیر (O) که غالباً شـــامل همسایگانی است که در هر دو متغیر نمرات پایینی دارند.

لازم به ذکر اســـت که همبســـتگی بین وضـــعیت مالی و ســـطح خدمات در هر دو گروه مثبت و تقریباً به یک میزان است، زیرا اگر سعی کنیم یک خط رگرسیون از درون نقاط هر گروه بگذرانیم هر دو خط در جهت بالا رونده (ســطح درآمد بالاتر، ســطح خدمات بالاتر) و تقریباً موازی یکدیگر (میزان تقریباً یکسان شدت همبستگی بین سطح درآمد و سطح خدمات در هر دو گروه) پیش می‌روند.



شکل ۱-۸ نمودار شش شهروند فقیر و نه شهروند ثروتمند

اگر به پراکندگی متغیرها در هر یک از دو گروه نگاه کنیم، می‌بینیم که تغییرات درآمد از ۱ به ۵ در گروه اول (دامنه =۴) و از ۴ تا ۹ در گروه دوم (دامنه =۵) بوده و ســـطح خدمات از ۱ تا ۹ در

گروه نخست (دامنه =۸) و از ۲ تا ۸ در گروه دوم (دامنه =۶) در تغییر است. بنابراین به نظر می رسد که تفاوت بین پراکندگی‌ها در وضـعیت مالی چندان نیسـت (دامنه‌های ۴و ۵) و در سـطح خدمات قدری بزرگتر اسـت، اما باز هم محدود اسـت (دامنه های ۸ و ۶). این بسـیار حائز اهمیت اسـت؛ زیرا همسـان بودن تقریبی پراکندگی‌های X_1 و X_2 و همبسـتگی بین X_1 و X_2 در درون گروه‌ها برای به کارگیری تحلیل افتراقی ضـروری اسـت (همچون شـرط هم‌واریانسـی در تحلیل واریانس). به زبان فنی‌تر، ماتریس واریانس–کوواریانس گروه ۰ و گروه ۱ نباید تفاوت معناداری داشـته باشـند. در بخش‌های بعدی خواهیم دید که در مورد مثال ما این ضابطه برقرار است.

این مبحث را به صورت ترسیمی بهتر می‌توان تتوضیح داد. ما نمونه‌هایی از مشاهدات را فرض می‌گیریم که نمودار نقطه‌ای آن‌ها به شکل بیضی با تراکم ۹۵٪ است، یعنی بیضی‌هایی که ۹۵٪ از مشاهدات را در بر می‌گیرند. در شکل ۲-۸ چنین بیضی‌هایی را ترسیم کرده‌ایم. این نوع بیان مطلب از کولی و لونز[1] (۱۹۷۱- ص ۲۴۵) به عاریت گرفت شده است.

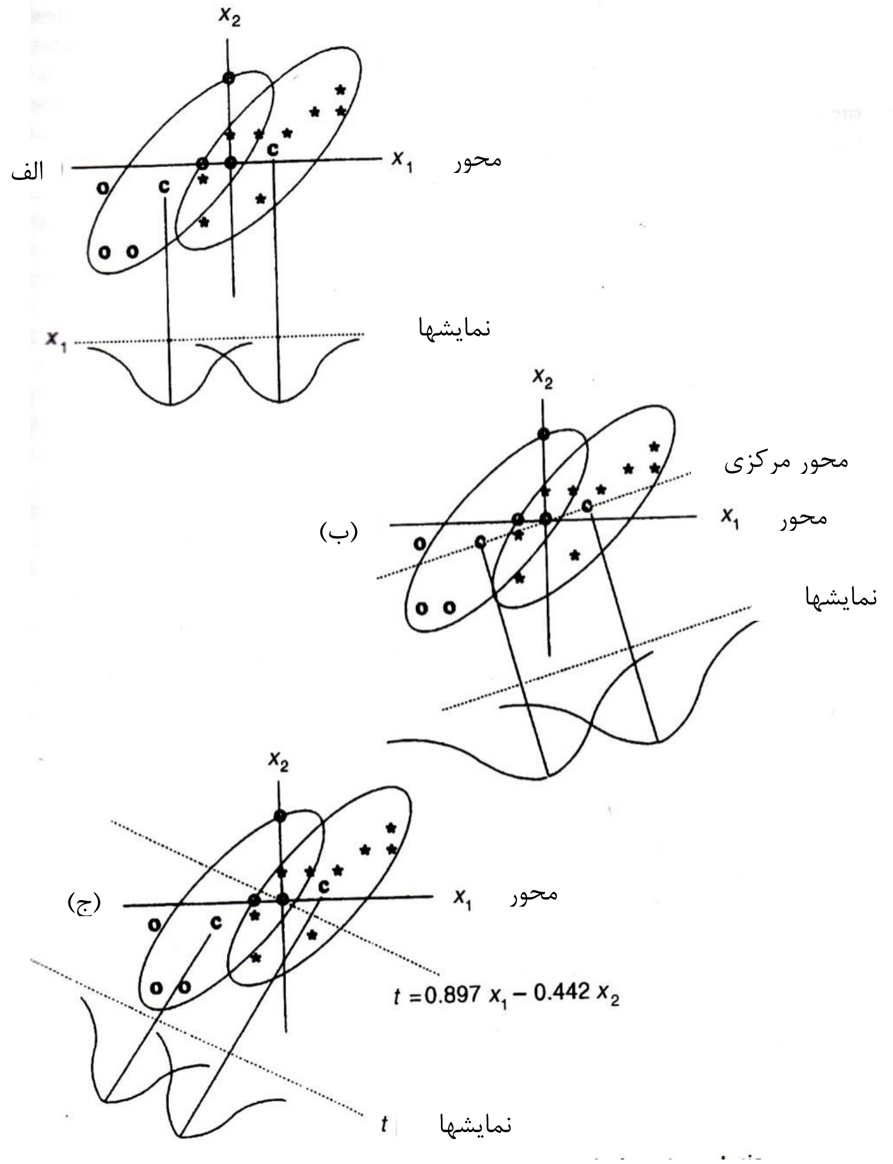
در هر یک از سه قسمت شکل ۲-۸ (الف)، (ب) و (ج) داده‌ها در فضای x_1- x_2 ترسیم شده‌اند. نمرات x_1 و x_2 در این جا به صورت انحراف از میانگین نشان داده شده‌اند. برای هر گروه یک بیضی تراکم رسـم شـده اسـت. در مرکز هر بیضـی حرف c را نشـان داده‌ایم، یعنی مرکز ثقل یا جایی که میانگین‌ها به هم می‌رسند. مرکز کل برای تمام گروه ۱۵ شهروند در مبدأ واقع می شود، زیرا نمرات، انحراف از میانگین کل می‌باشـند (یادآوری: برای این گروه کل یک بیضـی تراکمی بزرگ هم می‌توان کشید). بیضی‌ها در جهت رو به بالا قرار گرفته‌اند، چون x_1 و x_2 با هر گروه همبستگی مثبت دارند و محورهای اصلی بیضی‌ها تقریباً موازی هستند، به دلیل این که این همبستگی تقریباً شدت یکسانی در دو گروه دارد.

اکنون یک ترکیب خطی از $t = k_1x_1 + k_2x_2$ جسـتجو می‌کنیم، محوری که از مبدأ در فضای x_1-x_2 طوری کشیده شود که t بهترین تمایز بین دو گروه را نشان دهد. این حالت را می‌توان با مشـخص کردن همسـایگان هر گروه بر روی محور t (نمایش‌های متعامد) و مشـاهده واریانس‌های درون‌گروهی و بین‌گروهی بررسـی نمود. ملاک ما این اسـت که نسـبت واریانس‌های بین‌گروهی و درون‌گروهی بیشترین مقدار ممکن باشد. برای اینکه بینش بهتری نسبت به این مکانیزم پیدا کنیم، در هر بخش از شـکل ۲-۸ یک حالت فرضـی از محور t را جدا می‌کنیم. این محورها به صـورت خط‌چین رسم شده‌اند و زیر تصویر هم بعد از انتقال موازی دو باره رسم شده‌اند تا نمایش‌ها به طور جداگانه به شکل توزیع زمان برای هر یک از دو گروه نشان داده شوند.

در شـکل۲-۸ (الف) ما x_1 را به عنوان یک نامزد احتمالی برای یک محور خوب در نظر گرفته‌ایم. با دقت در نمایش‌ها مشـاهده می‌شـود که دو مرکز ثقل گروه‌ها خیلی از هم دور شـده‌اند.

1 . Cooley & Lohenes

برآورد دقیق آن با خط‌کش ۱/۴ سانتی متر است. بنابراین یک تمایز خوب بنا شده است. اما پراکندگی مراکز ثقل همسایگان در هر گروه بزرگ است و در نتیجه همپوشی قابل توجهی بین دو گروه وجود دارد. یک برآورد دقیق پراکندگی درون‌گروهی ۲/۸ سانت است. آنگاه نسبت بین‌گروهی بر درون‌گروهی معادل ۰/۵ = ۲/۸ ÷ ۱/۴ خواهد بود.



شکل ۲-۸ ترسیم هندسی تحلیل تشخیصی دو گروهی

در شکل ۲-۸ (ب) ارتباط بین دو مرکز ثقل به صورت یک محور احتمالی t منظور شده است. به نظر می‌رسد این محور ارتباط مرکز ثقل، یک انتخاب خیلی بد باشد. از این رو، گرچه دو مرکز ثقل گروه‌ها حتی بیشتر از شکل قبلی از هم دور گشته‌اند (تقریبا: ۱/۶ سانت)، پراکندگی درونی خیلی بالاست (تقزیبا: ۴/۰ سانت) و در نتیجه، در مورد همپوشی بین دو توزیع نیز همین‌گونه است. نسبت بین‌گروهی به درون‌گروهی در اینجا معادل ۰/۴ = ۴/۰ ÷ ۱/۶ خواهد بود.

بهترین محور t در شکل ۲-۸ (ج) نمایش داده شده است. این ترکیب خطی $t= ۰/۸۹۷x_1 - ۰/۴۴۲x_2$ است، محاسبه آن در زیر نشان داده خواهد شد. در این شکل می‌بینیم که دو مرکز گروه‌ها اکنون بیشتر به هم نزدیک هستند (تقریبا ۱/۰ سانت)؛ لذا اگر به طور اشتباه تحلیل را به بررسی توزیع درون‌گروهی محدود کنیم، انتظار تمایز کوچکتری را بین گروه‌ها خواهیم داشت. اما وقتی توزیع درون‌گروهی را هم به حساب آوریم، می‌بینیم که این‌ها بسیار کوچکتر از دو شکل قبل هستند (تقریبا: ۱/۵ سانت). نسبت توزیع بین‌گروهی به درون‌گروهی در این حالت خیلی بزرگتر است: ۰/۶۷ = ۱/۵ ÷ ۱/۰. این نسبت بزرگتر از ۰/۴ (شکل ۲-۸ (ب)) و ۰/۵ (شکل ۲-۸ (الف) است.

از آنچه گفته شد پاره‌ای مطالب کلی را می‌توان فهمید. اولاً بهترین محور لزوماً آن محوری نیست که مرکزهای ثقل نمایش‌های آن بیشترین فاصله را از هم داشته باشند. به بیان دیگر **محور مرکزی**، که مرکزهای ثقل دو گروه را به هم وصل می‌کند، همواره بهترین محور نیست. فقط در حالتی این درست است که دو بیضی متمرکز، هر دو به شکل دایره باشند، یعنی وقتی‌که در مورد هر یک از آن‌ها دو شرط لازم برآورده شود: (۱) واریانس‌های متغیرهای $x_۱$ و $x_۲$ برابر باشند (۲) کوواریانس بین متغیرهای $x_۱$ و $x_۲$ برابر صفر باشد. در زیر خواهیم دید که واریانس $x_۱$، واریانس $x_۲$ و کوواریانس $x_۱$ و $x_۲$ در یک ماتریس برای هر گروه گرد آمده‌اند، که ماتریس کوواریانس درون گروه‌ها نامیده می‌شود. اگر یک بیضی متمرکز به شکل دایره باشد، افراد خارج از قطری این ماتریس همگی صفر هستند (عدم وجود کوواریانس) و عناصری که روی قطر اصلی قرار دارند هم‌سنگ[1] (هم واریانس) می‌باشند. درا ین حالت از ماتریس سنجش صحبت می شود. اگر بیضی‌ها دایره‌ای نبوده، سیگاری شکل باشند و اگر این سیگارهای دوکی به طور مایل در سمت بالا یا پایین امتداد نداشته باشند (همچون مثال ما) بلکه عمودی یا افقی قرار گرفته باشند، در این صورت ماتریس‌های کوواریانس درون‌گروهی قطری هستند نه متوازن[1]. قطری هستند، به دلیل این که رابطه بین $x_۱$ و $x_۲$ معادل ۰ است. غیرمتوازن هستند، زیرا پراکندگی‌های $x_۱$ و $x_۲$ یکسان نیستند (بالاترین واریانس برای متغیر در جهت امتداد محور سیگار است). در این حالت نیز تابع افتراقی محور ارتباطی بین مراکز نیست، بلکه محوری است که در آن متغیر دارای واریانس کمتر، وزن بیشتری به دست می‌آورد.

1. Scalar

یک مطلب کلی دیگر به **علامت** K_1 و K_2 در تابع افتراقی $t = k_1x_1 + k_2x_2$ بر می‌گردد. در شـــکل ۲-۸ (ب) دیدیم که محور مرکزی انتخاب مناســـبی نیســـت. این محور مایل بوده و در جهت راســـت بالا رونده اســـت، بدین ترتیب وزن K_1 و K_2 هر دو مثبت اســـت. به طور مثال تابع خطی $t = 7x_1 + 3x_2$ تقریباً این خط ارتباطی دو مرکز را نشـان می‌دهد. از سـوی دیگر در شـکل ۲-۸ (ج) محور مـایـل t پـایین رونـده اســـت. در این جـا ترکیـب خطی بـه وســـیلـه تـابع $t = ۰.۸۹۷x_1 - ۰.۴۴۲x_2$ نشـان داده می‌شـود که در آن k_1 مثبت و k_2 منفی اسـت. این به دلیل رابطه مثبت بین متغیرهای x_1 و x_2 اسـت: بهترین محور در جهت خلاف همبســتگی $x_1 - x_2$ امتداد می‌یابد.

به طور خلاصه: k_1 و k_2 علامت مثبت خواهند داشت اگر همبستگی‌های درون گروهی مثبت باشند، و علائم یکسان خواهند داشت، اگر همبستگی‌های درون‌گروهی منفی باشند.

۸-۵ اهداف این شیوه

اهداف تحلیل افتراقی سه چیز است. با در نظر گرفتن مثال هم سایگان فقیر و ثروتمند (دو گروه) و محدود کردن خود به دو متغیر متمایز کننده (x_1 و x_2)، این هدف‌ها را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

۱- ما یک تابع خطی $t = k_1x_1 + k_2x_2$ را که تابع افتراقی نامیده می‌شـــود به شـــکلی جســـتجو می‌کنیم که نمرات همسایگان روی این تابع t (نمرات تشخیص) خاصّیت حداکثر تغییرپذیری نسبت بین‌گروهی و درون‌گروهی را نشان دهند. این هدف با محاسبه وزن‌های تشخیصی k_1 و k_2 و سپس محاسبه ۱۵ نمره تشخیصی به عمل در می‌آید.

۲- ما به آزمون این مســأله می‌پردازیم که آیا تمایز صــورت گرفته توســط تابع می تواند به جمعیت مورد مطالعه تعمیم یابد. آیا تفاوت معناداری بین دو مرکز گروهی وجود دارد، یعنی آیا بین میانگین‌های دو گروه در مقایســـه با هم تفاوت معناداری وجود دارد؟ این هدف با انجام آزمون T^2 هاتلینگ که شکل بسط یافته آزمون t استیودنت است برآورده می‌شود.

۳- همچنین با انجام تحلیل افتراقی می‌خواهیم هریک از همســـایگان را از هم متمایز کنیم و حتی همسایگان جدید را در این گروه‌ها جای دهیم. با دانش و اطلاعاتی که در زمینه نمرات درآمد و سطح خدمات شهروندان به دست آورده‌ایم، آیا می‌توانیم فقیر و غنی بودن را پیش بینی کنیم؟ این کار با تعیین یک نقطه برش و بررســی این که نمرات تشــخیصــی در ســمت راســت یا چپ این نقطه واقع شده‌اند، عملی می شود. اگر یک نمره تشخیصی معادل نقطه برش باشد، شهروند مربوطه را به طور تصادفی می‌توان به یکی از دو گروه تخصیص داد.

این فرایند دســـته‌بندی واحدها در گروه‌ها اغلب در ســـتون جامع‌تر نظریه طرح آماری و آمار بیزی تشـــریح شـــده اســـت. برای اطلاع بیشـــتر به کتب پیشـــرفته در این زمینه مراجعه کنید.

۸-۶ محاسبات مقدماتی: ماتریس‌های W،B،T و CW

برای یافتن تابع t بایستی پاره‌ای محاسبات مقدماتی را انجام دهیم. به محاسبه میانگین، پراکندگی و همبســـتگی متغیرهای $X_۱$ و $X_۲$ برای کل گروه و برای هر یک از گروه‌ها به طور جداگانه می‌پردازیم (جدول ۲-۸). ســـپس نتایج در بردارها و ماتریس‌های **B،T** و **W** جمع‌آوری شــده و یک ویژگی مهم، **T=B+W**، به نمایش در می‌آید.

جدول ۲-۸ میانگین‌ها، پراکندگی و همبستگی متغیرهای $X_۱$ و $X_۲$

X_2	X_1	Y	کل نمونه
۱	۱	۰	
۴	۱	۰	
۱	۲	۰	
۵	۴	۰	
۵	۵	۰	
۹	۵	۰	
۲	۴	۱	
۴	۴	۱	
۶	۵	۱	
۳	۶	۱	
۶	۶	۱	
۶	۷	۱	
۷	۸	۱	
۷	۹	۱	
۸	۹	۱	
۷۴	۷۶	$\Sigma X_i =$	مجموع
۴/۹۳۳	۵/۰۶۷	$\overline{X}_i =$	میانگین
۸۲/۹۳۳	۹۰/۹۳۳	$\Sigma(X_۱ - \overline{X}_۱)^۲ =$	مجموع مجذورات
۵/۹۲۴	۶/۴۹۵	$s_i^۲ =$	واریانس
		$\Sigma(X_۱ - \overline{X}_۱)(X_۲ - \overline{X}_۲) =$ ۶۳/۰۶	مجموع مضروبات
		$S_{۱۲} =$ ۴/۵۰۵	کوواریانس

گروه ۰

گروه ۰	Y	X_1	X_2
	۰	۱	۱
	۰	۱	۴
	۰	۲	۱
	۰	۴	۵
	۰	۵	۵
	۰	۵	۹
مجموع	$\Sigma X_i =$	۱۸	۲۵
میانگین	$\overline{X}_i =$	۳	۴/۱۶۷
مجموع مجذورات	$\Sigma(X_1 - \overline{X}_1)^2 =$	۱۸	۴۴/۸۳۳
واریانس	$s_i^2 =$	۳/۶	۸/۹۶۷
مجموع مضروبات	$\Sigma(X_1 - \overline{X}_1)(X_2 - \overline{X}_2) =$ ۲۲		
کوواریانس	$S_{12} =$ ۴/۴		

گروه ۱

گروه ۱	Y	X_1	X_2
	۱	۴	۲
	۱	۴	۴
	۱	۵	۶
	۱	۶	۳
	۱	۶	۶
	۱	۷	۶
	۱	۸	۷
	۱	۹	۷
	۱	۹	۸
مجموع	$\Sigma X_i =$	۵۸	۴۹
میانگین	$\overline{X}_i =$	۶/۴۴۴	۵/۴۴۴
مجموع مجذورات	$\Sigma(X_1 - \overline{X}_1)^2 =$	۳۰/۲۲۲	۳۲/۲۲۲
واریانس	$s_i^2 =$	۳/۷۷۸	۴/۰۲۸
مجموع مضروبات	$\Sigma(X_1 - \overline{X}_1)(X_2 - \overline{X}_2) =$ ۲۵/۲۲۲		
کوواریانس	$S_{12} =$ ۳/۱۳		

اجاره دهید ابتدا نگاهی به میانگین‌ها کنیم. چند متغیر (در این جا دو متغیر) و در نتیجه چند میانگین وجود دارد. که این ها را در یک بردار جمع کرده‌ایم. چنین برداری یک مرکز ثقل

نامیده شده و به صورت $\overline{\mathbf{X}}'$ نشان داده می شود. حرف کوچک پررنگ نشان دهنده یک بردار است. نشانه پریم (') نشان می‌دهد که بردار ستونی به یک بردار ردیفی تبدیل شده و علامت بار (-) نشانه میانگین‌هاست. سه مرکز ثقل وجود دارد یکی برای گروه ۰، یکی برای گروه ۱ و یکی برای کل گروه:

گروه ۰: $\overline{\mathbf{X}}'_0 =$ (۳ ۴/۱۶۷)

گروه ۱: $\overline{\mathbf{X}}'_1 =$ (۶/۴۴۴ ۵/۴۴۴)

کل نمونه : $\overline{\mathbf{X}}' =$ (۵/۰۶۷ ۴/۹۳۳)

توجه داشته باشید که تفاوت‌های بین دو مرکز ثقل گروه را می‌توان در یک بردار اختلاف $\mathbf{d}$ ($\mathbf{d}$ معرف تفاوت) هم جمع کرد که در آن تفاوت میانگین‌های دو گروه روی هم ریخته شده است.

$$\mathbf{d} = \bar{X}_0 - \bar{X}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4.167 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6.444 \\ 5.444 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.444 \\ -1.277 \end{bmatrix}$$

سپس به تغییرات و هم‌تغییری‌ها[1] نگاه می‌کنیم. این ها در ماتریس واریانس و کوواریانس‌ها گرد آمده‌اند که آن هم ماتریس مجموع مجذورات و حاصل‌ضرب‌ها نامیده می‌شود (ماتریس SSCP)، زیرا تغییرات، مجموعه مجذورات هستند و هم تغییری‌ها مجموعه حاصل ضرب‌ها می باشند. از کل نمونه شروع می‌کنیم. تغییرات $X_۱$ معادل ۹۰/۹۳۳، تغییرات $X_۲$ معادل ۸۲/۹۳۳، و هم تغییری $X_۱$ و $X_۲$ برابر ۶۳/۶۷ است. این نتایج در ماتریس $\mathbf{T}$ ($\mathbf{T}$ نشانه کل) جمع شده‌اند:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \text{تغییرات } X_1 & \text{تغییرات همگام} \\ \text{تغییرات همگام} & \text{تغییرات } X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90.933 & 63.067 \\ 63.067 & 82.933 \end{bmatrix}$$

برای تشکیل ماتریس SSCP (مجموعه مجذورات و حاصل‌ضرب‌های) درون‌گروهی $\mathbf{W}$ ($\mathbf{W}$ نشانه درون‌گروهی)، تغییرات و هم تغییرهای گروه ۰ و گروه ۱ با هم جمع می‌شوند. تغییرات درون‌گروهی $X_۱$ برابر است با ۴۸/۲۲۲=۳۰/۲۲۲+۱۸، تغییرات درون گروهی $X_۲$ برابر است با ۷۷/۰۵۶=۳۲/۲۲۲+۴۴/۸۳۳ و هم تغییری درون‌گروهی برابر است با ۴۷/۲۲۲=۲۵/۲۲۲+۲۲:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 18 & 22 \\ 22 & 44.833 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30.222 & 25.222 \\ 25.222 & 32.222 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48.222 & 47.222 \\ 47.222 & 77.056 \end{bmatrix}$$

برای تبدیل تغییرات و هم تغییری‌ها به واریانس و کوواریانس باید آن‌ها را بر تعداد درجات آزادی مربوطه تقسیم کرد. برای محاسبات درون‌گروهی یک درجه آزادی را در میانگین گروه ۰ و یک درجه آزادی را در میانگین گروه ۱ از دست می‌دهیم. بدین ترتیب برای گروه ۰ تعداد مناسب برابر n_0-۱ =۶-۱=۵ و برای گروه ۱ معادل n_0-۱=۹-۱=۸ است. برای محاسباتی که شامل هر دو گروه می شود چنین است: ۱۳ = (۱-۹) +(۱-۶)=(۱-$n_۱$) Σ. اگر ماتریس $\mathbf{W}$ را بر ۱۳ تقسیم کنیم $\mathbf{C_W}$ به

۱. [به ترتیب به معنای مجموع مجذورات انحراف نمرات از میانگین و مجموع حاصل ضربهای این نمرات (مضروبات).]

دســـت می‌آ ید، یعنی «ماتریس کووار یانس درون‌گروهی مجتمع». عبارت درون‌گروهی مجتمع به معنای آن اســـت که واریانس‌ها و کوواریانس‌ها درون‌گروهی $\mathbf{c_W}$ معدل جمعی نمرات گروه‌های ۰ و ۱ هســـتند (به طور دقیق‌تر: یک میانگین وزن یافته با وزن های ۵ و ۸). ماتریس های کووار یانس درون‌گروهی $\mathbf{C}_\cdot$ و $\mathbf{C}_1$ و «درون گروهی جمعی» $\mathbf{C_W}$ در زیر آمده است:

$$\mathbf{c_0} = \begin{bmatrix} 18.5 & 22/5 \\ 22.5 & 44.833 \div 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6 & 4.4 \\ 4.4 & 8.967 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c_1} = \begin{bmatrix} 30.222 \div 8 & 25.222 \div 8 \\ 25.222 \div 8 & 32.22 \div 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.778 & 3.153 \\ 3.153 & 4.028 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c_w} = \begin{bmatrix} 48.222 \div 13 & 47.222 \div 13 \\ 47.222 \div 13 & 77.056 \div 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.709 & 3.632 \\ 3.632 & 5.927 \end{bmatrix}$$

اینک ماتریس **B** یعنی ماتریس SSCP بین گروهی را تشـــکیل می‌دهیم (**B** نشـــانه بین گروهی ا ست). توجه دا شته با شید ماتریس داده‌ها در این جا فقط یک ماتریس دو واحدی گروه ۰ و گروه ۱ ا ست. و متغیرها، X_1 و X_2 نی ستند، بلکه میانگین‌های آن ها ست. نمرات مندرج در ماتریس داده‌ها میانگین‌های درون‌گروهی هستند (جدول **۳-۸**).

جدول ۳-۸ ماتریس بین‌گروهی داده‌ها

	Y	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$
	۰	۳	۴/۱۶۷
	۱	۶/۴۴۴	۵/۴۴۴
grand mean		۵/۰۶۷	۴/۹۳۳
between-variation		۴۲/۷۱۱	۵/۸۷۸
Covariation	۱۵/۸۴۴		

در این محاسبات یک شیوه وزن‌دهی اعمال شده است، زیرا فراونی‌ها در گروه‌های ۰ و ۱ نابرابرند ($n_\cdot$=۶ و n_1=۹). مثلاً میانگین کل متغیر درآمد این گونه محاسـبه می‌شـود: $۵.۰۶۷ = ۱۵ \div [(۹)۶.۴۴۴ + (۶)۳]$. برای متغیر خدمات هم محاسبات به همین ترتیب است.

تغییرات بین گروهی میانگین‌های متغیر X_1 نشان از آن دارد که بیش از دو مورد وجود ندارد، چون فقط دو گروه وجود دارد. به‌منظور فراهم شـدن امکان مقایســه با ماتریس‌های **T** و **w** تغییرات

بین‌گروهی به طریقی محاسبه شده است که به وسیله اعمال وزن‌های ۶ و ۹ به ۱۵ حالت رجوع می‌کند: $[۶(۳-۵.۰۶۷)^{۲}]+[۹(۶.۴۴۴-۵.۰۶۷)^{۲}]=۴۲.۷۱۱$. برای متغیر $X_۲$ هم محاسبات به همین صورت است.

محاسبه کوواریانس هم به شکل مشابهی صورت می گیرد:

$$[۶(۳-۵.۰۶۷)(۴.۱۶۷-۴.۹۳۳)]+[۹(۶.۴۴۴-۵.۰۵۷)(۵.۴۴۴-۴.۹۳۳)]=۱۵.۸۴۴$$

ماتریس تغییرات بین گروهی و کوواریانس ها، همه این محاسبات را در کنار هم گرد می‌آورد:

$$B=\begin{bmatrix} ۴۲.۷۱۱ & ۱۵.۸۴۴ \\ ۱۵.۸۴۴ & ۵.۸۷۸ \end{bmatrix}$$

می‌بینیم که **T=W+B**. بنابراین **B** را با محاسبه تفاوت **T-W** حساب می‌کنیم.
اکنون می‌توانیم از محاسبات مقدماتی گذشته به تعیین تابع افتراقی بپردازیم.

۸-۷ محاسبه تابع افتراقی t

تاکنون دانستیم که تابع t یک ترکیب خطی از $x_۱$ و $x_۲$ است. از حروف کوچک برای t و x_i استفاده کردیم چون آن‌ها معرف انحرافات از میانگین هستند. از سوی دیگر اگر نمرات اصلی X_i مورد استفاده قرار گیرند، آنگاه تابع t شامل یک عبارت ثبات (عرض از مبدأ) هم خواهد بود. البته این حالت در این جا و بعد از آن به‌کار نمی‌رود، طبق رویکرد هندسی، محور تمایز از مبدأ عبور خواهد کرد. وزن های تشخیصی ناشناخته، $k_۱$ و $k_۲$ هستند. از این رو تابع افتراقی به شکل زیر است:

$$t=k_۱x_۱+k_۲x_۲$$

این تابع t به رو شی محا سبه می شود که بیشترین تمایز ممکن بین دو گروه را نشان دهد، یعنی نسبت پراکندگی بین‌گروهی و درون‌گروهی حداکثر باشد. بدین منظور تغییرات t به درون‌گروهی و برون‌گروهی به شرح زیر تقسیم می‌شود.

می دانیم که تغییرات (مجموعه مجذورات) برابر است با مجموع مجذورات انحرافات از میانگین. با توجه به توضیحی که قبلاً دادیم به عنوان یک انحراف از میانگین، تغییرات t هم به سادگی مجموعه مجذورات t می‌باشد:

$$t=k_1x_1+k_2x_2$$

$$\Sigma t^{۲} = \Sigma[k_{۱}x_{۱} + k_{۲}x_{۲}]^{۲}$$
$$= \Sigma[k_{۱}^{۲}x_{۱}^{۲} + k_{۲}^{۲}x_{۲}^{۲} + ۲k_{۱}x_{۲}x_{۲}x_{۲}]$$
$$= k_{۱}^{۲}\Sigma x_{۱}^{۲} + k_{۲}^{۲}\Sigma x_{۲}^{۲} + ۲k_{۱}k_{۲}\Sigma x_{۱}x_{۲}$$

که

$$\Sigma x_1^2 = ۹۰/۹۳۳$$
$$\Sigma x_2^2 = ۸۲/۹۳۳$$
$$\Sigma x_1 x_2 = ۶۳/۰۶۷$$

که در بالا محاسبه شده و در ماتریس $\mathbf{T}$ گرد آمده‌اند. این مقادیر را در معادله جایگزین می‌کنیم: $\Sigma t^2 = 90.933k_1^2 + 82.933k_2^2 + 63.067(2k_1k_2)$. به خاطر داریم که $\mathbf{T=B+W}$، و از این رو هر مقدار $\mathbf{T}$ به دو بخش بین‌گروهی و درون‌گروهی قابل تقسیم است:

$$\Sigma t^2 = (42.711 + 48.222)k_1^2 + (5.878 + 77.056)k_2^2 + (15.844 + 47.222)(2k_1k_2)$$
$$= [42.711k_1^2 + 5.878k_2^2 + 31.688K_1k_2] + [48.222k_1^2 + 77.056k_2^2 + 94.444k_1k_2]$$

= بخش بین گروهی + بخش درون گروهی

در رویکرد هند سی، دو بیـضی مرکز فوق را روی یک محور t نمایش دادیم و برآورد غیر دقیقی از پراکندگی درون‌گروهی و بین‌گروهی با یک خط‌کش به‌عمل آوردیم. این‌ها برآوردهایی هســـتند که در این جا به عنوان بخش‌های بین‌گروهی و درون‌گروهی $\Sigma t^{۲}$ محاسبه شده‌اند.

محاسبات فوق را می‌توان به شکل کوتاه به وسیله علائم ماتریسی نشان داد. آنگاه تابع افتراقی به شکل ساده $\mathbf{t=Xk}$ در می‌آید (در این جا حروف بزرگ $\mathbf{X}$ به کار برده شده است، زیرا یک ماتریس را نشـــان می دهد نه یک بردار، و برای آن کاربرد انحرافات از میانگین را فرض می‌گیریم). تغییرات t اکنون به صورت $\mathbf{t't}$ نوشته می‌شود.

$$\mathbf{t't} = \mathbf{(Xk)'(Xk)}$$
$$= \mathbf{k'X'Xk}$$
$$= \mathbf{k'Tk}$$
$$= \mathbf{k'(B + W)k}$$
$$= \mathbf{k'Bk} + \mathbf{k'Wk}$$

= درون‌گروهی + بین‌گروهی

وزن‌های k_1 و k_2 بایستی طوری محاسبه شوند که نسبت بین‌گروهی بر درون‌گروهی تا حد ممکن بزرگ باشد. از این رو بایستی حداکثر نسبت زیر را پیدا کنیم:

$$\lambda = \frac{\mathbf{k'Bk}}{\mathbf{k'Wk}} = \frac{42.711k_1^2 + 5.878k_2^2 + 31.688k_1k_2}{48.222k_1^2 + 77.056k_2^2 + 94.444k_1k_2}$$

برای حل این مسأله بیشترین نسبت، مشتقات تفکیکی نسبت λ محاسبه می شود (به ترتیب با توجه به k_1 و k_2 مشتق پیدا می‌شود). این‌ها را معادل صفر قرار داده و در نتیجه، دو معادله با دو مجهول k_1 و k_2 به دست می‌آید. این دستگاه دو معادله‌ای را به شکل ماتریس جبری می‌توان این گونه نوشت: $(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{B} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})\mathbf{k} = \mathbf{0}$.

طبعاً جواب ناچیز $\mathbf{k}=0$ (وزن‌های متمایز کننده k_1 و k_2 هر دو معادل صفر باشند) نادیده گرفته می‌شود.

دستگاه فوق به شکل $\mathbf{Ak}=0$ است، که $\mathbf{A} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{B} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}$ می‌باشد. برای مواردی که ناچیز نباشند ($K_1 \neq 0$ و یا $K_2 \neq 0$) می‌توان نشان داد که دترمینان (تعیین کننده) $\mathbf{A}$ باید معادل صفر باشد (به بخش ضمیمه مراجعه کنید). درنتیجه :

$$\left|\mathbf{W}^{1}\mathbf{B} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}\right| = 0$$

این معادله یک معادله ویژه[1] نامیده می شود و به ما امکان محاسبه بالاترین λ ممکن را می‌دهد. ما دترمینان $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{B} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}$ را معادل صفر قرار داده و از راه‌حل‌های λ بیشترین مقدار را به دست می‌آوریم. سپس مقدار λ را در معادلات اصلی قرار می‌دهیم و از آن مقادیر k_1 و k_2 را مشخص می‌کنیم. اکنون این عملیات را یک به یک انجام می‌دهیم.

در معادله ویژه، سه ماتریس دخالت دارند: **W**، **B** و **I**. **W**و **B** در بالا محاسبه شدند. **I** ماتریس همانی (اتحاد) است، تمام عناصر آن معادل صفر هستند به جز عناصر قطری که ۱ می‌باشند. این سه ماتریس را یک بار دیگر در زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 48.222 & 47.222 \\ 47.222 & 77.056 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 42.711 & 15.844 \\ 15.844 & 5.878 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ابتدا معکوس **W** را به دست می‌آوریم:

1. characteristic equation

$$\mathbf{W}^{-1} = \frac{adj\mathbf{W}}{|\mathbf{W}|} = \frac{\begin{bmatrix} 77.056 & -47.222 \\ -47.222 & 48.222 \end{bmatrix}'}{(48.222)(77.056)-(47.222)^2} = \begin{bmatrix} 0.052 & -0.032 \\ -0.032 & 0.032 \end{bmatrix}$$

سپس معادله ویژه را تشکیل می دهیم:

$$\left|\mathbf{W^{-1}B} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}\right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} 0/052 & -0/032 \\ -0.032 & 0.032 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 42.711 & 15.844 \\ 15.844 & 5.878 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} 1.711-\lambda & 0.635 \\ -0.843 & -0.313-\lambda \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$(1.711-\lambda)(-0.313-\lambda)-(-0.843)(0.635) = 0$$

$$\lambda^2 - 1.399\lambda = 0$$

$$\lambda_{\max} = ۱.۳۹۹$$

این اندازهٔ λ «ارزش ویژه[1]» نامیده می‌شـــود. برای تعیین $k_۱$ و $k_۲$ این مقدار را در معادلات اصـــلی دستگاه، جانشین می‌کنیم:

$$\mathbf{(W^{-1}B - \boldsymbol{\lambda} I)K = 0}$$

$$\left[\begin{bmatrix} 1.711 & 0.632 \\ -0.843 & -0.313 \end{bmatrix} - 1.399\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} k1 \\ k2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.313 & 0.635 \\ -0.843 & -1.711 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k1 \\ k2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$0.313k1 + 0.635k2 = 0$$

$$-0.843k1 - 1.711k2 = 0$$

این دو معادله به لحاظ خطی یکسان نیستند، زیرا نسبت $۰.۳۱۳ \div ۰.۶۳۵$ و $-۰.۸۴۳ \div (-۱.۷۱۱)$ برابر اســـت. بنابراین تعداد نامحدودی جواب وجود دارد، در نتیجه نمی‌توان $k_۱$ و $k_۲$ را دقیقاً حســـاب کرد. تنها می‌توان نسبت آن‌ها را محاسبه نمود. به طور مثال با توجه به معادله نخست $k_۱= ۰/۶۳۵$ و $k_۲= ۰/۱۳$ یک جواب وجود دارد، یک بردار $\boldsymbol{k}$ به این صورت خواهد بود:

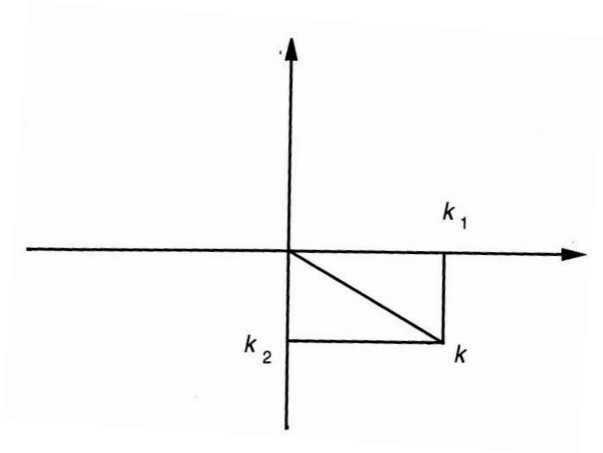
---

1. eigenvalue

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}k_1\\k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.635\\-0.313\end{bmatrix}$$

امّا نویســـندگان دیگر جواب‌های دیگری مثل k_1=۱/۷۱۱ و k_2=۰/۸۴۳ خواهند یافت اگر معادله دوّم را مبنا قرار دهند. به عبارت دیگر k_1 و k_2 واحد خواهند بود، اما برای یک تبدیل مقیاس‌ها.

بنابراین ناگزیریم توافقی به عمل آوریم که همه افراد مقادیر یکسانی را برای وزن‌های تشخیصی به دســت آورند. چنین توافقی شــامل بهنجارســازی بردار k می‌شــود. بهنجارســازی یعنی این که این بردار بر طول آن$\|\boldsymbol{k}\|$ تقسیم می شود تا برداری با طول واحد به د ست آید. در شکل ۳-۸ به آ سانی می‌توان تشخیص داد که طول $\boldsymbol{k}$ برابر است با $\left[k_1^2+k_2^2\right]^{1/2}$:



شکل ۳-۸ بردار k

از این رو، بردار $\mathbf{K}=\begin{bmatrix}0.635\\-0.313\end{bmatrix}=0.708$ بایستی بر $[(۰.۶۳۵)^۲+(-۰.۳۱۳)^۲]^{۱/۲}=۰.۷۰۸$ تقسیم شود.

$$\mathbf{k}(\text{بهنجارشده})=\frac{\mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|}=\frac{1}{0.708}\begin{bmatrix}0.635\\-0.313\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0/897\\-0.442\end{bmatrix}$$

اکنون بالاخره تابع افتراقی (متمایز کننده) را پیدا کرده‌ایم:

$$\boxed{t=۰.۸۹۷x_۱-۰.۴۴۲x_۲}$$

بردار $\mathbf{k}$ یک بردار ویژه[1] نامیده می‌شود. وزن‌های $k_۱$ و $k_۲$ گرد آمده در بردار، جهت محور متمایز کننده را تعیین می‌کنند. در حالت بهنجار که طول $\boldsymbol{k}$ برابر ۱ است، این وزن‌ها برابر با کسینوس زاویه‌ای است که t با هر یک از محورها می‌سازد. به همین خاطر آن‌ها را کسینوس‌های هادی[2] هم می‌گویند.

دریافتیم که $k_۱$ مثبت و $k_۲$ منفی ا ست. از رویکرد هند سی فهمیدیم که دلیل آن همبستگی مثبت بین درآمد و خدمات در درون‌گروه‌ها است، چنان که جهت محور متمایز کننده بر خلاف جهت همبستگی است.

تابع t در بردارنده مقدار ثبات نیست، زیرا متغیرها به صورت انحراف از میانگین بیان شده‌اند. البته کل عملیات را با نمرات خام هم می‌توان انجام داد، بنابراین به جای این که در فضای اصلی شکل ۸-۲ کار کنیم، در فضای اصلی شکل ۸-۱ کار می‌کنیم. تابع دارای مقدار ثبات بوده و وزن‌های $k_۱$ و $k_۲$ با حالت فوق یکسان خواهند بود. توجه داشته باشید که بخش‌های معینی از نتایج کامپیوتری که در ادامه آمده است، دارای یک چنین مقدار ثابتی هستند.

به جای نمرات خام (X_i) یا انحراف از میانگین (x_i) می‌توان از نمرات استاندارد (Z_i) هم شروع کرد. جدای از این حقیقت که تابع افتراقی در این صورت دارای مقدار ثابت نیست، این کار همچنین از این مزیت برخوردار است که وزن‌های بردار $\boldsymbol{k}$ با یکدیگر قابل مقایسه می‌شوند، طوری که این امکان فراهم می‌شود که مشخص کنیم چه متغیر تعیین کننده‌ای دارای بیشترین ظرفیت تعیین‌کنندگی بین همسایگان فقیر و غنی است (می‌توانیم مقایسه‌ای بین این وزن‌ها و وزن‌های تحلیل رگرسیون یا ضرایب تحلیل به عمل آوریم).

۸-۸ طبقه بندی و پیش‌بینی

حال که تابع رگرسیون را پیدا کرده‌ایم، می‌توانیم مقدار t مورد انتظار (= نمره تشخیصی) را برای هر یک از ۱۵ شهروند محاسبه کنیم. مثلاً برای شهروند اول نمره $X_۱$ معادل ۱ و نمره $X_۲$، نیز معادل ۱ است. بنابراین مقدار t مورد انتظار برابر ۱/۹۱۰- =(۱-۴/۹۳۳)۰/۴۴۲-(۱-۵/۰۶۷)۰/۸۹۷ است. این محاسبات در جدول ۸-۴ برای ۱۵ شهروند انجام شده است.

همین عملیات را می توان برای مرکز ثقل‌های گروهی نیز انجام داد. بدین وسیله تصاویر نقاط روی محور t به صورت نقاطی که با C در شکل ۸-۲ مشخص شده‌اند؛ به دست می‌آید. برای گروه ۰ مرکزیت (۴/۱۶۷ ۳) و برای گروه ۱ (۵/۴۴۴ ۶/۴۴۴) است . به این ترتیب :

$$\bar{t}_{۰} = ۰.۸۹۷(۳ - ۵.۰۶۷) - ۰.۴۴۲(۴.۱۶۷ - ۴.۹۳۳) = -۱.۵۱۶$$

$$\bar{t}_{۱} = ۰.۸۹۷(۶.۴۴۴ - ۵.۰۶۷) - ۰.۴۴۲(۵.۴۴۴ - ۴.۹۳۳) = ۱.۰۰۹$$

1. eigenvector
2. direction cosines

جدول ۴-۸

X_1	$x_1 = X_1 - \bar{X}_1$	X_2	$x_2 = X_2 - \bar{X}_2$	t	گروه پیش‌بین شده
۱	-۴/۰۶۷	۱	-۳/۹۳۳	-۱/۹۱۰	۰
۱	-۴/۰۶۷	۴	۰/۹۳۳	-۳/۲۳۶	۰
۲	-۳/۰۶۷	۱	-۳/۹۳۳	-۱/۰۱۳	۰
۴	-۱/۰۶۷	۵	۰/۰۶۷	-۰/۹۸۷	۰
۵	-۰/۰۶۷	۵	۰/۰۶۷	-۰/۰۹۰	۱
۵	-۰/۰۶۷	۹	۴/۰۶۷	-۱/۸۵۸	۰
۴	-۱/۰۶۷	۲	-۲/۹۳۳	۰/۳۳۹	۱
۴	-۱/۰۶۷	۴	-۰/۹۳۳	-۰/۵۴۵	۰
۵	-۰/۰۶۷	۶	۱/۰۶۷	-۰/۵۳۲	۰
۶	۰/۰۹۳۳	۳	-۱/۹۳۳	۱/۶۹۱	۱
۶	۰/۰۹۳۳	۶	۱/۰۶۷	۰/۳۶۵	۱
۷	۱/۰۹۳۳	۶	۱/۰۶۷	۱/۲۶۲	۱
۸	۲/۰۹۳۳	۷	۲/۰۶۷	۱/۷۱۸	۱
۹	۳/۰۹۳۳	۷	۲/۰۶۷	۲/۶۱۵	۱
۹	۳/۰۹۳۳	۸	۳/۰۶۷	۲/۱۷۳	۱

نقطه وسط این دو طرح مرکز ثقل‌های گروهی را می‌توان به‌عنوان «نقطه برش»: $t_c = [-۱.۵۱۶+۱.۰۰۹]\div ۲ = ۰.۲۵۴]$ در نظر گرفت. اگر هر دو گروه، هم اندازه باشند این نقطه برش روی مبدأ قرار می‌گیرد، یعنی t_c=۰. در این جا نقطه برش در سمت چپ مبدأ واقع می‌شود، زیرا تعداد گروه ۰ ($n_.$=۶) کمتر از گروه (n_1=۹) است.

با نظری بر نمرات متمایز کننده ۱۵ شهروند، می‌توانیم هر یک را در یکی از دو گروه طبقه‌بندی کنیم. نمراتی را که در سمت را ست t_c قرار می گیرند ($t_i \rangle t_e$) به گروه ۱ تخصیص می یابند و آنهایی که در سمت چپ t_c واقع می‌شوند ($t_i \langle t_e$)، در گروه ۰ طبقه‌بندی می‌شوند. در جدول ۲-۸ عضویت پیش‌بینی‌شده گروهی را مشخص کرده بودیم. اگر آن را با نمرات Y اولیه مقایسه کنیم می‌بینیم که ۱۲ مورد از ۱۵ شهروند یعنی ۸۰٪ بدرستی طبقه‌بندی شده‌اند. تابع افتراقی قادر به طبقه‌بندی کامل نیست، زیرا همپوشی‌هایی بین دو گروه وجود دارد که ما قبلاً در بررسی مقدماتی نمودار نقطه‌ای آن را دیدیم (نگاه کنید به شکل۸-۲ (ج)). به طور مثال شهروند نهم با نمرات X_1=۵ و X_2=۶ که به گروه اولیه ۱ تعلق داشت، توسط تابع t به گروه ۰ تخصیص داده شده است. در نمودار نقطه‌ای دیدیم که این شهروند در حقیقت به گروه ۰ تعلق دارد نه گروه ۱. در تصویرهای نقاط روی محور t این همسایگان در منطقه همپوشی بین دو گروه واقع شده و از این رو نمره t مربوط به آن (t_9= -۰/۵۳۲) خیلی نزدیک به نقطه برش (t_c=-۰/۲۵۴) قرار دارد. با استفاده از نمرات متمایز کننده همچنین می‌توانیم به بررسی پراکندگی های بین‌گروهی و درون‌گروهی محور t بپردازیم. تغییرات (مجموعه مجذورات) شش نمره نخست t مربوط به گروه ۰ معادل ۵/۷۹ است. تغییرات نه نمره آخر t مربوط به گروه ۱ معادل ۱۰/۶۲ است (پیشنهاد می شود محاسبات را با دست یا ماشین

حســاب انجام دهید). مجموع این دو تغییرات درون‌گروهی، که پراکندگی درون‌گروهی روی محور t می‌باشد، ۱۶/۴۱ بوده و در واقع معادل مخرج کسر ارزش ویژه λ است که در بیشتری حد می‌باشد:

$$\mathbf{k'Wk} = 48.222k_1^2 + 77.056k_2^2 + 94.444k_1k_2$$

$$= 48.222(0.897)^2 + 77.056)(-0.442)^2 + 94.444(0.897)(-0.442) = 16.41$$

بـرای محـاسبـه تغییـرات بیـن‌گـروهـی تصـاویـر مـرکـز ثقـل گروهی بر t شیوه وزن‌دهی با وزن‌های ۶ و ۹ را به کار می‌بریم. لذا این تغییرات بین‌گروهی برابر است با ۲۲/۹۵=۲(۰-۱/۰۰۹)۹+۲(۰-۱/۵۱۶-)۶ که مساوی با صورت کسر ارزش ویژه λ است:

$$\mathbf{k'Bk} = 42.711k_1^2 + 5.878k_2^2 + 31.688k_1k_2$$

=۴۲/۷۱۱(۰/۸۹۷)۲+۵/۸۷۸(-۰/۴۴۲)۲+۳۱/۶۸۸(۰/۸۹۷)(-۰/۴۴۲)=۲۲/۹۵

همچنین متوجه شــدیم که نســبت ۱/۴۰=۱۶/۴۱÷۲۲/۹۵= $\lambda = \mathbf{(k'Bk)(k'Wk)}$ معادل ارزش ویژه‌ای است که از معادله ویژه محاسبه گردید.

۹-۸ آزمون معناداری:مطالب مقدماتی

ما می‌خواهیم این مســـأله را بیازماییم که آیا بین مرکزیت دو گروه، یعنی بین میانگین‌های دو گروه برای متغیرهای درآمد و ســطح خدمات، در مجموع تفاوت معناداری وجود دارد. این یک آزمون مدل کلی اســـت. علاوه بر این می‌خواهیم آزمون های جدا گانه‌ای در باره تفاوت میانگین های درآ مد و میانگین‌های ســطح خدمات به عمل آوردیم، دو آزمون اخیر را «آزمون‌های یک متغیره» گویند، زیرا هر بار یکی از متغیرهای x مورد توجه قرار می گیرد.

قبل از انجام این آزمون‌ها، ابتدا خلاصــه کوتاهی درباره بعضــی آزمون‌هایی که در فصــل‌های قبلی با آن ســر و کار داشــتیم بیان خواهیم کرد و با اســتفاده از آن، آزمون‌های فصــل‌های بعدی را پیش‌بینی و این‌ها را در یک سیستم جمع می‌کنیم.

در فصل ۴ **آزمون T استیودنت** اجرا شد. تنها **دو گروه** وجود داشت. گروه شوخ طبع و گروه غیرشوخ، و تنها **یک متغیر** وجود داشت با سطح سنجش فاصله‌ای: قرارداد تجاری.

در فصــــل ۷ **آزمون F مربوط به آنوای یک طرفه** مورد بحث قرار گرفت. چند گروه شــــامل تکالیف جذّاب، تکالیف با جذابیت متوســط و تکالیف کســالت‌آور، و یک متغیر (وابســته) با ســطح سنجش فاصله‌ای بنام انگیزش درونی وجود داشت. در حالت ساده دو گروهی، شامل گروهی که پاداش پولی دریافت کرده‌اند و گروهی که پول دریافت نکرده‌اند، آزمون F با آزمون t اســتیودنت یکســان به نظر می‌رسند. به خاطر داشته باشید که $F=t^2$ است. نتایج کامپیوتری مربوط به رگرسیون دامی در این باره باز هم نتایج آزمون t را با $d_f = n_{\cdot} - 1 + n_1 - 1 = n - 2$ درجه آزادی به دســت می‌داد، ولی می‌دانیم که آزمون F طبق رویکرد مقایسه مدل با ۱ و n-۲ درجه آزادی یکسان است.

از مطالب فوق در می‌یابیم که آزمون F که پیچیده‌تر از آزمون t اســت و برای بیش از دو گروه بکار برده می‌شود، در موارد ساده دو گروهی هم می‌تواند بکار گرفته شود، اما عکس آن یعنی استفاده از آزمون t برای موارد پیچیده‌تر امکان‌پذیر نیست.

این اصلی است که در حالات بسط یافته زیر صادق خواهد بود. در **تحلیل افتراقی دو گروهی** تعداد متغیرها و نه تعداد گروه‌ها پیچیده‌تر می‌شـــود. دو گروه وجود دارد: گروه غنی و فقیر، و **چند متغیر** با سطح سنجش فا صله‌ای داریم: متو سط درآمد، سطح خدمات و احتمالاً چند متغیر دیگر. آزمونی که در این‌جا انجام می‌شــود **آزمون T^2 هاتلینگ** اســت. این آزمون درســت مثل آزمون F تحلیل واریانس، یک حالت بسط یافته آزمون t استیودنت است. در این‌جا این اصل صادق است که آزمون‌های پیچیده‌تر در حالات ساده‌تر به کار می‌روند، زیرا در حالت ساده‌تر یک متغیر متمایز کننده، T^2 هاتلینگ همانند مجذور آزمون t اســتیودنت اســت. عکس این حالت صــادق نیســت: آزمون t استیودنت را برای حالت دو گروه و چند متغیر متمایز کننده x نمی‌توان به کار برد.

در فصل‌های آینده، نه تنها تعداد متغیرها بلکه تعداد گروه‌ها نیز گسترش خواهد یافت. مثلاً **در تحلیل افتراقی چندگانه**، صــفت «چندگانه» معرف حضــور **چند گروه** اســت، گویای این که چند متغیر با سـطح سـنجش فاصـله‌ای وجود دارد. در این حالت خطی پیچیده، **آزمون لامبدای ویلکز** (۸) به کار برده می‌شـــود. این آزمون نه تنها در تحلیل افتراقی چندگانه بلکه همچنین در تحلیل همبستگی متعارف (کانونی) و تحلیل واریانس چند متغیره نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این جا باز هم اصل تعریف شده فوق صادق است، یعنی t، F و T^2 موارد خاصی از ویلکز هستند امّا عکس آن درست نیست.

به طور خلاصــه ما طرحی از چهار آزمون (شــکل ۴-۸) را بر اســاس دو اصــل پیچیدگی: تعداد گروه‌ها و تعداد متغیرها، صورت می‌دهیم.

متغیرها

		یک	چند
گروه‌ها	دو	*t استیودنت*	*T^2 هاتلینگ*
	چند	*F فیشر*	*لامبدای ویلکز*

شکل ۴-۸ ترتیب آزمون‌ها در تحلیل چند متغیره

۱۰-۸ آزمون معناداری: آزمون‌های یک متغیره

در یک آزمون تک متغیره انتظار این ا ست که تنها یک متغیر وجود دا شته با شد. متغیرهای دیگر به سادگی از دایره توجه کنار گذا شته می شوند (البته دقت کنید که این غیر از آزمون اثر یکی از چند متغیر در مدل چند متغیره است).

در حقیقت همواره عاقلانه‌تر آن اســت که قبل از بررســی ســهم جداگانه متغیرها، مدل کلی را بیازماییم. امّا برای ســادگی بیشــتر، کار خود را با حالت ســاده‌تر «آزمون‌های یک متغیره» شــروع می‌کنیم.

متغیر درآمد X_1 را در نظر می‌گیریم. در نظر داریم این مســأله را بیازماییم که آیا بین میانگین درآمد هم‌سایگان فقیر و غنی تفاوت معناداری وجود دارد یا نه. این م سأله ساده‌ای ا ست شامل دو گروه و یک متغیر، تا بتوانیم آزمون t اســتیودنت را بکار ببریم. میانگین درآمد گروه ۰ برابر ۳ اســت. تغییرات آن ۱۸ و واریانس آن ۳/۶ می باشد. میانگین درآمد گروه ۱ معادل ۶/۴۴۴ است. تغییرات آن ۳۰/۲۲۲ و واریانس آن ۳/۷۷۷ می‌باشد. میانگین کل واریانس درون‌گروهی برابر است با :

$$S_w^2 = \frac{18+30.222}{(6-1)+(9-1)} = 3.709$$

آزمون تفاوت میانگین سطح درآمد با محاسبه نمره t صورت می‌پذیرد:

$$t = \frac{(3-6.444)-0}{[(3.709 \div 6)+(3.709 \div 9)]^{1/2}} = -3.393$$

برای ۱۳=(۱-۹)+(۱-۶) در جه آزادی و α=۰/۰۵ در جدول t به مقدار مبین $t^*=$ ۱/۷۷۱ بر می‌خوریم. مقدار مطلق t که در مثال ما به دست آمد از مقدار t^* خیلی بیشتر است، از این رو نتیجه می گیریم که در سطح احتمال از قبل تعیین شده ی ۹۵٪ ، میانگین درآمد گروه غنی و فقیر به طور معناداری از هم متفاوت است.

اینک توجه کنید که نتایج کامپیوتری SPSS برای تحلیل افتراقی، آزمون t را چاپ نمی‌کند، بلکه به جای آن، «لامبدای ویلکز (آماره U) و نســـبت F یک متغیره» را می‌دهد. اجازه دهید ابتدا درباره آزمون F تو ضیح دهیم. قبل از این دان ستیم که آزمون F یک متغیره با آزمون t یک‌سان ا ست $F=t^2$، یعنی ۱۱/۵۱ =^{۲}(۳/۳۹۳-)=F. در عمل احتمال این که تحت شرایط H_0 برای درجات آزادی ۱ و ۱۳ این مقدار F یا بیشتر از آن به دست آید معادل "significance=۰/۰۰۴۸ " است. این احتمال آن قدر ناچیز است که می‌توان فرض صفر را رد کرد و از یک نتیجه معنادار صحبت نمود.

به جای م جذور t می‌توانیم از طریق پ یدا کردن نمره F هم ع مل کنیم. از تحل یل وار یانس دریافتیم که F نسبت دو واریانس ا ست: درون‌گروهی و بین‌گروهی. این واریانس‌ها را در ماتریس‌های $\boldsymbol{B}$ و $\boldsymbol{W}$ می‌توان مرور کرد. تغییرات آن‌ها را می‌توان در قســـمت بالای ســـمت چپ ماتریس‌ها پیدا کرد. تغییرات بین‌گروهی ۴۲/۷۱۱ و تغییرات درون‌گروهی ۴۸/۲۲۲ اســـت. درجات آزادی مناســـب

برای توزیع بین‌گروهی ۱=۱-۲=۱-g و برای درون‌گروهی ۱۳=۲-۱۵=n-g می‌باشد. از این‌رو ۱۱/۵۱ =[(۱۳ / ۴۸/۲۲۲) / (۱ / ۴۲/۷۱۱)] = F.

درباره لامبدای ویلکز نیز می‌توان مقایسه‌های مشابهی به عمل آورد. نتایج کامپیوتری شامل یک مقدار wilks's lombda=۰/۵۳۰۳۰ در رابطه با متغیر درآمد می‌باشد. در فصل‌های بعد وقتی‌که شیوه‌های پیشرفته‌تر را مورد بحث قرار می‌دهیم نشان خواهیم داد که لامبدای ویلکز معادل نسبت دو تعیین کننده است: تعیین کننده $\boldsymbol{W}$ و تعیین کننده $\boldsymbol{T}$. از آنجا که در حالت ساده مورد بحث فقط یک متغیر وجود دارد ما تنها عنصر قسمت بالای سمت چپ را از ماتریس‌های $\boldsymbol{W}$ و $\boldsymbol{T}$ مورد بررسی قرار می‌دهیم که شامل داده‌های مربوط به درآمد است. یعنی تغییرات درون‌گروهی و تغییرات کل که به ترتیب ۴۸/۲۲۲ و ۹۰/۹۳۳ هستند. بدین ترتیب مقدار لامبدای ویلکز برابر است با ۰/۵۳۰۳۰=۹۰/۹۳۳÷۴۸/۲۲۲. در آینده خواهیم دید که توزیع نظری احتمالات را بایستی برای این آماره به کار ببریم و همچنین با نحوه آزمون آن آشنا می‌شویم.

برای متغیر سطح خدمات X_2، آزمون t استیودنت یا آزمون F متناظر با آن و آزمون لامبدای ویلکز را به روش مشابهی می توان انجام داد. خواننده می تواند وارسی کند که t=-۰/۹۹۶ و F=۰/۹۹۱۶ و wilks's lombda=۰/۹۲۹۱۳ است. این مقدار معنادار نیست. بنابراین بین میانگین سطح خدمات همسایگان غنی و فقیر تفاوت معناداری وجود ندارد.

۸-۱۱ آزمون معناداری: آزمون چند متغیره

اکنون نظری به دو متغیر X_1،X_2 با هم می‌افکنیم. ما به آزمون این مسأله می‌پردازیم که آیا تفاوت معناداری بین مرکزیت گروه ۰ و مرکزیت گروه ۱ وجود دارد. این بار با چند مسأله روبه رو هستیم: نه تنها مسأله پراکندگی‌های یک متغیر در دو گروه می‌تواند متفاوت باشد (طوری که لازم است واریانس کل درون‌گروهی، یعنی مجذور s_W به کار گرفته شود) بلکه این مسأله که متغیرها می‌توانند در درون‌گروه‌ها با هم همبسته باشند و همچنین این مسأله که پراکندگی متغیرها در درون گروه‌ها می‌تواند نابرابر باشد همگی مسائلی هستند که با آن‌ها روبه رو هستیم؛ به عبارت دیگر ماتریس‌های درون‌گروهی $\boldsymbol{C}_0$،$\boldsymbol{C}_1$ و $\boldsymbol{C}_W$ (کل درون‌گروهی) نه ضرورتاً قطری هستند (وضعیت سیگارهای ایستاده یا سطح افقی را در نظر بگیرید) و نه الزاماً اسکالر می‌باشند (دایره‌ها را تجسم کنید).

این کوشش ستودنی هاتلینگ بود که بسط چند متغیری آزمون t استیودنت را طرح نمود که در آن همه این مسائل در نظر گفته می شوند. معکوس ماتریس C_W در این مورد یک نقش اساسی بازی می‌کند. او آماره‌ای شبیه به فرمول t (به توان دو) طرح کرد که T^2 هاتلینگ نامیده می‌شود و نه تنها X_1، بلکه X_2 و متغیرهای متمایز کننده احتمالی دیگر را هم در بر می‌گیرد، در این آماره، تفاوت میانگین ها به صورت تفاوت مرکزیت‌های گروهی در می‌آیند، زیرا چند متغیر وجود دارد و همچنین

در آن $1/(s_w^2)$ با $\mathbf{C}_W$ جایگزین می‌شود که نه تنها شامل پراکندگی‌ها می‌شود، بلکه همبستگی بین متغیرهای متمایز کننده را هم در بر می‌گیرد. برای هر X فرمول $t^۲$ در فصل ۴ بیان شد:

$$t^۲ = \frac{(\bar{X}_. - \bar{X}_۱)^۲}{\frac{S_w^۲}{n_.} + \frac{S_w^۲}{n_۱}} = \frac{n_. n_۱}{n_. + n_۱}(\bar{X}_. - \bar{X}_۱)\frac{۱}{s_w^۲}(\bar{X}_. - \bar{X}_۱)$$

فرمول مشابه برای $T^۲$ هاتلینگ چنین است:

$$T^2 = \frac{n_0 n_1}{n_0 + n_1}\mathbf{d}'\mathbf{c}_\mathbf{w}^{-1}\mathbf{d}$$

ابتدا معکوس $\mathbf{C}W$ را حساب می‌کنیم:

$$\mathbf{C}_\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3.709 & 3.632 \\ 3.632 & 5/927 \end{bmatrix} |\mathbf{C}_\mathbf{w}| = (3.709)(5.927) - (3.632)^2 = 8.792$$

$$\mathbf{C}_\mathbf{w}^{-1} = \mathbf{adj\ \ cw}/|\mathbf{c}_\mathbf{w}| = \frac{1}{8.792}\begin{bmatrix} 5.927 & -3.632 \\ -3.632 & 3.709 \end{bmatrix}'$$

$$= \begin{bmatrix} 0.674 & -0.413 \\ -0.413 & 0.422 \end{bmatrix}$$

بردار $\mathbf{d}$، بردار تفاوت بین مرکزیت‌های گروهی قبلاً محاسبه شده است:

$$\mathbf{d} = \bar{\mathbf{X}}_\mathbf{0} - \bar{\mathbf{X}}_\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4.167 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6.444 \\ 5.444 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.444 \\ -1.277 \end{bmatrix}$$

حالا می‌توانیم $\mathbf{d}'\mathbf{c}_\mathbf{wd}^{-1}$ را به دست آوریم. این فاصله ماهالانوبیس $D^۲$ خواهد بود:

$$D^2 = \mathbf{d}'\mathbf{c}_\mathbf{w}^{-1}\mathbf{d} = (-3.444 - 1.277)\begin{bmatrix} 0.674 & -0.413 \\ -0.413 & 0.422 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3.444 \\ -1.277 \end{bmatrix} = 5.051$$

از آنچه گفته شد $T^۲$ هاتلینگ را می‌توان به دست آورد.

$$T^۲ = \frac{n_. n_۱}{n_. + n_۱} d'c_w^{-۱}d = \frac{(۶)(۹)}{۶+۹}(۵.۰۵۱) = ۱۸.۱۸۲$$

هاتلینگ ثابت کرد که مقدار $[(n-p-1)/p(n-2)]T^2$ به صـــورت F با درجات آزادی p و n-p-۱ توصیـــف می‌شـــود. در مثال ما p=۲ اســـت، چون دو متغیر متمایز کننده وجود دارد و n=۱۵ است، زیرا ۱۵ شهروند داریم، از این‌ها مقدار F چنین به دست می‌آید: (۱۸/۱۸۲)=۸/۳۹۲

F=[(۱۵-۲-۱)÷۲(۱۵-۲)] . برای درجات آزادی دو و ۱۲ و α=۰/۰۵ در جدول F مقدار مبین F را ۳/۸۹ می‌یابیم. نتیجه می‌گیریم بین مرکزیت دو گروه تفاوت معناداری وجود دارد، یعنی بین میانگین سطح درآمد و میانگین سطح خدمات بر روی هم و با در نظر گرفتن توزیع‌های آن‌ها و همبستگی‌های آن‌ها. بدین ترتیب مدل کلی معنادار است.

۸-۱۲ فاصله $D^۲$ ماهالانوبییس

فرمول $T^۲$ هاتلینگ $D^۲$ ماهالانوبییس را در بر دارد:

$$D^2 = \mathbf{d'c_w^{-1}d}$$

$$T^2 = \frac{n_0 n_1}{n_0 + n_1}\mathbf{d'C_W^{-1}d} = \frac{n_0 n_1}{n_0 + n_1} D^2$$

بنابراین آزمون F قبلی را با $D^۲$ هم می‌توان انجام داد:

$$F = \frac{n-p-۱}{P(n-۲)} \times \frac{n_۰ n_۱}{n_۰ + n_۱} D^۲$$

جالب‌تر از همه، تفسیر هندسی فاصله $D^۲$ ماهالانوبییس است؛ زیرا بسط فاصله $\mathbf{d'd}$ اوکلیدین می‌باشد. برای توضیح آن به نمودار نقطه‌ای شکل ۱-۸ رجوع می‌کنیم که در آن بیضی‌های متمرکز را رسم کرده و مرکزیت‌ها را با C نشان دادیم.

برای توصیف تابع افتراقی t معلوم شد که بهترین محور t لزوماً رابط بین دو مرکزیت نمی‌باشد. وقتی این مطلب صدق می‌کند که دو بیضی متمرکز در واقع دایره هستند، یعنی درحالی‌که ماتریس‌های کوواریانس درون‌گروهی نه تنها قطری هستند (عدم همبستگی $X_۲$ - $X_۱$) بلکه اسکالر هم هستند (پراکندگی‌های $X_۱$ و $X_۲$ یکسان است). چنین وضعیتی در شکل ۵-۸ (الف) نشان داده شده است. فاصله مابین دو دایره را براحتی می‌توان به صورت فاصله اِیوکلیدین بین دو مرکزیت (۴/۱۶۷ ۳) و (۵/۴۴۴ ۶/۴۴۴) محاسبه کرد. از این شکل به آسانی می‌توان دریافت که مجذور فاصله ایوکلیدین با مجموعه مجذورات میانگین تفاوت‌های متغیرهای $X_۱$ و $X_۲$ برابر است:

(فاصله ایوکلیدین)^۲=(۳-۶/۴۴۴)^۲+(۴/۱۶۷-۵/۴۴۴)^۲=۱۳/۵۰

به صورت علائم برداری:

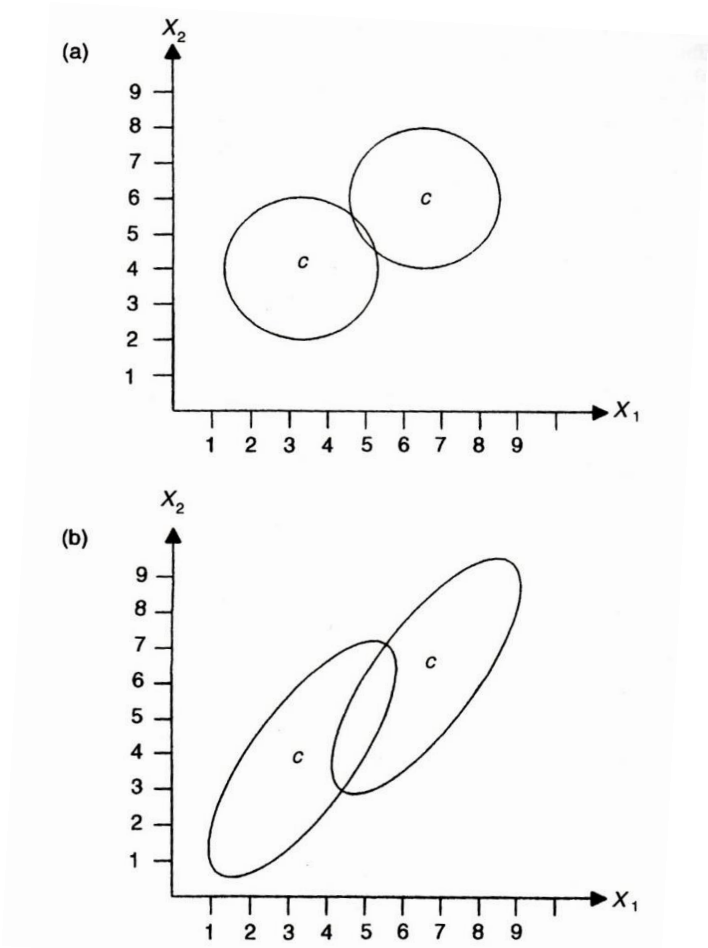
$$\mathbf{dd} = (-3.44 \qquad -1/277)\begin{bmatrix} -3.444 \\ -1.277 \end{bmatrix} = 13.50$$

البته فاصله ایوکلیدین بین مرکزیت‌های گروهی مقیاس خوبی برای فاصله گروهی نیست، زیرا نه ناهمسانی پراکندگی‌های $X_۱$ و $X_۲$ (سیگارهای دوکی شکل به جای دایره) و نه رابطه بین $X_۱$ و $X_۲$ (سیگارهای مایل) به حساب آمده‌اند. چنین وضعیتی در شکل ۵-۸ (ب) ترسیم شده است، به

خاطر ناهمسانی پراکندگی‌ها و همبستگی، دیگر نمی‌توان فاصله گروهی را به وسیله فاصله ایوکلیدین بین مرکزیت‌ها نشـــان داد. موضــوع فاصـــله ماهالانوبیس همین اســـت. با وارد کردن معکوس $\mathbf{C}_W$ در محاسبه، فاصله به یک تصحیح واریانس‌ها و کوواریانس‌های درون‌گروهی منتهی می شود. نتیجه زیر در بالا به دست آمد:

$$D^2 = \mathbf{d}'\mathbf{C}_\mathbf{W}^{-1}\mathbf{d} = ۵/۰۵۱$$

ملاحظه می‌شود که محاسبه به شیوه ماهالانوبیس به کاهش قابل ملاحظه مجذور فاصله بین‌گروه‌ها در مقایسه با (مجذور) فاصله ایوکلیدین منجر می‌شود که ۱۳/۵۰ است.



شکل ۸-۵ نمایش هندسی فاصله D^2 ماهالانوبیس

۱۳-۸ رویکرد رگرسیون تصنعی (دامی)

درست مثل تحلیل واریانس، تحلیل افتراقی را هم می‌توان به تحلیل چندگانه رگرسیون تبدیل کرد مشروط بر آنکه کدهای دامی مورد استفاده قرار بگیرند. در آغاز این فصل کدهای ۱-۰ را در ماتریس داده‌های ۱۵شهروند پیش‌بینی کردیم. متغیرهای مستقل X_1 و X_2 در سطح سنجش فاصله‌ای اندازه‌گیری شده و گروه‌ها به وسیله متغیر وابسته Y نشان داده شده‌اند. اگر نمرات ۰و ۱ به ترتیب به گروه‌های فقیر و غنی داده شود، آنگاه به کار بردن تحلیل رگر سیون سر را ست خواهد بود. در واقع برون‌داد به د ست آمده به یک م سأله رگر سیون ا شاره دارد نه یک م سأله متمایز کنندگی، اما نتایج یکسان هستند. در ادامه تابع تحلیل رگرسیون چندگانه و آزمون F مدل کلی را به دنبال هم مورد بحث قرار خواهیم داد.

نتایج کامپیوتری، تابع رگرسیون چندگانه زیر را به ما می‌دهد:

$$\hat{Y} = 0.539 + 0.207X_1 - 0.102X_2$$

عبارت‌های ثابت رگرسیون مورد توجه قرار نگرفته‌اند، چون اگر محاسبات به صورت نمرات انحراف از میانگین صورت می‌گرفت، آنگاه این مقدار معادل ۰ می بود و ضرایب رگرسیون فرقی نمی‌کرد. دو ضریب رگرسیون در بردار $\mathbf{b}$ روی هم جمع شده‌اند و این بردار بهنجار است:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{y1} \\ b_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.207 \\ -0.102 \end{bmatrix}$$

بردار $\mathbf{b}$ بر طول خود تقسیم شده است:

$$\|b\| = [(۰.۲۰۷)^۲ + (-۰.۱۰۲)^۲]^{۱/۲} = ۰.۲۳۱$$

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} = \frac{1}{0.231}\begin{bmatrix} 0.207 \\ -0.102 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.897 \\ -0.422 \end{bmatrix} \quad \text{(هنجار شده)}$$

ملاحظه می‌شود که $\mathbf{b}$ با $\mathbf{k}$ برابر است. لذا تابع رگرسیون چندگانه معادل تابع افتراقی t است.

همچنین در مورد متغیر وابسته دامی نیز این مطلب صادق است که آزمون F تحلیل رگرسیون چندگانه دقیقاً مثل آزمون F در رابطه با $T^۲$ هاتلینگ ا ست. ما در واقع در نتایج حا صل از کامپیوتر، مقدار F معادل ۸/۳۹۲ با ۲ و ۱۲درجه آزادی و یک سطح معناداری تجربی معادل ۰/۰۰۵۳ را می‌یابیم. نتیجه می‌گیریم که آزمون چند متغیره‌ی مدل کلی را از طریق رویکرد رگرسیون دامی هم می‌توان به دست آورد.

این موضوع در مورد آزمون‌های سهم جداگانه X_1 و X_2 هم صدق می‌کند. توجه داشته باشید که به هرحال آزمون‌های F تحلیل رگرسیون چندگانه با آزمون‌های یک متغیره تحلیل افتراقی یکسان

نیســـتند، زیرا آزمون‌های گروه دوم واقعاً یک متغیره هســـتند. برای این مقایســـه لازم اســـت به رگرسیون‌های دو متغیره جداگانه Y و X_1 از یک سو و Y و X_2 از سوی دیگر نگاهی بیاندازیم.

شباهت‌های[1] چندی نیز با ضریب تعیین چندگانه R^2=۰/۵۸۳ وجود دارد. از تحلیل رگرسیون چندگانه در می‌یابیم که R^2 با دو نسـبت تغییرات برابر اسـت: تغییرات تبیین کننده SSR و تغییرات کل SST (جایی که SST=SSR+SSE). از رویکرد رگرســـیون دامی تحلیل واریانس دریافتیم که تشـــابه R^2 در حالت گروهی، با نســـبت تغییرات بین‌گروهی SSB و تغییرات کل SST برابر اســـت (وقتی‌که SST=SSB+SSW). حالت دوم در مورد تحلیل افتراقی هم صـــادق اســـت. در محاســـبه ارزش ویژه λ صـورت کسـر معادل ۲۲/۹۵= $SSB = \mathbf{K'BK}$ و مخرج آن = $SSB = \mathbf{K'WK}$ ۱۵/۴۱ بود. در نتیجه SST=SSb+SSW=۲۲/۹۵+۱۶/۴۱=۳۹/۳۶. نسبت SST/SSB=۲۲/۹۵/۳۹/۳۶= ۰/۵۸۳در واقع با R^2 برابر اسـت. می‌توان این موضـوع را بدین صـورت نوشـت: $R^2 = \lambda / (1+\lambda)$ ۰/۵۸۳=۱/۳۹۹/۲/۳۹۹= که از روی آن می‌توان دید که رابطه ثابتی بین ارزش ویژه و ضـریب تعیین چندگانه وجود دارد. در مورد T^2 هتلینگ و D^2 ماهالانوبیس هم چنین اسـت. زیرا ارزش ویژه λ از تقسیم T^2 هاتلینگ بر $n_1 + n_2 - 2$ به دست می‌آید: ۱۳=۱/۳۹۹ ÷ ۱۸ = λ. تشابهات دیگر به طور خودکار به دست می‌آیند.

۸-۱۴ ماتریس‌های کوواریانس درون گروهی برابر: آزمون M باکس

در حقیقت کاربرد تحلیل افتراقی چنانچه ماتریس های کوواریانس درون‌گروهی تفاوت معناداری داشـــته باشـــند، مجاز نیســـت. بارتلت و باکس[1] هر یک نوعی آزمون برای همســـانی ماتریس‌های کوواریانس طرح کرده‌اند. آزمون باکس اساساً بیشتر معمول است و جزیی از نتایج کامپیوتری به چاپ می‌رسد. یک نگاه به سطح معناداری تجربی آن کافی است. توجه کنید که برای α=۰/۰۵ نبایستی در این مورد کوچکتر از ۰/۰۵ باشـــد، بلکه باید از آن بزرگتر باشـــد، چون تفاوت بین ماتریس‌ها نباید معنادار باشد.

در کتاب الگوریتم‌های آماری $SPSS$ تألیف نوروسیس (۱۹۷۸) نشان داده شده است کجا آزمون M باکس به صـورت F توزیع می‌شـود، و کجا B بارتلت اسـتفاده می‌شـود که توزیع آن به صـورت مجذور خی است. در مثال ما آزمون B بارتلت قابل استفاده است. با این وجود فرمول‌های B و M در این جا یکسان هستند.

$$M = (n-g)1n\left|\mathbf{C}_W\right| - \sum_{j=1}^{g}(nj-1)1n\left|\mathbf{C}j\right|$$

---

1. analoyues

1 .Bartlett & Box

این آزمون M به‌صورت مجذور خی با درجات آزادی $df = \frac{۱}{۲}(g-۱)(p)(p+۱)$ توزیع شده است.

در مثال ما این‌گونه به کار رفته است:

$$\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} 3.6 & 4.4 \\ 4.4 & 8.967 \end{bmatrix} \quad |\mathbf{C}_0| = 12.92 \quad n_0 = 6$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 3.778 & 3.153 \\ 3.153 & 4.028 \end{bmatrix} \quad |\mathbf{C}_1| = 5.276 \quad n_1 = 9$$

$$\mathbf{C}_w = \begin{bmatrix} 3.709 & 3.632 \\ 3.632 & 5.927 \end{bmatrix} \quad |\mathbf{C}_W| = 8.792 \quad n = 15$$

$$M = (۱۵-۲)\ln ۸.۷۹۲ - [(۶-۱)\ln ۱۲.۹۲ + (۹-۱)\ln ۵.۲۷۶]$$
$$= (۱۳)(۲.۱۷۴) - (۵)(۲.۵۵۹) - (۸)(۱.۶۶۳) = ۲.۱۶۱$$

این مقدار M باکس را از طریق نتایج کامپیوتری می‌توان وارسی نمود. برای α=۰/۰۵ و $df = \frac{۱}{۲}(۲-۱)(۲)(۲+۱) = ۳$ مقدار مبین مجذور خی ۷/۸۱ است.

از آنجا که M خیلی کوچکتر است، لذا تفاوت معناداری بین $C_۰$ و $C_۱$ وجود ندارد . از این‌رو انجام تحلیل افتراقی مجاز است.

در مواردی که در آن ماتریس‌های کوواریانس دارای تفاوت معنادار با شد یک تابع تشخیصی درجه دوم ممکن است مناسب تر باشد.

۸-۱۵ برون‌داد SPSS تحت ویندوز برای تحلیل افتراقی

برون‌داد مربوط به مثال اختصاری ما پیرامون همسایگان غنی و فقیر شامل دو بخش است: (الف) یک تحلیل افتراقی و (ب) یک تحلیل رگرسیون با متغیر وابسته دامی.

انتخاب یا ساختن فایل داده‌ها

در صورت نیاز به اطلاع از نحوه ساختن یا انتخاب فایل داده‌ها به فصل ۴ رجوع کنید.

اجرای تحلیل افتراقی

در محیط SPSS تحـت وینـدوز بـه ترتیـب روی هر یـک از عبـارت‌هـای Analyze، classify، Discriminant کلیک کنید. آنگاه در قســمت Source Variable list روی متغیر y در ســمت چپ و ســـپس روی علامت ⊳ مربوط به Grouping Variable کلیک کنید. مقدار کمینه ۰ را تایپ نمایید. روی مقدار Maximum کلیک کرده و عدد ۱ را تایپ کنید. روی عبارت continue کلیک کنید . شما اینک به دریچه محاوره‌ای Discriminant Analysis بر می‌گردید. در قســمت Source Variable list روی متغیرهای X_1 و X_2 کلیک کنید، سپس روی علامت ⊳ قسمت Independent کلیک کنید:

روی عبارت statisties کلیک کنید، دریچه محاوره Discriminant Analysis statisties پدیدار می‌شود. روی واژه continue کلیک کنید.

لازم نیســـت روی واژه Method کلیک کنید، چون قصــد نداریم تحلیل مرحله‌ای را انتخاب نماییم. روی واژه Classify کلیک کنید، دریچه محاوره‌ای Discriminant Analysis Classification ظاهر می‌شــود. خواهید دید که تحت عنوان prior Probablities عبارت All Groups Equal انتخاب شده است. در قسمت Group sizes روی واژه compute کلیک کنید . یک دکمه رادیویی نشان خواهد داد که شما این گزینه را انتخاب کرده‌اید. روی واژه Continue کلیک کنید.

اگر اکنون روی واژه ok در دریچه محاوره‌ای Discriminant Analysis کلیک کنید، SPSS شیوه آماری را اجرا نموده و دریچه نتایج همراه با نتایج تحلیل افتراقی نمودار خواهد شد.

اجرای تحلیل افتراقی به صورت تحلیل رگرسیون با متغیر وابسته دامی

این کار را می توانید با روشـــی که برایتان آشـــناســـت انجام دهید. به ترتیب روی عبارت‌های Regrestion، Statisties و Linear کلیک کنید، متغیر Y را به عنوان متغیر وابسته و متغیرهای X_1 و X_2 را به عنوان متغیرهای مستقل انتخاب کنید. آنگاه روی واژه ok کلیک کنید.

ذخیره کردن نتایج را فراموش نکنید: روی واژه File و ســـپس Save as کلیک کرده، نام فایل (Poor lst) را تایپ کنید و آنگاه روی واژه ok کلیک کنید.

اجرای شیوه های آماری از طریق دستورات SPSS

همان گونه که از قبل می‌دانید، با باز کردن دریچه دستورات ویندوز و تایپ دستورات SPSS می‌توانید شـــیوه‌های آماری قبلی را اجرا نمایید. به ترتیب روی عبارت‌های File، New و SPSS Syntax کلیک کنید، سپس د ستورات مورد نظر را تایپ کنید. مکان‌نما را در جایی از نخ ستین خط د ستورات قرار داده و روی علامت ▷ (یا در صورت استفاده از SPSS نوع ۰/۵ روی عبارت Run) کلیک کنید.

دستورات مربوط به تحلیل افتراقی بدین شرح است:

1- list
2- Discriminant/ Groups (0.1)

```
3       /variables   X1   X2
4      /Analysis     X1    X2
5      /Method   Direct
6     /Statistics    All.
```

در دســتورات ۱ ماتریس داده‌ها را با «List» درخواســت کرده‌ایم . دســتور ۲ نشــان می‌دهد که متغیر Y داده‌ها با گروه‌ها را معرفی می‌کند. اعداد ۰ و ۱ داخل پرانتز کمترین و بیشـــترین مقادیر گروهها را نشان می‌دهند. این اعداد می‌توانند ۱ و ۲ هم باشند، بستگی به شرایطی دارد که ین اعداد در ماتریس داده‌ها بکار برده شده‌اند. برای بیش از دو گروه ، مثلاً پنج گروه این د ستور را می توان به صورت (۱/۵) Y نشان داد ، به عبارت دیگر فقط نمرات حداقل و حداکثر نوشته می شوند.

در دستور ۳ متغیرهای متمایز کننده معرفی شده اند ، دستورات ۴ و ۵ در واقع در مثال ساده ما زائد هستند، زیرا دستور «Analysis» تحلیل زیر مجموعه‌های متغیرها را درخواست می‌کند که در این جا منظور نظر ما نیست، دستور Method=direct تمام متغیرهای ذکر شده را وراد تحلیل می‌کند، که حالت پیش‌گزینه سیستم است. در دستور ۶ تمام آماره‌ها درخواست شده اند، زیرا علاوه بر ارزش ویژه و آزمون‌هـای معنـاداری، می خواهیم مرکزیـت‌هـا، انحراف معیـار، مـاتریس‌هـای کوواریـانس، آزمون‌هـای یـک متغیره، آزمون M بـاکس و وزن‌هـای ویژه غیراســـتـانـدارد را هم ببینیم.

برای تحلیل رگرســیون چندگانه با متغیر وابســته دامی نیازی نیســت که ماتریس داده های جدیدی را به کامپیوتر ارائه کنیم، چون ما قبلاً y را با نمرات ۰ و ۱ کد کرده ایم. دســـتورات بدین شرح است:

```
7   REGRESSION /VARIABLES  Y  X1   X2
8    /DESCRIPTIVES DEFAULT
9   /DEPENDENT  Y
10  /METHOD ENTER X1  X2
11  /DEPENDENT  Y
13   / METHOD ENTER X1
14  REGRESSION /VARIABLES  Y  X1   X2
15   / DEPENDENT  Y
16   / METHOD ENTER  X2.
```

در د ستور ۷ و ۱۰ تحلیل مدل کلی خوا سته شده ا ست. مقایسه آن با تحلیل افتراقی به طور مشروح توضیح داده شده است. آزمون F هیچ فرقی ندارد. برای مقایسه ضرایب رگرسیون و وزن‌های تشـــخیصـــی نباید فراموش شـــود که ابتدا آن‌ها را در یک بردار جمع کرد، و این بردار را هنجاریابی نماییم.

دستورات ۱۱ الی ۱۶ برای مقایسه با آزمون‌های یک متغیره تحلیل افتراقی افزوده شده‌اند.

نتایج به شرح زیر است:

List.

Y	X1	X2
0	1	1
0	1	4
0	2	1
0	4	5
0	5	5
0	5	9
1	4	2
1	4	4
1	5	6
1	6	3
1	6	6
1	7	6
1	8	7
1	9	7
1	9	8

Number of Cases read= 15 Number of Cases Listed = 15

This Discr Analysis required 1272 (1.2K)BYTES of Workspace

On groups defined by Y Poor/rich

15 (unweighted) cases Were processed

0 of these were excluded from the analysis

15 (unweighted) caseswill be used in the analysis

Number of Cases by Group

Y	Number of Cases Unweighted	Weighted	Label
0	6	6.0	
1	9	9.0	
Total	15	15.0	

Group Means

Y	X1	X2
0	3.00000	4.16667
1	6.44444	5.44444
Total	5.06667	4.93333

Group Standard Deviations

Y	X1	X2
0	1.89737	2.99444
1	1.94365	2.00693
Total	2.54858	2.43389

Pooled Within-Groups Covariance Matrix with 13 degrees of freedom

	X1	X2
X1	3.709402	
X2	3.632479	5.927350

Pooled Within-Groups Correlation Matrix

	X1	X2
X1	1.00000	
X2	.77478	1.00000

Correlations which cannot be computed are printed as'.'

Wilks' Lambda (U-statistic) and univariate F-ratio
with 1 and 13 degrees of freedom

Variable	Wilks' Lambda	F	Significance
X1	.53030	11.51	.0048
X2	.92913	.9916	.3375

Covariance Matrix for Group 0,

	X1	X2
X1	3.600000	
X2	4.400000	8.966667

Covariance Matrix for Group 1,

	X1	X2
X1	3.777778	
X2	3.152778	4.027778

Total Covariance Matrix with 14 degrees of freedom

	X1	X2
X1	6.495238	
X2	4.504762	5.923810

```
On groups defined by Y          poor/rich

Analysis number       1
Direct method:  All variables passing the tolerance test are entered.
     Minimum Tolerance Level .................  .00100

Canonical Discriminant Functions

     Maximum number of functions.............        1
     Minimum cumulative percent of variance...  100.00
     Maximum significance of Wilks' Lambda      1.0000

Prior probability for each group is  .50000

Classification Function Coefficients
(Fisher's Linear Discriminant Functions)

Y       =          0              1

X1           .3010369       2.095269
X2           .5184705      -.3655217
(constant)  -2.224849      -6.449538

                       Canonocal Discriminant Functions

               Pct of   Cum  Canonical  After  Wilks'

Fcn Eigenvalue Variance  Pct      Corr      Fcn  Lambda  Chisquare   DF  Sig
                                          :   0   .4169    10.499    2  .005:
  1*    1.3986  100.00  100.00    .7636 :

  * marks the   1 canonical discriminant functions remaining in the analysis

tandardized Canonical Discriminant Coefficients

            FUNC  1
            1.53766
            -.95765

cture Matrix:

ed-within-groups correlations between discriminating variables
                              and canonical discriminant functions
iables ordered by size of correlation within function)

            FUNC  1
             .79579
             .23354

andardized Canonical Discriminant Function Coefficients

             FUNC  1
            .7983764
           -.3933485
stant)  -2.104588
```

Canonical Discriminant Functions evaluated at Group Means (Group Centroids)

Group	FUNC 1
0	-1.34841
1	.89894

Test of equality of group covariance matrices using Box's M

The ranks and natural logarithms of determinants printed as those of the group covariance matrices.

Group Label	Rank	Log Determinant
0	2	2.558776
1	2	1.663176
Pooled Within-Groups Covariance Matrix	2	2.173845

Box's M	Approximate F	Degrees of freedom		Significance
2.1607	.59074	3,	4817.6	.6211

Case Number	Mis Val	Sel	Actual Group		Highest probability Group	P(D/G)	P(D/G)	2nd Highest Group	P(G/D)	Discrim Scores
1			0		0	.7255	.9649	1	.0351	-1.6996
2			0		0	.1257	.9974	1	.0026	-2.8796
3			0		0	.6547	.8206	1	.1794	-.9012
4			0		0	.6379	.8127	1	.1873	-.8778
5			0	**	1	.3279	.5809	0	.4191	-.0794
6			0		0	.7608	.9612	1	.0388	-1.6528
7			1		1	.5507	.7657	0	.2343	.3022
8			1	**	0	.3876	.6419	1	.3581	-.4845
9			1	**	0	.3812	.6359	1	.3641	-.4728
10			1		1	.5441	.9799	0	.0201	1.5056
11			1		1	.5664	.7750	0	.2250	.3256
12			1		1	.8220	.9540	0	.0460	1.1240
13			1		1	.5287	.9809	0	.0191	1.5290
14			1		1	.1532	.9968	0	.0032	2.3274
15			1		1	.3006	.9922	0	.0078	1.9340

Symbols used in Plots

Symbol	Group	Label
1	0	
2	1	

```
     Histogram for Group        0
              Canonical Discriminant Function 1
     4 +                                          +
       |                                          |
       |                                          |
       |                                          |
     3 +                                          +
       |                                          |
       |                                          |
       |                                          |
     2 +                  1 1                     +
       |                  1 1                     |
       |                  1 1                     |
       |                  1 1                     |
     1 +               1  1 1 1                   +
       |               1  1 1 1                   |
       |               1  1 1 1                   |
       |               1  1 1 1                   |
        X----|----|----|----|----|----|----|----X
      Out -6.0 -4.0 -2.0    .0  2.0  4.0  6.0    Out
 Class    111111111111111111112222222222222222222222
Centroids                   1
```

```
              Histogram for Group        1
              Canonical Discriminant Function 1
     4 +                                          +
       |                                          |
       |                                          |
       |                                          |
     3 +                                          +
       |                                          |
       |                                          |
       |                                          |
     2 +                     2 2  2               +
       |                     2 2  2               |
       |                     2 2  2               |
       |                     2 2  2               |
     1 +                     2 2 2222             +
       |                     2 2 2222             |
       |                     2 2 2222             |
       |                     2 2 2222             |
        X----|----|----|----|----|----|----|----X
      Out -6.0 -4.0 -2.0    .0  2.0  4.0  6.0    Out
 Class    111111111111111111112222222222222222222222
Centroids                          2
```

```
                All-groups stacked Histogram

               Canonical Discriminant Function 1
     4 +                                                  +
       |                                                  |
       |                                                  |
       |                                                  |
     3 +                                                  +
       |                                                  |
       |                                                  |
       |                                                  |
     2 +                 1 12 2  2                        +
       |                 1 12 2  2                        |
       |                 1 12 2  2                        |
       |                 1 12 2  2                        |
     1 +               1  1 1212 2222                     +
       |               1  1 1212 2222                     |
       |               1  1 1212 2222                     |
       |               1  1 1212 2222                     |
        X----|----|----|----|----|----|----|----X
      Out -6.0 -4.0 -2.0   .0  2.0  4.0  6.0    Out
  Class   1111111111111111111122222222222222222222
Centroids                   1     2

Classification Results -

                         No. of    Predicted Group Membership
  Actual Group            Cases        0           1
--------------------    ------    --------    --------
Group       0              6          5           1
                                    83.3%       16.7%

Group       1              9          2           7
                                    22.2%       77.8%

Percent of "grouped" cases correctly classified:  80.00%

Classification Processing Summary
        15 Cases were processed.
         0 Cases were excluded for missing or out-of-range group codes.
         0 Cases had at least one missing discriminating variable.
        15 Cases were used for printed output.


*******************************************************************************************


Now follows the output of the regression analysis with dummy dependent variable.

Listwise Deletion of Missing Data

           Mean   Std Dev  Label
Y          .600      .507  poor/rich
X1        5.067     2.549  financial situation
X2        4.933     2.434  Level of services
```

Correlation:

	Y	X1	X2
Y	1.000	.685	.266
X1	.685	1.000	.726
X2	.266	.726	1.000

Equation Number 1 Dependent Variable.. Y poor/rich
Block Number 1. Method: Enter X1 X2
Equation Number 1 Dependent Variable.. Y poor/rich

Variable(s) Entered on Step Number
1.. X2 level of services
2.. X1 financial situation

Multiple R	.76361
R Square	.58309
Adjusted R Square	.51361
Standard Error	.35365

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	2	2.09914	1.04957
Residual	12	1.50086	.12507

F = 8.39174 Signif F = .0053

Equation Number 1 Dependent Variable.. Y poor/ rich

------------------ Variables in the Equation ------------------

Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
X2	-.102058	.056490	-.489845	-1.807	.0959
X1	.207146	.053948	1.041084	3.840	.0024
(constant)	.053947	.223775		.241	.8136

****

Listwise Deletion of Missing Data

Equation Number 1 Dependent Variable.. Y poor/ rich

Block Number 1. Method: Enter X1

Equation Number 1 Dependent Variable.. Y poor/ rich

Variable(s) Entered on Step Number
1.. X1 financial situation

```
Multiple R              .68534
R Square                .46970
Adjusted R Square       .42890
Standard Error          .38321

Analysis of Variance
                    DF      Sum of Squares      Mean Square
Regression           1             1.69091          1.69091
Residual            13             1.90909           .14685

F = 11.51429 Signif F = .0048


Equation Number 1 Dependent Variable.. Y poor/rich


------------------ Variables in Equation ------------------

Variable                 B        SE B       Beta          T   Sig T

X1                 .136364    .040186    .685344      3.393   .0048
(Constant)        -.090909    .226380                 -.402   .6945

****************************************************************


Listwise Deletion of Missing Data
Equation Number 1    Dependent Variable..   Y   poor/rich
Block Number 1.   Method:  Enter      X2


Equation Number 1    Dependent Variable..   Y   poor/rich

Variable(s) Entered on Step Number
   1..    X2         level of services


Multiple R              .26622
R Square                .07087
Adjusted R Square      -.00060
Standard Error          .50724

Analysis of Variance
                    DF      Sum of Squares      Mean Square
Regression           1              .25514           .25514
Residual            13             3.34486           .25730

F =        .99164        Signif F =  .3375


Equation Number 1    Dependent Variable..    Y poor/ rich
```

------------------ Variables in the Equation ------------------

Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
X2	.055466	.055700	.266221	.996	.3376
(Constant)	.326367	.304401		1.072	.3031

فصل ۹

تحلیل عوامل: تحقیق مربوط به سازگاری زناشویی

این فصل به سه قسمت تقسیم می‌شود. با استفاده از مثال تحقیقی سازگاری زناشویی که اساس کار ما را تشـــکیل می‌دهد (بخش ۶-۲-۱) ابتدا **تحلیل مؤلفه‌های اصـــلی** (PCA) مورد بحث قرار می‌گیرد. سپس به تحلیل **عامل‌های اصلی** (PFA) می‌پردازیم. هر یک از این دو شکل تحلیل عامل PCA و PFA، دارای مدل‌های زیربنایی مربوط به خود هســتند، امّا روش محاســبه راه حل عاملی آن‌ها یکسان است. با این وجود، شمار زیادی روش‌های محاسباتی طرح شده‌اند، به طوری‌که در واقع می‌توانیم یک شمای کلی از تحلیل عامل را بیان کنیم. بنابراین، در قسمت سوم یک مرور کلی تحت عنوان «**شیوه‌های مختلف تحلیل عوامل**» ارائه خواهد شد.

در رابطه با PCA و PFA ما همان طرح فصـــل‌های قبلی را دنبال می‌کنیم، یعنی به ترتیب، مســـأله تحقیق و نمودار علّی، ماتریس داده‌ها، مدل مربوط به آن، رویکرد هندســـی، اهداف تحقیق، محاسبات دستی، پیش‌فرض‌ها و برون‌داد کامپیوتری بررسی می‌شوند. البته، موضوع‌های متنوعی در این جا به اختصار توضیح داده خواهد شد و سپس از روش‌های ریاضی‌ای که پیش‌تر آموختیم، مثل ماتریس جبر و به خصوص عملیات SVD (تجزیه مقدار منفرد[1]) استفاده خواهیم کرد.

۹-۱ تحلیل مؤلفه‌های اصلی

۹-۱-۱ مسأله تحقیق و نمودار علّی

در تحقیق مربوط به سازگاری زناشویی به یک نمونه تصادفی شامل ۳۴۹ زوج، ۲۰ سؤال داده شد تا جواب دهند. در این مطالعه در واقع مســـأله تحقیقی وجود نداشـــت، تنها چیزی که محققان انجام دادند، گردآوری ۲۰ فقره مطالب در رابطه با سازگاری زنا شویی بود. آن‌ها تصمیم‌گیری در مورد این که آیا یک ساختار مکنون در این موارد قابل تشخیص است یا نه را به تحلیل آماری موکول کردند.

این فرمت اساسی یا شاید بهتر باشد بگوییم این عدم وجود فرمت اساسی، عنوان **ساختار مکنون** به خود گرفت. تحلیل عامل را در حقیقت می‌توان یک شیوه تحلیل ساختار مکنون به حساب آورد. در صورتی‌که بخواهیم ببینیم آیا مفهومی مثل ســازگاری زناشــویی را می‌توان به چند خصــیصــه نهفته

1. Singular value decomposition (SVD)

(بُعد) تقسـیم کرد، این شـیوه بسـیار مفید خواهد بود. آنگاه ۲۰ شـاخص (= متغیر معلوم= ایتم= مشاهده= سؤال پرسش نامه) به زیرگروه‌های مختلف دسته‌بندی می‌شوند. شاخص‌های هر یک از این زیرگروه‌ها همبستگی درونی بالایی دارند، به حساب این که همگی یک بعد را می‌سنجند. چیزی که در «بارهای عاملی» بالای آن‌ها روی متغیر مکنون مربوطه تجلّی می‌یابد.

بین دو حد انتهایی، حالات بسیاری وجود دارد. در یک حد، همه ۲۰ شاخص تقریباً یک چیز را می سنجند و از این رو همبستگی بین آن‌ها خیلی زیاد است، طوری که تقریباً می‌توان آن‌ها را جای یکدیگر قرار داد. هر یک از سـؤال‌ها که پرسـیده شـود، «توافق در مسـائل مالی» یا «نوازش روزانه»، جواب زوج های پا سخگو تقریباً یک سان خواهد بود. در چنین حالتی مواد تحقیق دارای ساختار یک بعدی اسـت، زیرا همه شـاخص‌ها روی یک متغیر مکنون (عامل) دارای بار زیادی هسـتند. حد نهایی دیگر این اسـت که همه ۲۰ سـؤال چیز متفاوتی را بسـنجند. این ۲۰ شـاخص به ۲۰ حالت منفرد تقسیم می شوند، یعنی ۲۰ مجموعه که هر یک فقط یک عنصر دارد. از این راه حل ۲۰ بعدی چیزی فهمیده نمی‌شود، چون ساختار مکنون مواد تحقیق به همان پیچیدگی ساختار آشکار اولیه آن است. در عمل معمولاً حالتی بین این دو حد نهایی اتفاق می‌افتد: در تحقیقات واقعی تعداد زیادی شـاخص‌های مشـاهده شـده را می‌توان به تعداد کمتری بعد کاهش داد، مثلاً ۲۰ سـؤال سـازگاری زناشویی به سه بعد «مهاجرت»، «توافق» و «تعلق عاطفی» تقلیل پیدا می‌کنند.

جهت ملاحظات آموزشـی، به سـه مورد از ۲۰ سـؤال اکتفا نموده و دو راه‌حل عاملی را بیرون می‌کشیم. سؤال‌های سه‌گانه عبارتند از :

X_6: تبادل نظر؛ این متغیر در پایین X_1 خواهد بود.

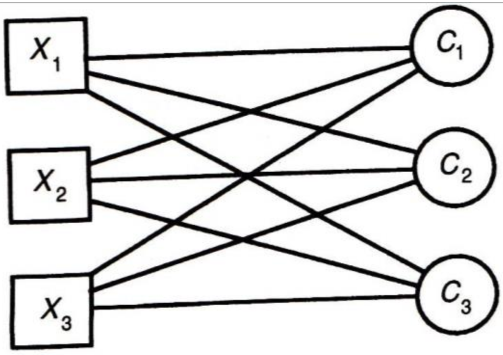
X_7: توافق مالی؛ این متغیر در پایین X_2 خواهد بود.

X_{17} : ترجیح خانه نشینی از سوی هر دو؛ این متغیر در زیر X_3 خواهد بود.

از تحلیل مؤلفه‌های اصلی (PCA) شروع می‌کنیم که در آن این سه متغیر می‌توانند اساساً به یک راه‌حل با همین تعداد، یعنی سه بعد کاهش پیدا کنند. سپس در تحلیل عامل اصلی (PFA)، تقلیل ابعاد، یعنی کاهش متغیرها به تعداد کمتری بعد، بیشتر مورد توجه قرار می‌گیرد.

این طرح دیگر یک طرح «علّی» نخواهد بود، زیرا تحلیل مؤلفه‌های اصـلی (به طور کلی تحلیل عوامل) شـیوه‌ای غیر وابسـته اسـت. بعضـی صـاحب‌نظران پیشـنهاد می‌کنند که یک پیکان علّی از متغیرهای مکنون به سمت شاخص‌ها رسم شود. آن‌ها از این نظریه دفاع می‌کنند که یک عامل (مثل همدم بودن) بر رفتار مشاهده شده (مثل تبادل نظر) تأثیر علّی دارد. ما با این نظر موافق نیستیم. ما عاملی را به عنوان مفهوم زیربنایی در نظر می‌گیریم که خلاصـه‌ی یک زیر مجموعه از شـاخص‌هایی اسـت که تقریباً یک چیز را می‌سـنجند. به عبارت دیگر، ما یک طرح تحلیل عاملی را به عنوان یک مدل اندازه‌گیری به حساب می‌آوریم نه یک مدل علّی.

در تحلیل مؤلفه‌های اصـــلی ما از «عامل‌ها» صـــحبت نمی‌کنیم، بلکه از «مؤلفه‌ها» صـــحبت می‌کنیم. برای سه متغیر $X_۱$، $X_۲$ و $X_۳$ سه مؤلفه $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ تهیه شده ا ست. در مراحل بعدی معلوم خواهد شـد که ما به همه این مؤلفه‌ها نیاز نداریم، بلکه ، مدل PCA در شـکل کامل خود، به تعداد مؤلفه‌ها متغیر دارد. این طرح در شکل۱-۹ نشان داده شده است.



شکل ۱-۹ طرح تحلیل مؤلفه‌های اصلی

۲-۱-۹ ماتریس داده‌ها

در مجموعه داده‌های (اختصاری) ما، n =۱۲ نفر در نظر گرفته شد که در آن سه عبارت ارائه گردیده اســت: X_1، X_2 و X_3. فرض بر این اســت که این متغیرها در ســطح ســنجش فاصــله‌ای اندازه‌گیری شده‌اند. نمرات از ۱ تا ۹ نشان می‌دهند که پاسخگو تا چه حد یک جواب «سازگاری در زناشویی» را بیان کرده ا ست. در مورد X_3 یک ا ستثناء قائل می شویم که به دلایلی که در بخش‌های بعد رو شن می‌شود معکوس شده است.

X_1 میزانی است که عدم توافق‌ها با گفتگو حل شده‌اند. X_2 مقیاس توافق مالی است. X_3 میزانی از ترجیح زن و شوهر هر دو برای «عدم ح ضور» در منزل در اوقات فراغت ا ست. ماتریس داده‌ها در جدول ۱-۹ نشان داده شده است.

۳-۱-۹ مدل تحلیل مؤلفه‌های اصلی

در PCA (تحلیل مؤلفه‌های ا صلی) ابتدا سعی می شود تا یک ترکیب خطی از سه متغیر $X_۱$، $X_۲$ و $X_۳$ به د ست آید، به طریقی که از این سه متغیر حداکثر واریانس حا صل شود. چنین ترکیب خطی به صـورت $C_۱$ (C مخفف مؤلفه) مشـخص می‌شـود. سـه متغیر به شـکل نمرات اسـتاندارد z بیان می‌شوند:

$.C_۱ = u_{۱۱} z_۱ + u_{۱۲} z_۲ + u_{۱۳} z_۳$

جدول ۱-۹ ماتریس داده‌ها

$X_۱$	$X_۲$	$X_۳$
۸	۹	۱
۵	۵	۵
۴	۴	۵
۸	۷	۲
۷	۱	۴
۴	۵	۷
۵	۵	۵
۲	۶	۸
۶	۵	۳
۳	۲	۶
۲	۸	۹
۶	۳	۵

در حالت استثنایی که $C_۱$ ۱۰۰٪ واریانس سه متغیر را اقتباس می‌کند، این مؤلفه نخست کفایت خواهد کرد؛ زیرا به طور جامع تمام اطلاعات مربوط به ماتریس داده‌ها را ارائه می‌کند. البته این حالت به ندرت اتفاق می‌افتد. به عنوان مثال، حالتی را در نظر بگیرید که مؤلفه نخست فقط ۶۰٪ واریانس را اقتباس کند. در این صورت به جستجوی مؤلفه دومی می‌پردازیم عمود بر مؤلفه نخست، به طریقی که از ۴۰٪ واریانس باقی مانده حداکثر ممکن را اقتباس نماید. سپس به جستجوی مؤلفه سوم می‌پردازیم که بر دو مؤلفه دیگر عمود باشد، به گونه‌ای که واریانس باقی مانده را به خود اختصاص دهد. این سه مؤلفه روی هم ۱۰۰٪ واریانس متغیرهای سه گانه فوق را اقتباس می‌کنند.

بنابراین در تحلیل مؤلفه‌های اصلی (PCA) ما با لحاظ کردن دو محدودیت زیر به جستجوی ترکیبات متعددی از سه متغیر، می‌پردازیم:

۱- مؤلفه‌ها بایستی عمود بر هم باشند (متعامد بودن).

۲- مؤلفه اوّل بایستی حداکثر ممکن از واریانس متغیرهای اولیه، مؤلفه دوم از واریانس باقی‌مانده را اقتباس نماید و الی آخر، تا این که کل واریانس متغیرهای منظور شود (**روش محور اصلی**).

در مثال ما سه مؤلفه وجود دارد:

$$C_۱ = u_{۱۱} z_۱ + u_{۱۲} z_۲ + u_{۱۳} z_۳$$

$$C_۲ = u_{۲۱} z_۱ + u_{۲۲} z_۲ + u_{۲۳} z_۳$$

$$C_۳ = u_{۳۱} z_۱ + u_{۳۲} z_۲ + u_{۳۳} z_۳$$

با علائم ماتریسی این مدل چنین است:

$$\boxed{\mathbf{C=XU}}$$

در این مدل X ماتریس (۱۲×۳) از نمرات متغیرهای X_1، X_2 و X_3 اســـت، یعنی ماتریس داده‌های اصلی، البته با نمرات استاندارد. $\mathbf{U}$ ماتریس (۳×۳) از ضرایب نمرات عامل uij است. اگر این ضرایب معلوم باشـــند، نمرات ۱۲ نفر روی هر یک از مؤلفه‌های ســـه‌گانه قابل محاســـبه اســـت. این نمره‌های مؤلفه‌ها در ماتریس ۱۲×۳ ی $\mathbf{C}$ گرد آمده‌اند.

مدل PCA (تحلیل مؤلفه‌های اصــلی) را به طریق دیگری هم می‌توان در نظر گرفت. هر متغیر اولیه را می‌توان به عنوان یک ترکیب خطی از سه مؤلفه در نظر گرفت:

$$Z_1 = a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3$$
$$Z_2 = a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3$$
$$Z_3 = a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3$$

با علائم ماتریسی مدل بدین گونه است:

$$\boxed{\mathbf{X} = \mathbf{CA}'}$$

ضرایب ماتریس $\mathbf{A}$ بارهای مؤلفه‌ای نامیده می شوند. این‌ها وزن‌های بتای یک رگر سیون چندگانه از یک متغیر (اســـتاندارد شـــده) به عنوان تابعی از ســـه مؤلفه هســـتند. در PCA (تحلیل مؤلفه‌های اصـــلی) خواهیم دید که این وزن‌های بتا با همبســـتگی بین متغیرها و مؤلفه‌ها برابر هســـتند. علت ا ستفاده گسترده از ماتریس $\mathbf{A}$ برای تفسیر راه حل PCA (تحلیل مؤلفه‌های ا صلی) همین ا ست. از این‌رو، مشــاهده این ماتریس نشــان خواهد داد که متغیرهای معینی با یک مؤلفه همبســتگی زیادی دارند (بارهای عاملی زیادی دارند) درحالی‌که متغیرهای دیگر ندارند. از این طریق تعیین اینکه کدام متغیرها بوسیله مؤلفه مورد بررسی بهتر ارائه می‌شوند، میسّر می‌گردد.

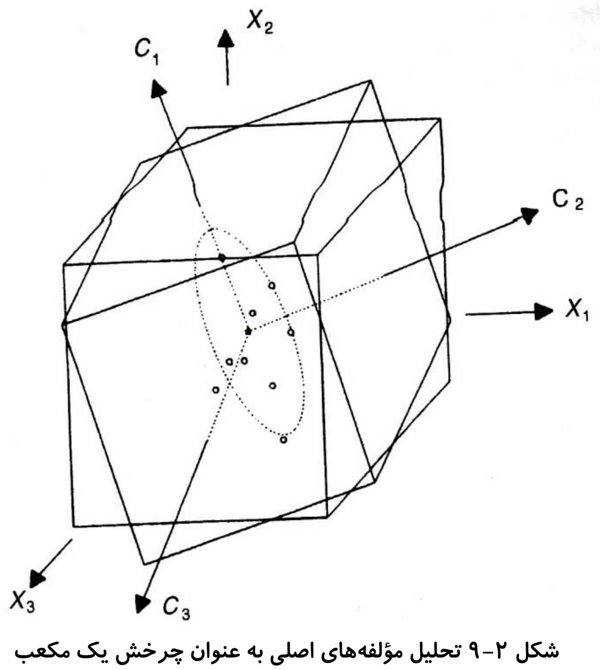
۴-۱-۹ رویکرد هندسی

مدل PCA (تحلیل مؤلفه‌های ا صلی) چنانچه از نقطه نظر هند سی بدان نگاه کنیم، خیلی رو شن‌تر خواهد شد، زیرا اجرای تحلیل مؤلفه‌های ا صلی در واقع شبیه چرخاندن یک مکعب ا ست. سه متغیر X_1، X_2 و X_3 را توسط یک فضای سه بعدی می‌توان نمایش داد که به شکل مکعبی با سه متغیر به عنوان سه وجه آن در می‌آید. اگر این متغیرها ا ستاندارد شده با شند، در این صورت مبدأ ا صلی در مرکزیت یعنی نقطه داخل مکعب، محلی اســـت که میانگین‌ها به هم می‌رســـند. نقاط دوازده‌گانه در اطراف این مبدأ قرار می‌گیرند و هر یک معرف یک فرد است.

در PCA (تحلیل مؤلفه‌های اصــلی) ما ســعی داریم یک خط مســتقیم از مبدأ رســم کنیم به گونه‌ای که تصویری از ۱۲ نقطه بر آن بی‌شترین پراکندگی (حداکثر واریانس) ممکن را دا شته با شد. این نخســتین خط مســتقیم ترکیب خطی C_1 اســت. چنانچه این ۱۲ نقطه از قبل بر روی یک خط م ستقیم واقع شده با شند (چند هم خطی کامل)، در این صورت این مؤلفه‌ی نخ ست همه اطلاعات

ماتریس داده‌ها را به طور جامعی نشـان خواهد داد. البته این حالت بسـیار نادر اسـت یا هرگز اتفاق نمی‌افتد. عموماً نقاط حول C_1 پراکنده هستند، یعنی به شکل یک دود سیگار در می‌آیند.

بنابراین ما به جستجوی خط مستقیم دوم C_2 می‌پردازیم که از مبدأ گذشته و بر خط نخست عمود باشد، به گونه‌ای که تصاویر نقاط ۱۲گانه بر این خط دوم بیشترین واریانس را داشته باشند. این مکعب جدید در حقیقت به همان اندازه بازنمایی خوبی از داده‌ها را ارائه می‌کند، امّا جالب‌تر از آن است، زیرا اگر ۱۲ نقطه، الگوی سازمان یافته‌ای یعنی به شکل دود یک سیگار داشته باشند، در این صورت مکعب جدید با نقاط بهتر تطابق دارد، چون مؤلفه نخست در جهت محور طولی سیگار امتداد دارد و مؤلفه‌های دیگر در امتداد محور کوچک سیر می‌کنند. حالت اخیر در صورتی‌که سه متغیر با یکدیگر ناهمبسته باشند اتفاق نمی‌افتد، برای این که تمرکز نقاط به شکل یک کره بروز می‌کند و هر مکعب دقیقاً به خوبی دیگری است. در شکل ۲-۹ نشان داده شده است که چگونه این مکعب برای داده‌های سازگاری زناشویی چرخش یافته، در حالی‌که نقاط در جای خود باقی می‌مانند.



شکل ۲-۹ تحلیل مؤلفه‌های اصلی به عنوان چرخش یک مکعب

۵-۱-۹ اهداف این شیوه

طی قرن اخیر تحلیل عامل و به خصـوص تحلیل مؤلفه‌های اصـلی برای مقاصـد گوناگونی بکار برده شده است، شامل :

۱-کاهش چندگانگی به یگانگی: حل الگوهای پیچیده تداعی‌های درون متغیری[1] و یافتن عصاره آن.
۲-تحلیل ساختار مکنون: شناخت خصیصه‌های مکنون که ساختاری را در درون داده‌ها پنهان می‌دارد.
۳-توسعه نشانه‌شناسی‌های تجربی[2] متغیرها.
۴- تقلیل ابعاد: تقلیل یک فضای n متغیری به فضایی متشکل از P بعد، $P\langle n$.
۵- شاخص‌گذاری یا مقیاس‌بندی: امتحان این موضوع که آیا n متغیر را می‌توان به یک بعد تقلیل داد، که اگر امکان داشته باشد یک شاخص یا مقیاس یک بعدی ایجاد شود (حالت خاصی از تقلیل ابعاد با P=۱).
۶- متعامدسازی پیش‌بینی‌کننده‌ها: تغییر شکل ماتریس متغیرهای مستقل به یک تحلیل رگرسیون چندگانه که هم‌خطی زیادی دارد.
این کاربردهای تحلیل عامل، یک خط فکری کلی را نشان می‌دهد. به گونه‌ای ویژه‌تر اهداف PCA عبارتند از :
۱-یافتن مؤلفه‌هایی به تعداد متغیرهای اصلی، به شیوه‌ای که مؤلفه‌ها با یکدیگر متعامد بوده و بدنبال هم حداکثر واریانس را از متغیرها اقتباس نمایند. این کار با آزمون ساختار ویژه ماتریس داده‌های **X** یا ماتریس همبستگی **R** صورت می‌گیرد. ارزش‌های ویژه، واریانس‌های تصاویر نقاط بر هر یک از مؤلفه‌ها هستند. بردارهای ویژه کسینوس‌های هادی هستند که نشان می‌دهند فضای متغیر اولیه چه اندازه باید چرخانده شود (نگاه کنید به رویکرد هندسی).
۲-کاهش تعداد ابعاد با آزمودن این که چه متغیرهایی بر روی هر یک از مؤلفه‌ها بار زیادی دارند و جستجوی یک «ساختار ساده». این کار با آزمایش ماتریس **A** بارهای مؤلفه‌ای و همچنین محاسبه افزونی[1] هر مؤلفه صورت می‌گیرد.
۳- چرخش فضای مؤلفه‌ای حاصل و تغییر آن به یک حالت جدید که ساختاری به مراتب ساده‌تر و تفسیر بهتری از محتوا را فراهم سازد.

۶-۱-۹ آزمودن ساختار ویژه X یا R: ملاحظات اولیه پیرامون تجزیه مقدار منفرد

در شیوه PCA بایستی به جستجوی یک حداکثر پرداخت، زیرا مؤلفه نخست بایستی حداکثر واریانس را از مجموعه متغیرها بگیرد، و هر یک از مؤلفه‌های بعدی نیز باید حداکثر واریانس باقی مانده را تحت شرایط متعامد بودن به دست آورند. این یک مشکل اساسی ساختار ویژه است.

1. Intervariable associations 2. empirical Typologies
1. redundance

به منظور پیدا کردن ساختار ویژه ماتریس $\mathbf{X}$ می‌توانیم از تجزیه مقدار منفرد استفاده کنیم که به صورت اختصاری SVD نامیده می‌شود. این عملیاتی است که طبق آن هر ماتریس $\mathbf{M}$ به صورت حاصل‌ضرب سه ماتریس بیان می‌شود: $\mathbf{M=P}\,\Delta\,\mathbf{U'}$.

اگر چنین عملیاتی را روی $\mathbf{X}$ صـــورت دهیم، طوری‌که $\mathbf{X=P}\,\Delta\,\mathbf{U'}$ ، آنگاه $\mathbf{P}$ معادل ماتریس بردار ویژه $\mathbf{XX'}$ و $\mathbf{U}$ معادل ماتریس بردارهای ویژه $\mathbf{X'X}$ خواهد بود. ماتریس Δ شامل ریشه‌های دوّم ارزش‌های ویژه $\mathbf{X'X}$ و همچنین $\mathbf{XX'}$ است.

از آن جا که ارزش‌های ویژه $\mathbf{XX'}$ و $\mathbf{X'X}$ مساوی هستند، در عمل بهتر است روی ماتریس $\mathbf{X'X}$ کار کنیم، چون از ماتریس (۱۲×۱۲) $\mathbf{X'X}$ خیلی ســـاده‌تر اســـت، به خاطر این که تعداد متغیرها از افراد کمتر است.

ســـاده کردن‌های دیگری هم می‌توان صـــورت داد، چنان که می‌دانید $\mathbf{XX'/(n-1)}$ معادل ماتریس همبســـتگی $\mathbf{R}$ اســـت (n=۱ تعداد افراد منهای ۱ اســـت). از این رو ما همچنین می‌توانیم ساختار ویژه $\mathbf{R}$ را هم امتحان کنیم، زیرا ارزش‌های ویژه $\mathbf{R}$ همان ارزش‌های ویژه $\mathbf{X'X}$ تقسـیم بر n-۱ هســـتند. از این گذشـــته $\mathbf{R}$ یک مربع ماتریس متقارن اســـت. در چنین حالتی عملیات SVD بسیار ساده می‌شود، زیرا در ضرب $\mathbf{P\Delta\Delta l}$ در حالت ماتریس‌های متقارن $\mathbf{P=U}$ است.

نتیجه می‌گیریم:

$$\boxed{\mathbf{R = UDU'}}$$

که در آن :

U= ماتریس بردارهای ویژه $\mathbf{R}$ و

D= ماتریس ارزش‌های ویژه $\mathbf{R}$

= ارزش‌های ویژه $\mathbf{X'X}$ تقسیم بر n-۱ بوده

= $\Delta^{۲}/(n-۱)$ = ماتریس مجذور ارزش‌های ویژه $\mathbf{X}$ تقسیم بر n-۱.

آنچه که از کل این ماجرا روشن می شود این است که یافتن ساختار ویژه $\mathbf{X}$ به اندازه یافتن ساختار ویژه $\mathbf{R}$ ارزش دارد. همین دلیل باعث می‌شـــود برنامه‌های کامپیوتری این امکان را فراهم کنند که ماتریس همبستگی $\mathbf{R}$ را به جای ماتریس داده‌های اصلی $\mathbf{X}$ به‌عنوان ورودی تحلیل مؤلفه‌های اصلی به کار ببریم.

۷-۱-۹ ارزش‌های ویژه و بردارهای ویژه داده‌های سازگاری زناشویی

حالا ســـاختار ویژه $\mathbf{R}$ را در مورد مثال کوچک خودمان محاسبـــه می‌کنیم: ماتریس همبســـتگی $\mathbf{R}$ بدین‌گونه است:

$$R=\begin{bmatrix} ۱ & ۰.۰۵۶ & -۰.۹۳۲ \\ ۰.۰۵۶ & ۱ & -۰.۱۰۰ \\ -۰.۹۳۲ & -۰.۱۰۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

به‌منظور یافتن ســـاختار ویژه $\mathbf{R}$، ما راه کاری را به کار می‌بندیم که در فصـــل قبلی پیرامون تحلیل افتراقی مشاهده کردیم. در آن جا ما ساختار ویژه ماتریس $\mathbf{W}^{-۱}\mathbf{B}$ را امتحان کردیم و با این عمل دســـتگاه معادلات $(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{B}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})\mathbf{k}=\mathbf{0}$ باید حل می‌شـــد. این کار با تشـــکیل معادله ویژه: $\left|\mathbf{W}^{-۱}\mathbf{B}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}\right|=\mathbf{0}$ انجام می‌گرفت. از این طریق حداکثر ارزش ویژه λ محاســبه و برای به دســت آوردن بردار ویژه $\mathbf{k}$ در دستگاه جانشین می‌شد.

در تحلیل عوامل، ماتریسی که ساختار ویژه آن آزمون می شود $\mathbf{W}^{-۱}\mathbf{B}$ نیست، بلکه ماتریس $\mathbf{R}$ اســت. در تحلیل افتراقی دو گروهی، تنها یک ارزش ویژه و یک بردار ویژه وجود داشــت، زیرا تنها یک تابع متمایزکننده t محاسبه شده. در این جا چند ارزش ویژه و بردار ویژه وجود دارد (در مثال ما سه مورد چون ما به جستجوی سه مؤلفه می‌پردازیم). چنان که چند دستگاه معادلات هم وجود دارد. چنین دستگاه معادلاتی به شکل $(\mathbf{R}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})\mathbf{u}=\mathbf{0}$ است. معادله ویژه $\left|\mathbf{R}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}\right|=\mathbf{0}$ است:

$$\left|\begin{bmatrix} ۱ & ۰.۰۵۶ & -۰.۹۳۲ \\ ۰.۰۵۶ & ۱ & -۰.۱۰۰ \\ -۰.۹۳۲ & -۰.۱۰۰ & ۱ \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\right|=۰$$

$$\begin{vmatrix} ۱-\lambda & ۰.۰۵۶ & -۰.۹۳۲ \\ ۰.۰۵۶ & ۱-\lambda & -۰.۱۰۰ \\ -۰.۹۳۲ & -۰.۱۰۰ & ۱-\lambda \end{vmatrix}=۰$$

$$(۱-\lambda)\begin{bmatrix} ۱-\lambda & -۰.۱۰۰ \\ -۰.۱۰۰ & ۱-\lambda \end{bmatrix}-۰.۰۵۶\begin{bmatrix} ۰.۰۵۶ & -۰.۹۳۲ \\ -۰.۱۰۰ & ۱-\lambda \end{bmatrix}-۰/۹۳۲\begin{bmatrix} ۰.۰۵۶ & -۰.۹۳۲ \\ ۱-\lambda & -۰۱۰۰ \end{bmatrix}=۰$$

$$(۱-\lambda)[(۱-\lambda)^{۲}-۰.۱۰۰^{۲}]-۰.۰۵۶[۰.۰۵۶(۱-\lambda)-(۰.۱۰۰)(۰.۹۳۲)]$$
$$-۰.۹۳۲[(۰.۰۵۶)(-۰.۱۰۰)+۰.۹۳۲(۱-\lambda)]=۰$$

$$(۱-\lambda)^{۳}-(۰.۱۰۰)^{۲}(۱-\lambda)-(۰.۰۵۶)^{۲}(۱-\lambda)+۲(۰.۰۵۶)(۰.۱۰۰)(۰.۹۳۲)$$
$$-(۰.۹۳۲)^{۲}(۱-\lambda)=۰$$
$$(۱-\lambda)^{۳}-۰.۸۸۲۹۱-\lambda)+۰.۰۱۰=۰$$

حل این معادله $۱-\lambda=-۰/۹۴۵$، $۱-\lambda=۰/۰۱۲$ و $۱-\lambda=۰/۹۳۳$ را به دست می‌دهد، همچنین $\lambda=۱/۹۴۵$، $\lambda=\mathbf{۰/۹۸۸}$ و $\lambda=۰/۰۶۷$ حاصل می‌شود. این سه ارزش لامبدأ ارزش‌های ویژه $\mathbf{R}$ هستند.

بردارهای ویژه با جایگزینی هر یک از این سه ارزش لامبدأ در معادله ماتریس $(R-\lambda\mathrm{I})u=۰$ به دست می‌آیند. در این جا این کار را برای اولین ارزش ویژه $\lambda=۱/۹۴۵$ یا $۱-\lambda=-۰/۹۴۵$ انجام می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} -۰.۹۴۵ & ۰.۰۵۶ & -۰.۹۳۲ \\ ۰.۰۵۶ & -۰.۹۴۵ & -۰.۱۰۰ \\ -۰.۹۳۲ & -۰.۱۰۰ & -۰.۹۴۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{۱} \\ u_{۲} \\ u_{۳} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$-۰.۹۴۵u_{۱}+۰.۰۵۶u_{۲}-۰.۹۳۲u_{۳}=۰$$
$$۰.۰۵۶u_{۱}-۰.۹۴۵u_{۲}-۰.۱۰۰u_{۳}=۰$$
$$-۰.۹۳۲u_{۱}-۰.۱۰۰u_{۲}-۰.۹۴۵u_{۳}=۰$$

جواب این دستگاه مقدار واحدی نیست. معادلات از لحاظ خطی مستقل نیستند. بنابراین $u_{۱}$، $u_{۲}$ و $u_{۳}$ را نمی‌توان دقیقاً مشخص کرد. فقط می‌توان نشان داد آن‌ها چه بخشی را به یکدیگر تحمیل می‌کنند، یعنی $\mathbf{u}'=(-۰/۸۸۶\quad -۰/۸۴۷\quad ۰/۸۸۹)$. بعد از بهنجارسازی، یعنی تقسیم کردن بر ریشه دوم مجموعه مجذورات $u_{۱}$، $u_{۲}$ و $u_{۳}$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{u}'=(\,-۰/۷۰۱\quad -۰/۱۱۶\quad ۰/۷۱۴)$$

برای ارزش ویژه دوم $\lambda=۰/۹۸۸$ یا $1-\lambda=۰/۰۱۲$، معادله ماتریس را به طور مشابهی تشکیل می‌دهیم، پس از حل دستگاه و بهنجارسازی، بردار ویژه مربوطه را به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{u}'=(\,-۰/۱۰۶\quad ۰/۹۹۳\quad ۰/۰۵۸)$$

برای مقدار سوم $\lambda=۰/۰۶۷$ یا $۱-\lambda=۰/۹۳۳$ بردار ویژه عبارت است از:

$$\mathbf{u}'=(۰/۷۰۵\quad ۰/۰۳۴\quad ۰/۷۰۸)$$

این سه بردار ویژه $\boldsymbol{u}$ را در یک ماتریس گرد آورده و ماتریس مورد نظر $\mathbf{U}$ را به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix} -0.701 & -0.106 & 0.705 \\ -0.116 & 0.993 & 0.034 \\ 0.704 & 0.704 & 0.708 \end{bmatrix}$$

ماتریس $\mathbf{D}$ ارزش‌های ویژه، به صورت ماتریس قطری نوشته می‌شود:

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} 1.945 & 0 & 0 \\ 0 & 0.988 & 0 \\ 0 & 0 & 0.067 \end{bmatrix}$$

اکنون خواننده می‌تواند وارسی کند که $\mathbf{R}=\mathbf{UDU}'$:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰.۰۵۶ & -۰.۹۳۳ \\ ۰.۰۵۶ & ۱ & -۰.۱۰۰ \\ -۰.۹۳۲ & -۰.۱۰۰ & ۱ \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} -۰.۷۰۱ & -۰.۱۰۶ & ۰.۷۰۵ \\ -۰.۱۱۶ & ۰.۹۹۳ & ۰.۰۳۴ \\ ۰.۷۰۴ & ۰.۰۵۸ & ۰.۷۰۸ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱.۹۴۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰.۹۸۸ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰.۰۶۷ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۰.۷۰۱ & -۰.۱۱۶ & ۰.۷۰۱۴ \\ -۰.۱۰۶ & ۰.۹۹۳ & ۰.۰۵۸ \\ ۰.۷۰۵ & ۰.۰۳۴ & ۰.۷۰۸ \end{bmatrix}$$

همچنین می‌توان بررســـی کرد که $UU'=\mathrm{I}$، بدین معنا که U یک ماتریس متعامد اســـت، یعنی ماتریسی که عکس آن با ترانهاده آن برابر است: $U^{-۱}=U'$. این ماتریس U سه محور اولیه X را به سه محور مؤلفه می‌چرخاند، چنان که در شکل ۲-۹ نشان داده شده است.

۸-۱-۹ ماتریس c نمرات مؤلفه‌ای

برای به دســـت آوردن ماتریس $\mathbf{C}$ (۳×۱۲)، ماتریس داده‌های $\mathbf{X}$ (به ســـبک نمرات اســـتاندارد) در ماتریس استحاله $\mathbf{U}$ ضرب می‌شود: $\mathbf{C=XU}$.

$$
C = \begin{bmatrix}
-۲.۴۱۱ & ۱.۴۴۹ & -۰.۱۴۲ \\
۰.۰۰۰ & ۰.۰۰۰ & ۰.۰۰۰ \\
۰.۳۸۵ & -۰.۳۷۴ & -۰.۳۵۲ \\
-۲.۰۱۱ & ۰.۶۲۳ & ۰.۱۳۲ \\
-۰.۷۷۳ & -۱.۸۲۷ & ۰.۳۱۴ \\
۰.۹۳۸ & ۰.۱۰۰ & ۰.۲۶۸ \\
۰.۰۰۰ & ۰.۰۰۰ & ۰.۰۰۰ \\
۱.۸۶۲ & ۰.۶۵۲ & -۰.۰۸۹ \\
-۰.۹۳۸ & -۰.۱۰۰ & -۰.۲۶۸ \\
۱.۱۲۱ & -۱.۱۵۰ & -۰.۴۱۵ \\
۲.۰۶۴ & ۱.۵۲۸ & ۰.۲۴۳ \\
-۰.۲۳۶ & -۰.۹۰۱ & ۰.۳۰۸
\end{bmatrix}
= \begin{bmatrix}
۱.۴۳۶ & ۱.۷۱۳ & -۱.۷۱۳ \\
۰.۰۰۰ & -۰.۰۰۰ & -۰.۰۰۰ \\
-۰.۴۷۹ & -۰.۴۲۸ & -۰.۰۰۰ \\
۱.۴۳۶ & ۰.۸۵۶ & -۱.۲۸۵ \\
۰.۹۵۷ & -۱.۷۱۳ & -۰.۴۲۸ \\
-۰.۴۷۹ & -۰.۰۰۰ & ۰.۸۵۶ \\
۰.۰۰۰ & -۰.۰۰۰ & -۰.۰۰۰ \\
-۱.۴۳۶ & ۰.۴۲۸ & ۱.۲۸۵ \\
۰.۴۷۹ & -۰.۰۰۰ & -۰.۸۵۶ \\
-۰.۹۵۷ & -۱.۲۸۵ & ۰.۴۲۸ \\
-۱.۴۳۶ & ۱.۲۸۵ & ۱.۷۱۳ \\
۰.۴۷۹ & -۰.۸۵۶ & -۰.۰۰۰
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
-۰.۷۰۱ & -۰.۱۰۶ & ۰.۷۰۵ \\
-۰.۱۱۶ & ۰.۹۹۳ & ۰.۰۳۴ \\
۰.۷۰۴ & ۰.۰۵۸ & ۰.۷۰۸
\end{bmatrix}
$$

خوب است نگاه دقیق‌تری به این ماتریس **C** نمرات مؤلفه‌ها بیاندازیم. می‌توان بررسی کرد که میانگین‌های $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ برابر ۰ هستند. در واقع ماتریس استحاله $\boldsymbol{U}$، مکعب $X_۱ - X_۲ - X_۳$ را حول محورش چرخانده است (شکل ۲-۹)، طوری که باز هم میانگین محورهای مکعب $C_۱ - C_۲ - C_۳$ در مبدأ واقع می‌شود.

همبســـتگی‌های بین مؤلفه‌ای برابر ۰ هســـتند. در حقیقت ماتریس $\mathbf{U}$ به طریقی چرخش پیدا می‌کند که مؤلفه‌ها بر یکدیگر عمود باشند (شرط متعامد بودن).

واریانس‌های C_1، C_2 و C_3 با اندکی خطای گرد کردن، با سه ارزش ویژه برابر هستند: $\lambda_1 = ۱/۹۴۵$، $\lambda_2 = ۰/۹۸۸$ و $\lambda_3 = ۰/۰۶۷$. بنابراین ارزش‌های ویژه، پراکندگی تصاویر نقاط بر روی هر یک از سه مؤلفه می‌باشند. این پراکندگی‌ها یک ترتیب دارند: اولین مؤلفه دارای بیشترین واریانس، دومی کمتر از آن، و سومی از همه کمتر است.

مجموع سه ارزش ویژه (واریانس‌های مؤلفه‌ای) برابر با ۳=۱/۹۴۵+۰/۹۸۸+۰/۰۶۷ است. مجموع واریانس‌های سه متغیر اصلی (که به شکل نمرات استاندارد بوده و لذا واریانس آن‌ها به لحاظ تعریفی ۱ است) نیز همین اندازه است: ۳=۱+۱+۱. این بدین معنی است که مؤلفه‌ها، تمام واریانس متغیرها را اقتباس کرده‌اند.

نمرات مؤلفه‌ای ماتریس $\mathbf{C}$ می‌توانند به شـــکل اســـتاندارد هم باشـــند. از آن جا که میانگین‌های آن‌ها معادل ۰ است، ما تنها می‌بایست آن‌ها را بر هر یک از انحراف معیارهای C_1، C_2 و C_3 تقسیم کنیم، یعنی بر ریشه دوم معکوس ماتریس قطری $\mathbf{D}$. در نتیجه ماتریس $\mathbf{C}$ نمرات استاندارد مؤلفه‌ها برابر است با: $\boxed{\mathbf{C} = \mathbf{XUD}^{-۱/۲}}$

در این فرمول $\mathbf{X}$ ماتریس (۱۲×۳) نمرات اصـلی به شـکل اسـتاندارد شـده اسـت. $\mathbf{U}$ ماتریس (۳×۳) بردارهای ویژه است که سه محور اصلی X را در جهت سه محور جدید C (از مکعب قدیم به جدید) می‌چرخاند. $\mathbf{D}^{-1/2}$ ماتریس (۳×۳) قطری با ســه ارزش ویژه روی قطر اصــلی و صــفرها در جاهای دیگر اســـت، این ماتریس تمام واریانس‌های تصـــاویر نقاط بر روی محورهای C (در مکعب جدید) را معادل ۱ قرار می‌دهد. در قسمت بالا پیشنهاد شد ابتدا $\mathbf{XU}$ محاسبه و بعد در $\mathbf{D}^{-1/2}$ ضرب شــود. البته در نتایج کامپیوتری که متعاقباً خواهیم دید، حاصــل ضــرب $\mathbf{UD}^{-1/2}$ در ابتدا محاســبه می شود. این ماتریس را «ماتریس ضرب نمره عامل» می‌نامند و در X ضرب می شود تا C به دست آید. بنابراین: در نتایج کامپیوتری می‌بینیم که به جای این که $\mathbf{C} = (\mathbf{XU})\mathbf{D}^{-1/2}$ محاســـبه شـــود، $\mathbf{C} = \mathbf{X}(\mathbf{UD}^{-1/2})$ محاسبه می‌شود.ماتریس‌ضریب‌نمره عامل $\mathbf{UD}^{-1/2}$ در زیر ارائه شده است:

$$\mathbf{UD}^{-1/2} = \begin{bmatrix} -0.701 & -0.106 & 0.705 \\ -0.116 & 0.993 & 0.034 \\ 0.704 & 0.058 & 0.708 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.945 & 0 & 0 \\ 0 & 0.988 & 0 \\ 0 & 0 & 0.067 \end{bmatrix}^{-1/2}$$

$$= \begin{bmatrix} -۰.۵۰۳ & -۰.۱۰۷ & ۲.۷۱۸ \\ -۰.۰۸۳ & ۰.۹۹۹ & ۰.۱۳۱ \\ ۰.۵۰۵ & ۰.۰۵۸ & ۲.۷۳۰ \end{bmatrix}$$

اکنون می‌توانیم ماتریس (۳×۱۲) نمرات اســتاندارد شــده مؤلفه را که در نتایج کامپیوتری هم داده می شود- به دست آوریم:

در کار تحقیق، ماتریس نمرات مؤلفه‌ای در کنار هدف‌های دیگر به این منظور به کار می‌رود که پیش‌بینی‌کننده‌ها را در تحلیل رگر سیون چندگانه متعامد سازد. به طور مثال، فرض کنید در تحلیل رگرسیون چندگانه، سه شاخص سازگاری زناشویی ($X_۱$: گفت و شنود زوجین، $X_۲$: توافق مالی، $X_۳$: ترجیح هر دو نفر به ماندن در منزل)، با متغیر وابسته Y: عامل کامیابی، وجود دارند. در این صورت ضــریب همبســتگی $r_{13} = -۰/۹۳۲$ بین متغیرهای $X_۱$ و $X_۳$ خیلی زیاد اســت (چند هم خطی) و بنابراین می‌توان تصــمیم گرفت که ماتریس X را با ماتریس X مؤلفه‌ای، تعویض کرد، چون ماتریس X ناهمبسته است. در مثال ما، دو مورد از سه مؤلفه کافی خواهند بود، چون مقدار ویژگی سوم خیلی کوچک اســت. این دو مؤلفه آنگاه بایســتی تفســیر زیربنایی مناســبی را به دســت دهند، مثل «همدم بودن» و «توافق داشتن». پس از آن می‌توان تحلیل رگرسیون جدیدی را با Y به عنوان متغیر وابسته و $C_۱$ و $C_۲$ به عنوان متغیرهای مستقل اجرا نمود.

$$\mathbf{C} = \mathbf{X}(\mathbf{UD}^{-1/2}) = \begin{bmatrix} -1.729 & 1.458 & -0.548 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.276 & -0.376 & -1.357 \\ -1.442 & 0.627 & 0.509 \\ -0.554 & -1.383 & 1.213 \\ 0.673 & 0.101 & 1.036 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 1.335 & 0.656 & -0.343 \\ -0.673 & -0.101 & -1.036 \\ 0.804 & -1.157 & -1.601 \\ 1.480 & 1.537 & 0.937 \\ -0.169 & -0.906 & 1.191 \end{bmatrix}$$

۹-۱-۹ ماتریس A از بارهای مؤلفه‌ای

بارهای مؤلفه‌ای، ضرایب a_{ij} از ماتریس $\mathbf{A}$ در مدل $\mathbf{X = CA'}$ هستند (توجه داشته باشید که A تغییر شکل یافته است، زیرا ما معمولاً مؤلفه‌ها را در صدر جدول و متغیرها را در جلو آن قرار می‌دهیم). از این‌رو، این بارهای مؤلفه‌ای در واقع ضرایب رگرسیونی در مدلی با یک متغیر به عنوان متغیر وابسته و مؤلفه‌ها به عنوان متغیرهای مستقل هستند. چنین ماتریسی از ضرایب رگرسیون را **«الگوی عاملی»** می‌نامند. به هرحال در تحلیل مؤلفه‌های اصلی (PCA) که متغیرها به شکل استاندارد شده و مؤلفه‌ها متعامد هستند، این وزن‌های بتا معادل ضرایب همبستگی می‌باشند. (در مقایسه با تحلیل مسیر: ضرایب مسیر معادل ضرایب همبستگی هستند، اگر هم‌خطی بودن وجود نداشته باشد).

ماتریس همبستگی‌های بین متغیرها و مؤلفه‌ها یک ساختار عاملی نامیده می‌شود. در تحلیل مؤلفه‌های اصلی (PCA) الگوی عاملی و ساختار عاملی معادل هم هستند. تفاوت آن‌ها تنها مربوط به یک زمینه چرخش قائم است، یعنی به شرط این‌که دیگر عامل‌ها (مؤلفه‌ها) متعامد نباشند. ساختار عاملی حالا محاسبه می‌شود.

برای محاسبه ضریب همبستگی بین x و y، مجموع حاصل‌ضرب‌های نمرات استاندارد Z_X و Z_y بر n-۱ تقسیم می شود. با اعمال ضرایب همبستگی بین متغیرها (ماتریس $\mathbf{X}$) و مؤلفه‌ها (ماتریس $\mathbf{C}$)، ساختار عاملی بدین گونه خواهد بود:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{n-1}\mathbf{X'c}$$

در این فرمول $\mathbf{X}$ ماتریس داده‌های اصلی به شکل استاندارد است. $\mathbf{C}$ ماتریس نمرات استاندارد شده است که در بخش پیشین محاسبه شد و معادل $\mathbf{XUD}^{-\frac{1}{2}}$ می باشد. ماتریس $\mathbf{U}$، مکعب قدیمی را در جهت مکعب جدید به چرخش در می‌آورد و $\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}$ واریانس‌های نمرات مؤلفه‌ها را روی ۱ میزان می‌کند.

بنابراین، $\mathbf{A} = (1 \div n-1)\mathbf{X'(XUD}^{-\frac{1}{2}})$. و از آن جا که $(1 \div n-1)\mathbf{X'X = R}$ است، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{RUD}^{-\frac{1}{2}}\\ &= \mathbf{UDU'UD}^{-1/2} \quad \text{چون} \quad \mathbf{R = UDU'}\\ &= \mathbf{UDID}^{-1/2}, \quad \text{چون}\ (\mathbf{U'U = I})\ \text{متعامد است}\ \mathbf{U}\\ &= \mathbf{UDD}^{-/12}\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\boxed{\mathbf{A = UD}^{1/2}}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-0.701 & -0.106 & 0.705\\ -0.116 & 0.993 & 0.034\\ 0.704 & 0.058 & 0.708\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.945 & 0 & 0\\ 0 & 0.988 & 0\\ 0 & 0 & 0.067\end{bmatrix}^{1/2}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-0.977 & -0.105 & 0.183\\ -0.162 & 0.987 & 0.009\\ 0.981 & 0.058 & 0.183\end{bmatrix}$$

سه ستون این ماتریس برای $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ و سه ردیف آن نشان دهنده $X_۱$، $X_۲$ و $X_۳$ هستند. چنانکه مشاهده می شود $X_۱$ و $X_۳$ دارای بار زیادی با علامت مخالف روی مؤلفه نخست هستند (به ترتیب ۰/۹۷۷- و ۰/۹۸۱). $X_۲$ روی مؤلفه دوّم بار زیادی دارد (۰/۹۸۷). مؤلفه سوم غیر معنادار به نظر می رسد.

این نتیجه با آنچه که درباره داده‌های اصلی متذکر شدیم تطبیق می‌کند. قضایای $X_۲$ (گفت و شنود) و $X_۳$ (ترجیح زوجین به ماندن در منزل) هر دو با «همدم بودن»، مرتبط هستند، چون می‌دانیم که $X_۳$ به صورت منفی مقیاس نا سازگاری زنا شویی را می سنجد (چنانچه جهت سنجش نمرات حد بالا را به حد پایین و برعکس تغییر می‌دادیم، علامت ضریب همبستگی مثبت می‌شد).

سؤال $X_۲$ (توافق مالی) یکی از متغیرهای گروه توافق است. توافق داشتن بر سر همه اقسام سؤالات بدین معنا نیست که رابطه جامع و کامل است و بر عکس. بنابراین متغیر $X_۲$ یک متغیر جداگانه از «توافق» را بیان می‌کند. جدایی این بعد، از این واقعیت هم ناشی می‌شود که مؤلفه $C_۲$ (با بار زیاد $X_۲$) نسبت به مؤلفه نخست $C_۱$ (با بارهای زیاد $X_۲$ و $X_۳$) عمود می‌باشد.

۱۰- ۱- ۹ مقیاس زائد بودن یک مؤلفه

در مثال ما مؤلفه سوم، $C_۳$ زائد است. به لحاظ هندسی، این بدان معناست که ما واقعاً نیاز به یک مکعب برای ارائه درست ۱۲ نقطه مورد نظر در یک فضای جدید نداریم، بلکه یک سطح جدید می‌تواند کافی باشد. جان ون دی گیر[1] (۱۹۷۱) به روشنی این ایده را بیان می‌کند، چنان که آن را با چتری که میله‌های آن خم شده‌اند مقایسه می‌کند، که اگر میله‌ها را در امتداد یک صفحه مسطح بکشیم به خوبی از باران در امان خواهیم بود.

---

1 .John van de Geer

اندازه زائد بودن $C_۳$ را نیز می‌توان محاسبه کرد. زیرا چنان که می‌دانیم، ماتریس همبستگی $\mathbf{R}$ را می‌توان با استفاده از ارزش‌های ویژه ($\mathbf{D}$) و بردارهای ویژه ($\mathbf{U}$) دقیقاً بصورت $\mathbf{UDU'}$ بازسازی کرد. این بازسازی ماتریس همبستگی را مرحله به مرحله هم می‌شود انجام داد، زیرا $\mathbf{UDU'}$ را می‌توان به صورت $\mathbf{u\lambda_1u_1'} + \mathbf{u_2\lambda_2u_2'} + \mathbf{u_3\lambda_3u_3'}$ بخش کرد که در آن $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$, $\lambda_۳$ نشان‌دهنده سه ارزش ویژه، و $\mathbf{u}_۱$، $\mathbf{u}_۲$ و $\mathbf{u}_۳$ علائم سه بردار ویژه هستند. وقتی‌که تنها دو مؤلفه $C_۱$ و $C_۲$ به کار برده می‌شود، می‌بینیم که ماتریس $\mathbf{R}$ به نحو قابل قبولی بازسازی می‌شود:

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{u_1\lambda_1u_1'} + \mathbf{u_2\lambda_2u_2'}$$

$$\mathbf{u_1\lambda_1u_1'} = \begin{bmatrix} -0.701 \\ -0.116 \\ 0.704 \end{bmatrix} (1.945)\ (-0.701\quad -0.116\quad 0.704)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.956 & 0.158 & -0.960 \\ 0.158 & 0.026 & -0.159 \\ -0.960 & -0.159 & 0.964 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u_2\lambda_2u_2'} = \begin{bmatrix} -0.106 \\ 0.993 \\ 0.058 \end{bmatrix} (0.988)\ (-0.106\ 0.993\ 0.058)$$

$$\begin{bmatrix} 0.011 & -0.104 & -0.006 \\ -0.104 & 0.974 & 0.057 \\ -0.006 & 0.057 & 0.003 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{u_1\lambda_1u_1'} + \mathbf{u_2\lambda_2u_2'} = \begin{bmatrix} 0.967 & 0.054 & -0.966 \\ 0.054 & 1/000 & -0.102 \\ -0.966 & -0.102 & 0.967 \end{bmatrix}$$

۱۱- ۱- ۹   ماتریس A بارهای مؤلفه‌ای واریانس تبیین کننده

اگر بخش‌های واریانس تبیین شـده در ماتریس **A** بارهای مؤلفه‌ای را مطالعه کنیم (جدول ۲-۹) این نتیجه‌گیری که دو مؤلفه کافی است را حتی بهتر می‌توان توضیح داد.

جدول ۲-۹ ماتریس A

متغیرها	مؤلفه‌ها		
	$C_۱$	$C_۲$	$C_۳$
$X_۱$	-۰/۹۷۷	-۰/۱۰۵	۰/۱۸۳
$X_۲$	-۰/۱۶۲	۰/۹۸۷	۰/۰۰۹
$x_۳$	۰/۹۸۱	۰/۰۵۸	۰/۱۸۳
$\lambda_۱$	۱/۹۴۵	۰/۹۸۸	۰/۰۶۷
% واریانس تبیین شده	۶۴/۸	۳۲/۹	۲/۲
% تجمعی	۶۴/۸	۹۷/۸	۱۰۰/۰

همان گونه که می‌دانیم این ماتریس شـامل ضـرایب همبسـتگی بین مؤلفه‌ها و متغیرهاسـت. همچنین می‌دانیم که مجذور ضرایب همبستگی را می‌توان به عنوان بخشی از واریانس تبیین‌کننده تفسـیر نمود. بار $X_۱$ روی $C_۱$ معادل ۰/۹۷۷- اسـت. مجذور آن۰/۹۵۵=^{۲}(۰/۹۷۷-) به این معناسـت که ۹۶٪ از واریانس $X_۱$ (گفت و شنود) توسط اولین مؤلفه $C_۱$ (هم‌نشینی) تبیین می‌شود. مؤلفه دوم تنها ^{۲}(۰/۱۰۵-) یعنی ۱٪ و مؤلفه $C_۳$، بخش دیگر^۲(۰/۱۸۳) یعنی ۳٪ را به آن اضـــافه می‌کند. مجموع آن ۱۰۰٪ است، چون در کل ۱۰۰ ٪ توزیع $X_۱$ را می‌توان تبیین نمود و سه مؤلفه با هم این کار را به طورکامل انجام می‌دهند. با توجه به ردیف‌ها، می‌توانیم توضـیح مشـابهی را برای $X_۲$ و $X_۳$ بیان کنیم.

مجموع مجذورات بارهای روی یک *ردیف از ماتریس* را **اشتراک**[1] گویند. اندازه‌ی اشـتراک یک متغیر با همه مؤلفه‌ها در تحلیل مؤلفه‌های اصلی (PCA) معادل ۱ است. در مثال ما اشتراک متغیر $X_۲$ با دو مؤلفه $C_۱$ و $C_۲$ در حال حاضـر بیشـترین میزان اسـت: ۱=^{۲}(۰/۱۶۲-)+^{۲}(۰/۹۸۷-). مفهوم اشـــتراک در شـــیوه‌های تحلیل عاملی از اهمیت خاصـــی برخوردار اســـت که در آن برخلاف تحلیل مؤلفه‌های اصلی، تعداد عامل‌ها از تعداد متغیرها کمتر است.

به سـتون‌های ماتریس **A** نیز می‌توانیم نگاهی بیندازیم. مجموع مجذورات بارهای یک سـتون مثل $C_۱$، همان بخش‌های واریانس هر یک از سه متغیر است که توسط مؤلفه $C_۱$ تبیین می‌شود. این حاصل‌جمع، معادل ارزش ویژه مؤلفه مربوطه است: ۱/۹۴۵ =^{۲}(۰/۹۸۱) + ^{۲}(۰/۱۶۲-) + ^{۲}(۰/۹۷۷-). به همین ترتیب $C_۱$ و $C_۲$ را هم می‌توان توضیح داد.

1. communality

به نظر می‌رسد ارزش‌های ویژه تفسیر جالبی داشته باشند. به طور هندسی، آن‌هانشان می‌دهند که تا چه حد تصاویر ۱۲ نقطه روی یک مؤلفه توزیع شده‌اند، یعنی یک مؤلفه به چه خوبی می‌تواند واریانس مشترک را از روی متغیرهای اوّلیه ترسیم کند.

در تحلیل مؤلفه های اصلی (PCA) مجموع ارزش های ویژه، معادل مجموع واریانس های (استاندارد!) متغیرهاست: ۳=۱+۱+۱=۱/۹۴۵+۰/۹۸۸+۰/۶۷. (بدین‌ترتیب این مجموع ارزش‌های ویژه همچنین معادل تعداد متغیرها و نیز مجموع عناصر روی قطر اصلی **R** می‌باشد: برای توضیح بیشتر به قسمت تحلیل عامل اصلی PFA نگاه کنید).

با استفاده از این خاصیت، هر ارزش ویژه را می‌توان به عنوان بخشی از این حاصل‌جمع بیان کرد. برای ارزش ویژه‌ی نخست این بخش $\lambda_1 / \Sigma\lambda i =$ ۱/۹۴÷۳=۰/۶۴۸ است، و بدین معناست که مؤلفه نخست ۶۴٪ از کل واریانس در مجموع سه متغیر را اقتباس می‌کند. این مقدار مورد دوم ۳۲/۹٪ است. $C_۱$ و $C_۲$ با هم ۹۷/۸٪=۶۴/۸+۳۲/۹ از واریانس متغیرهای اولیه را تبیین می‌کنند، مؤلفه سوّم که تنها ۲/۲٪ اضافه می‌کند زائد است.

۱۲-۱-۹ تعداد مؤلفه‌ها چقدر باشد؟

در این مثال اختصاری، مشخص می شود که چه تعداد مؤلفه بایستی باقی بماند. فضای سه بعدی مورد بحث (سه متغیر مکعب قدیمی) به فضای دو بعدی (دو مؤلفه، صفحه مسطح)کاهش پیدا می‌کند. مثال چتر صاف‌شده‌ی جان وان دی‌گیر را به خاطر بیاورید. این نتیجه‌گیری را می‌توان به نوعی دیگر هم از ماتریس همبستگی به دست آورد. همبستگی زیاد بین $X_۱$ و $X_۳$ (۰/۹۳۲-) همراه با همبستگی‌های پایینی که با $X_۲$ دارند (۰/۰۵۶ و ۰/۱۰۰-) به دو دسته جداگانه از متغیرها اشاره دارد که ابعاد مصاحبت و توافق را نشان می‌دهند. در یک تحلیل از تمام ۲۰ متغیر (گاهی در عمل با صدها متغیر سر وکار داریم)، تعیین تعداد مؤلفه‌ها ممکن است مأیوس کننده باشد. بنابراین علاوه بر باز تولید ماتریس همبستگی و تحلیل ماتریس بارهای مؤلفه‌ای، ملاک‌های متعددی از سوی بسیاری از مؤلفین توسعه یافته است.

ساده‌ترین **ملاک** از سوی کایزر[1] (۱۹۵۹) ارائه شده است. این ملاک می‌گوید: تنها مؤلفه‌هایی را نگه‌دارید که ارزش ویژه آن‌ها از ۱ بیشتر باشد. این ملاک در بسیاری برنامه‌های کامپیوتری به صورت پیش‌گزینه سیستم منظور می‌شود. اگر ما این ملاک رادر مثال خودمان انتخاب کنیم، نتیجه یک راه‌حل تک مؤلفه‌ای خواهد بود، زیرا ارزش ویژه دوّم ۰/۹۸۸ بوده و از ۱ کمتر است. واضح است که این ملاک در این جا مناسب نیست، زیرا مؤلفه دوّم را واقعا باید شامل شود. این را ما از ماتریس **A** بارهای مؤلفه‌ای (بارهای زیاد $X_۲$ روی $C_۲$) و نیز از باز تولید ماتریس **R** دریافته‌ایم (چنان که تنها

[1]. Kaiser

$u_1\lambda_1u_1'$ به کار رود باز تولید ر ضایت‌بخش نی ست). البته باید دان ست که ملاک کایزر (λ‹۱) ممکن ا ست نتیجه معکوس به بار آورد: ممکن ا ست مؤلفه‌های بی شتری از آنچه طبق این ملاک ضروری به نظر می‌رسد نگه داشته شوند.

ملاک ساده دیگری از ر سم نمودار ارزش‌های ویژه به د ست می‌آید. این آزمون که تو سط کتل (۱۹۶۶) طرح شــده، آزمون **سنگ‌ریزه**[1] نام دارد. فرض کنید ما ۱۴ مؤلفه داریم که ارزش‌های ویژه آن ها عبارتند از ۲/۷، ۲/۶، ۲/۵، ۲/۲، ۱/۷، ۰/۹، ۰/۴ و الی آخر، که تدریجاً به ۰/۱ می‌رســـد. یک نمودار نقطه‌ای از این ارزش‌های ویژه زانویی شکل خواهد بود، چنان‌که در شکل ۳-۹ نشان داده شده است.

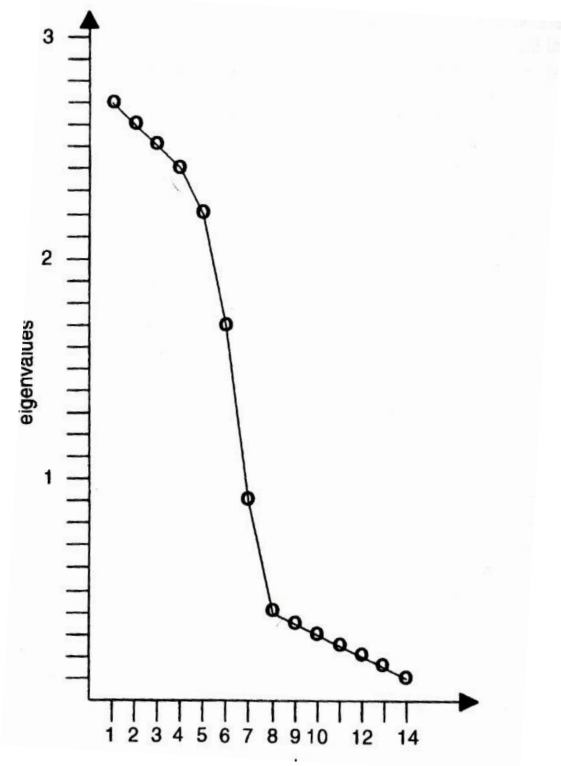
حالت زانویی در شــکل، آن را به خوبی نشــان می‌دهد، یعنی هشــت مؤلفه نگه داشــته شــده‌اند. ازآن جا که این ملاک بیشـــتر جنبه ذهنی دارد، مؤلفین دیگری تلاش کرده‌اند تا بدان یک مبنای استنتاجی بدهند.

به شیوه‌ی تصویری یک مثال پیرامون رویکرد ا ستنتاجی که تو سط بارتلت (۱۹۵۰) طرح شده ا ست ارائه می‌کنیم. وی این سؤال را مطرح ساخت که آیا با انجام تحلیل مؤلفه‌های ا صلی (PCA) به عنوان شـــیوه کاهش ابعاد، اصـــلاً هیچ اتفاق خاصـــی رخ می‌دهد یا نه. طبق نظر بارتلت کمیت $-[n-۱-(۱\div۶)(۲.۵+۵)]Ln|\mathbf{R}|$ به صورت مجذور خی با $۰.۵(P^{۲}-P)$ درجه آزادی توزیع شــده اســت، که n معرف تعداد واحدها و p نشــانه تعداد متغیرها و $Ln|\mathbf{R}|$ لگاریتم طبیعی مقدار تعیین کننده ماتریس همبســتگی اســت. این مقدار تعیین کننده را به صــورت حاصــل‌ضــرب تمام ارزش‌های ویژه نیز می‌توان محاسبه کرد.

فرض صفر در این آزمون $X^۲$ این ا ست که ماتریس همبستگی جمعیت واحدها، ماتریس واحد اسـت، یعنی متغیرها ناهمبسـته هسـتند. چنان چه این فرض صـفر رد نشـود، نیازی به انجام تحلیل عـامـل نـخـواهـد بـود، زیـرا فضـــای اولـیـه را نـمـی‌تـوان تـقـلـیـل داد. در مـثـال مـا $X^{۲}=[۱۲-۱-(۱\div۶)(۶+۵)]\ln[(۱.۹۴۵)(۰.۹۸۸)(۰.۰۶۷)]=۱۸.۷۹$ با ۳=(۳-۹)۰/۵ در جه آزادی است.

فرض صـفر حتی برای خطای نوع اول α=۰/۰۰۱ رد می‌شـود، به این معنی که ایجاد کاهش در فضای سه بعدی درست است.

---
[1]- Scree Test



مؤلفه‌ها

شکل ۳-۹ آزمون اسکری کَتل

۱۳-۱- ۹ چرخش مؤلفه‌ای

پس از یافتن یک راه‌حل تحلیل مؤلفه‌های اصـلی (PCA) می‌توانیم فضـای مؤلفه‌ای را در جهت یک فضـای جدید به چرخش درآوریم که احتمالاً به سـاختار سـاده‌تر و تفسـیر بهتری از لحاظ محتوایی منتهی می‌شود.

اجازه دهید نگاه دوباره‌ای به ماتریس $\mathbf{A}$ بارهای مؤلفه‌ای بیفکنیم. در مثال ما متغیرهای X_1 و X_3 بر روی مؤلفه C_1 دارای بار زیادی هسـتند و متغیر X_2 روی مؤلفه C_2 دارای بار زیادی اسـت. چنین الگویی را که در آن فقط چند بار زیاد برای هر مؤلفه (ستونی) ظاهر می‌شود، بارهای زیاد روی مؤلفه اشـاره به متغیرهای متفاوتی دارد و تنها یک بار زیاد برای هر متغیر (ردیفی) پدیدار می‌شـود پیرو نظر ترستون (۱۹۴۷)، یک «ساختار ساده[1]» می‌نامند.

1 .simple structure 2. Thurstone 3. orthogonal Rotation

البته در روش تحلیل مؤلفه‌های اصلی(PCA) گرایشی هست که مؤلفه نخست یک عامل عمومی با بارهای بالا روی همه متغیرها باشـــد و مؤلفه‌های بعدی عامل‌های دو قطبی هســـتند که بعضـــی متغیرها روی آن‌ها دارای بار مثبت و بعضی دارای بار منفی می‌باشند. این گرایش در منطق خود این روش اســـت، زیرا طبق روش محور اصـــلی، در تشـــکیل مکعب جدید، محور نخســـت بایســـتی با کل مجموعه متغیرها به بهترین صورت ممکن تطبیق پیدا کند. بنابراین قابل فهم است که بعضی متغیرها (که به طور هندســـی به عنوان بردارها شـــناخته می‌شـــوند) در یک طرف مؤلفه نخســـت و ســـایرین در جانب دیگر آن قرار می‌گیرند، این متغیرها به ترتیب دارای بارهای مثبت و منفی خواهند بود.

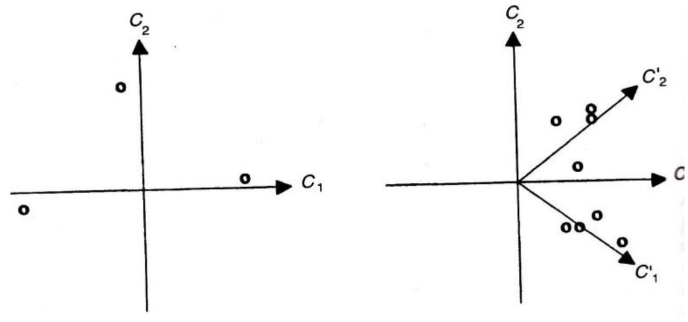
در نتیجه شیوه تحلیل اصلی(PCA) همیشه روشن‌ترین راه حل را به دست نمی‌دهد، از این رو، اگر بتوان متغیرها را به تعدادی خوشـــه‌های مجزا که ارتباط مســـتحکمی در درون آن‌ها وجود دارد تقسیم کرد، آنگاه مؤلفه نخست در حد میانی این خوشه‌ها واقع می‌شود، نه این که با یکی از خوشه‌ها تطبیق پیدا کند. در چنین حالتی **چرخش** مؤلفه‌ها روشـــی اســـت برای یافتن یک راه‌حل که از آن طریق C_1 با خوشه نخست انطباق پیدا می‌کند و C_2 با خوشه دوم و الی آخر.

در مثال ما یک چرخش باعث پیشـــرفت زیادی نمی‌شـــود، زیرا راه‌حل تحلیل مؤلفه‌های اصـــلی (PCA) از قبل به گفته تور ستن[1] یک « ساختار ساده» را به نمایش گذا شته ا ست. به این خاطر ما شکل دیگری (شکل ۴-۹) را از مثال فرضی خود ترسیم می‌کنیم که در آن چهار متغیر، یک خوشه اولیه و چهار متغیر دیگر، خوشه دوّمی را تشکیل می‌دهند، دو مؤلفه C_1 و C_2 به C'_1 و C'_2 چرخش می‌یابند (دستگاه مختصات بارهای مؤلفه‌ای هستند).

در شکل ۴-۹ از روی مثال سازگاری زنا شویی در می‌یابیم که X_1 و X_3 با C_1 به خوبی انطباق یافته‌اند و X_2 با C_2 تطابق پیدا کرده است. چرخش دیگری لازم نیست. از سوی دیگر در مثال فرضی تنها پس از چرخش است که یک خوشه اولیه از متغیرها با C'_1 و خوشه دوم با C'_2 انطباق می‌یابد، در حالی‌که برای مؤلفه‌های C_1 و C_2 چنین رابطه‌ای وجود ندارد.

۹-۱-۱۴ چرخش متعامد[2]

در مثال فرضی شکل ۴-۹ دو مؤلفه به روشی چرخش یافته‌اند که عمود بر یکدیگر باقی بمانند. این را چرخش متعامد گویند.



مثال سازگاری زناشویی **مثال فرضی**

شکل ۴- ۹ چرخش یک راه حل دو مؤلفه‌ای در PCA

نمونه‌هایی از چرخش متعامد عبارتند از: واریمکس[۱]، کوارتیمکس[۲] و ایکویمکس.[۳] از آن جا که این شیوه‌های چرخش مستلزم یک سری دوباره کاری‌ها است، دراین جا امکان محاسبه آن‌ها وجود ندارد. هدف هر یک از این چرخش‌ها، کاهش ماتریس **A** بارهای عاملی به یک «ساختار ساده» است. روش واریمکس ستون‌های **A** را ساده می‌کند (واریانس مجذور بارهای هر ستون حداکثر می شود)، هدف کوارتیمکس ساده کردن ردیف‌ها است. ایکویمکس یک راه‌حل حد واسط این‌هاست که در آن محاسبات، هم شامل ستون‌ها و هم شامل ردیف‌ها می‌شود.

در نظر داشته باشید که بخش تبیین شده واریانس (ارزش‌های ویژه) پس از چرخش، در مؤلفه‌های به گونه متفاوتی توزیع می‌شود. قبل از چرخش، مؤلفه نخست به لحاظ تعریف بیشترین ارزش ویژه را دارد. پس از چرخش ممکن است مؤلفه دیگری بیشترین واریانس را تبیین کند. در هر صورت حاصل‌جمع ارزش‌های ویژه یکسان خواهد بود، زیرا همان مقدار از واریانس تبیین می‌شود.

۱۵-۱-۹ چرخش مایل[۲]

پس از انجام چرخش متعامد، باز هم ممکن است کسی بخواهد بررسی کند که آیا یک چرخش مایل به راه حل بهتری منجر نمی‌شود. چون ممکن است خوشه‌های متغیرها در جهات عمود بر هم قرار نگرفته باشند، در چرخش مایل، دیگر نیازی به این حالت متعامد بودن عامل نیست (مایل= کج، اریب).

1. VARIMAX 2. QUARIMAX 3. EQUIMAX
1. Oblique Rotation

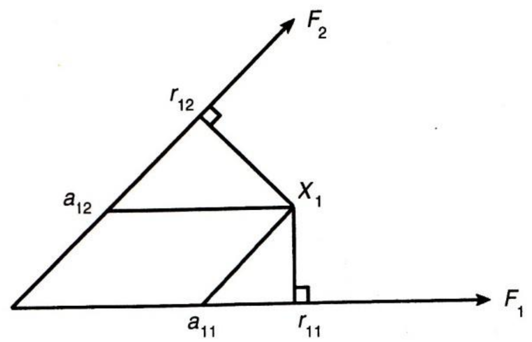
اگر محقق بخواهد چرخش مایل را انجام دهد، به ناچار با شـــماری از مســـائل اضـــافی روبه رو می شود. اوّل این که عامل‌ها، دیگر متعامد نیستند، بنابراین با هم همبسته هستند و در نتیجه یک ماتریس اضافی همبستگی‌های **عاملی** وجود دارد.

ثانیاً، در ماتریس بارهای عاملی $\mathbf{A}$، که شـــامل همبســـتگی‌های بین متغیرها و عامل‌ها اســـت ضرایب رگرسیون معادل ضرایب همبستگی در حالت متعامد بودند. **الگوی عاملی** و **ساختار عاملی** برابر بودند. اما این در مورد عامل‌های مایل صـــدق نمی‌کند. در شـــکل ۵-۹ یک متغیر X_1 در حالت راه‌حل دو عاملی مایل واقع شـــده اســـت. بارهای X_1 در «الگوی عاملی»، a_{11} و a_{12} هســـتند. این‌ها ضرایب رگرسیون یک تحلیل رگرسیون X_1 به عنوان تابعی از عامل‌های «همبسته» می‌باشند. بارهای X_1 در « ساختار عاملی» r_{11} و r_{12} هستند. اینها همبستگی‌های بین متغیر X_1 و هر یک از عامل‌ها (مؤلفه‌ها) هســـتند. بخش اخیر شـامل همبســـتگی عاملی اســـت و در نتیجه نمی‌تواند بی‌ابهام تعبیر و تفسیر شود.

این‌ها مشکلات عمده چرخش مایل هستند. مشکل سوم این است که **اشتراک** یک متغیر را دیگر نمی‌توان به صـــورت مجموع مجذورات بارهای عاملی یک ردیف از ماتریس $\mathbf{A}$ محاســـبه کرد. مشـــکل مشـــابه چهارمی هم وجود دارد و آن این که بخش **واریانس تبیین شـــده** یک عامل را هم نمی‌توان به عنوان مجموع مجذورات بارهای یک ستون $\mathbf{A}$ محاسبه کرد.

می‌دانیم که هر امتیازی یک پیامدی هم دارد. این امتیاز چرخش مایل، یعنی تفســـیر روشـــن‌تر در زمانی‌که خوشـــه‌های متغیرهای وابســـته متعامد نیســـتند، به نظر می‌آید با مشـــکلات زیادی همراه باشد.

بنابراین توصیه می‌شود که پیش از هر چرخش مایل یک چرخش متعامد اجرا شود.



شکل ۵- ۹ چرخش مایل

۱۶-۱-۹ نتایج تحلیل مؤلفه‌های اصلی (PCA) محاسبه شده توسط SPSS ویندوز

اکنون نتایج حاصـــل از SPSS تحت ویندوز مربوط به مثال اختصـــاری خودمان پیرامون ســـازگاری زناشـــویی را ارائه می‌کنیم. خواننده می‌تواند به آســانی این نتایج را با نتایج محاســبه شــده با دســت وارسی کند.

انتخاب یا ساخت فایل داده‌ها

نحوه گشـــودن یک فایل داده‌های موجود یا در صـــورت عدم وجود فایل، نحوه وارد کردن داده‌ها و برچسب دادن به متغیرها و ذخیره‌سازی فایل در فصل ۴ نشان داده شده است.

اجرای تحلیل مؤلفه‌های اصلی

قبل از وارد شدن به محیط SPSS ویندوز، ابتدا روی واژه Analyze کلیک می‌کنیم. آنگاه روی عبارت Data Reduction و ســـپس روی Factor کلیک می‌کنیم؛ با این کار دریچه محاوره‌ای تحلیل عامل گشـــوده می‌شـــود. روی متغیرهای $X_۱$، $X_۲$ و $X_۳$ کلیک کنید بعد روی نشـــانه ⊳ تا متغیرها انتخاب شوند.

روی واژه Descriptives ، ســـپس Every thing و آنگاه Continue کلیک کیند تا به دریچه محاوره‌ای تحلیل عامل بر گردید.

با کلیک کردن روی واژه Extention یک دریچه محاوره یا مربوط به تحلیل عامل (الحاقی) باز می شـــود. یک دکمه مخابره‌ای در Egenvalues over ۱ مشـــاهده خواهید کرد. یعنی پیش‌گزینه ســـیســـتم ملاک کایزر (ارزش ویژه حداقل ۱) می‌باشـــد، از این رو یک راه‌حل یک مؤلفه‌ای خواهیم دا شت. روی عبارت Number of Factor کلیک کنید. عدد ۳ را تایپ کنید تا راه‌حلی با هر سه مؤلفه به دست آوریم.

روی عبارت Scree Plot کلیک کنید. توجه داشــته باشــید که تا این جا روش تحلیل مؤلفه‌های اصـــلی (PCA) و یک راه‌حل عاملی چرخش نیافته را انتخاب کرده‌ایم که برای منظور ما کفایت می‌کند. روی واژه continue کلیک کنید.

روی واژه scores کلیک کنید و بدین ترتیب یک دریچه محاوره‌ای به نام factor Analysis factor scores گشـــوده می شـــود. روی ع بارت save as Variables کل یک کن ید. ای نک روی Factor scare coefficient Matrix و سپس روی continue کلیک کنید.

در این جا به دریچه محاوره‌ای factor Analyisis باز می‌گردید. روی واژه ok کلیک کنید. اکنون SPSS شـــیوه آماری مورد نظر را اجرا کرده و نتایج در دریچه مربوطه ظاهر می گردد. ممکن اســـت بخواهید ماتریس داده ها را نیز همراه با نمرات مؤلفه‌ای در خروجی داشـــته باشـــید. روی عبارت

Statisties و سپس روی Summaries بعد روی list cases کلیک کنید. متغیرهای ۱-۱ fac، ۱-fac۲ و ۱-۳ fac را از فهرست منابع انتخاب کرده و روی واژه ok کلیک کنید.

ذخیره کردن نتایج را فراموش نکنید: روی واژه File کلیک کنید، روی عبارت save as کلیک کنید، نام فایل را تایپ کرده (مثلاً marriage.lst) و روی واژه ok کلیک کنید.

همان‌گونه که از قبل می‌دانید نتایج کامپیوتری تحلیل مؤلفه‌ای ا صلی را همچنین از طریق باز نمودن دریچه دســتورات و تایپ دســتورات SPSS نیز می‌توان به دســت آورد. برای این کار روی واژه File و سپس New و بعد SPSS Syntax کلیک کرده و دستورات را تایپ کنید، مکان نما را در خط اول قرار دهید و روی علامت ⊳ در نوار تصویری[1] (در مورد ورژن ۵.۰ روی واژه Run) کلیک کنید.

دستورات زیر را به کار خواهید برد:

```
1  List
2  FACTOR/VARIABLES  X1  X2  X3
3      /PRINT ALL
4      /PLOT EIGEN
5      /CRITERIA FACTORS (3)
6      /EXTRACTION PC
7      /ROTATION NOROTATE
8      /SAVE REGRESSION (ALL C).
9  LIST/VARIABLES C1 C2 C3
```

در دستور ۱ (list) ماتریس داده‌ها درخواست شده است.

دستورات ۲ تا ۸ تحلیل مؤلفه‌های اصلی را درخواست می‌کنند و دستور ۲ متغیرهای ارائه شده را نشــان می‌دهد. چنان چه زیرمجموعه‌ای از این فرمت متغیرها مورد تحلیل قرار گیرد، یک دســتور «تحلیل» ا ضافی لازم ا ست. وقتی که د ستور«تحلیل» وجود ندا شته با شد، همه متغیرها در تحلیل شرکت خواهند دا شت چنان که در این جا چنین بوده ا ست. در د ستور ۳ یعنی "Print ALL" همه آماره‌ها درخواســـت شـــده‌اند: اعداد، میانگین ها، انحراف اســـتاندارد، اشـــتراک ها، ارزش‌های ویژه، بخش‌های واریانس تبیین شـده، همبســتگی‌ها و سـطح معنی داری آن‌ها، ماتریس های همبســتگی، همبستگی‌های باز تولید شده تبیین‌کننده‌ها و معکوس ماتریس همبستگی، کوواریانس خلاف انگاره[1] که در این کتاب مورد بحث قرار نگرفته اســت، ضــرایب نمرات عالم و غیره. کوواریانس خلاف انگاره شامل (شکل منفی) ضرایب تفکیکی هر جفت متغیر با کنترل سایر متغیرهاست. چنانچه این ضرایب تفکیکی بالا با شند. در آن صورت تقلیل ابعاد می‌سر نخواهد بود. بنابراین ماتریس همبـستگی خلاف- انگاره ن شان می‌دهد که آیا اجرای یک تحلیل عامل مثمر ثمر خواهد بود. مقیاس کایزر- مِیر- الکین و آزمون براتلت همین کار را می‌کنند. آزمون براتلت که در این کتاب مورد بحث قرار گرفت به آزمایش این مســـأله می‌پردازد که آیا ماتریس همبســـتگی نمونه، برگرفته شـــده از یک ماتریس

---

1. Icon bar
1. Anti -Image

همبستگی جمعیتی که ماتریس واحد است می باشد. مقیاس کایزر- مِیر- اُلکین همین موضوع را از زاویه متفاوتی بررسی می‌کند.

در دستور ۴ (Plot eigen) آزمون سنگریزه کتل درخواست شده است. مؤلفه‌ها روی X و ارزش‌های ویژه روی محور Y از کم به زیاد مرتب شده‌اند. شکست بین شیب تند عامل های بزرگ و قطع دنباله تدریجی عامل‌های باقی‌مانده (الگوی بازویی) نشان دهنده امکان تعامل ابعاد است.

دستور ملاک ۵ برای به دست آوردن راه‌حلی است که هر سه مؤلفه را در بر می‌گیرد. زیرا ملاک پیش‌گزینه سیستم، ملاک کایزر است (کمترین ارزش ویژه ۱) که به راه حل تک مؤلفه‌ای منجر می‌شود.

در دستور ۶، جمله "extraction Pc" یک تحلیل مؤلفه‌های اصلی را با علامت اختصاری PC درخواست می‌کند.

دستور ۷ برای این است که چرخش عاملی انجام نشود، چون پیش‌گزینه سیستم این است که یک چرخش واریمکس صورت گیرد و در این صورت نمرات مؤلفه‌ای که درخواست شده نمرات بعد از چرخش خواهند بود.

دستورات ۸ و ۹ مربوط به هم هستند. در دستور ۸ خواسته‌ایم که نمرات مؤلفه‌ای در فایل جاری ذخیره شوند به شکلی که هر سه مؤلفه با rootname= C نام ریشه‌ای باشند (یعنی C_1، C_2 و C_3). در دستور ۹ (List) ماتریس داده‌هایی با این سه مؤلفه درخواست شده است. توجه داشته باشید که این ماتریس داده‌ها شامل نمرات استاندارد مؤلفه‌ای است که از ضریب ماتریس داده‌های اولیه $\mathbf{X}$ در ماتریس (3×3), $\mathbf{UD}^{-\frac{1}{2}}$ مربوط به ضرایب نمرات عاملی به دست می آید. ماتریس اخیر تحت عنوان « Factor Scare Coefficient Matrix » چاپ شده است.

نتایج به شرح زیر است:

```
X1 X2 X3

 8  9  1
 5  5  5
 4  4  5
 8  7  2
 7  1  4
 4  5  7
 5  5  5
 2  6  8
 6  5  3
 3  2  6
 2  8  9
 6  3  5

Number of cases read =      12    Number of cases listed =      12


Analysis Number  1  Listwise deletion of cases with missing values

                Mean     Std Dev   Label

X1           5.00000     2.08893   give and take
X2           5.00000     2.33550   agreement on finances
X3           5.00000     2.33550   prefer both stay at home

Number of Cases  =      12


Correlation Matrix:

                X1         X2         X3

X1         1.00000
X2          .05590    1.00000
X3         -.93169    -.10000    1.00000


Determinant of Correlation Matrix =      .1292361
```

```
Inverse of Correlation Matrix:

                 X1           X2           X3

X1           7.66040
X2            .28837      1.02096
X3           7.16599       .37077      7.71359

Kaiser-Meyer-Olkin Measure of Sampling Adequacy =  .49551

Bartlett Test of Sphericity =  18.75605, Significance =     .00031

There are    2 (33.3%) off-diagonal elements of AIC Matrix > 0.09

Anti-Image Covariance Matrix:

                 X1           X2           X3

X1            .13054
X2            .03687       .97947
X3            .12127       .04708       .12964

Anti-Image Correlation Matrix:

              X1         X2         X3

X1         .49757
X2         .10311     .31846
X3         .93223     .13212     .49761

Measures of sampling adequacy (MSA) are printed on the diagonal.

Correlation 1-tailed Significance Matrix:
' . ' is printed for diagonal elements.

                 X1           X2           X3

X1              .
X2            .43150          .
X3            .00001       .37858          .

Extraction  1  for Analysis  1, Principal-Components Analysis (PC)

Initial Statistics:

Variable      Communality  *  Factor   Eigenvalue   Pct of Var   Cum Pct
                           *
X1                1.00000  *     1        1.94457        64.8       64.8
X2                1.00000  *     2         .98818        32.9       97.8
X3                1.00000  *     3         .06726         2.2      100.0
```

```
E    1.945 +    *
I          |
G          |
E          |
N          |
V          |
A     .988 +        *
L          |
U          |
E          |
S          |
      .000 +---+---+---*
               1   2   3
```

PC Extracted 3 factors.

Factor Matrix:

	FACTOR 1	FACTOR 2	FACTOR 3
X1	.97749	-.10518	.18291
X2	.16174	.98680	.00873
X3	-.98129	.05787	.18364

Final Statistics:

Variable	Communality	*	Factor	Eigenvalue	Pct of Var	Cum Pct
		*				
X1	1.00000	*	1	1.94457	64.8	64.8
X2	1.00000	*	2	.98818	32.9	97.8
X3	1.00000	*	3	.06726	2.2	100.0

Reproduced Correlation Matrix:

	X1	X2	X3
X1	.99999*	.00000	.00000
X2	.05590	.99999*	.00000
X3	-.93169	-.10000	.99999*

The lower left triangle contains the reproduced correlation matrix; The diagonal, communalities; and the upper right triangle, residuals between the observed correlations and the reproduced correlations.

There are 0 (.0%) residuals (above diagonal) that are > 0.05

Skipping Rotation 1, Extraction 1, Analysis 1

```
Factor Score Coefficient Matrix:

              FACTOR  1     FACTOR  2     FACTOR  3

X1              .50268       -.10644       2.71963
X2              .08317        .99860        .12974
X3             -.50463        .05857       2.73048

Covariance Matrix for Estimated Regression Factor Scores:

              FACTOR  1    FACTOR  2    FACTOR  3

FACTOR  1      1.00000
FACTOR  2       .00000      1.00000
FACTOR  3       .00000       .00000      1.00000



  3 PC  EXACT  FACTOR SCORES WILL BE SAVED WITH ROOTNAME: C


FOLLOWING FACTOR SCORES WILL BE ADDED TO THE ACTIVE FILE:

  NAME        LABEL

C1            REGR FACTOR SCORE   1 FOR ANALYSIS    1
C2            REGR FACTOR SCORE   2 FOR ANALYSIS    1
C3            REGR FACTOR SCORE   3 FOR ANALYSIS    1


        C1          C2          C3

   1.72864     1.45714     -.54851
    .00000      .00000      .00000
   -.27625     -.37662    -1.35748
   1.44135      .62706      .50951
    .55489    -1.83729     1.21252
   -.67278      .10111     1.03632
    .00000      .00000      .00000
  -1.33451      .65566     -.34286
    .67278     -.10111    -1.03632
   -.80418    -1.15574    -1.60138
  -1.47935     1.53589      .93737
    .16941     -.90610     1.19082

Number of cases read =       12    Number of cases listed =       12
```

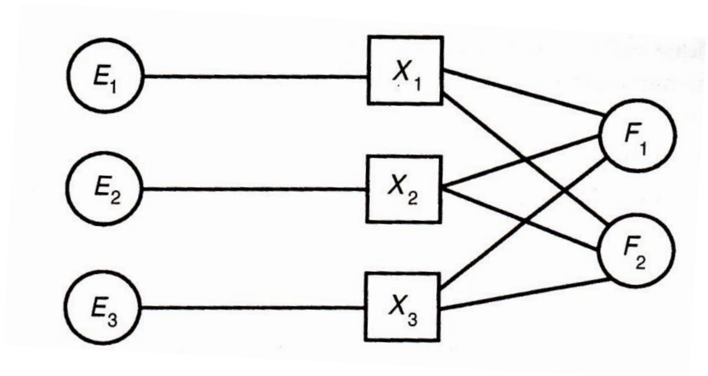
۹-۲ تحلیل عامل اصلی

۹ -۲- ۱ مسأله تحقیق و نمودار مربوطه

اجازه دهید به همان مثال قبلی پیرامون تحلیل مؤلفه‌های اصـلی (PCA) برگردیم. سـه جمله در باره سـازگاری زناشـویی به ۱۲ نفر ارائه شـد (X_1: گفت و شـنود، X_2 : توافق مالی، X_3: هر دو ترجیح می‌دهند در منزل بمانند). در PCA به دنبال تعدادی مؤلفه به اندازه متغیرهای اصلی می‌گردیم (مثلاً سـه مؤلفه C_1، C_2 و C_3)، به طریقی که مؤلفه‌ها متعامد باشـند و حداکثر واریانس به طور متوالی از متغیرها به دسـت آید. هر مؤلفه فرض شـده بود که زیرگروه‌هایی از متغیرهای خیلی همبسـته با بارهای زیاد روی آن مؤلفه را نشان می‌دهد. اما در حالتی که مؤلفه‌ها را به تعداد متغیرها باشند (حتی پس از چرخش) وضـعیتی پیش آمد که تعداد کمی از مؤلفه ها، انبوهی از متغیر ها را بازنمایی می‌کردند. نتیجه این بود که برای بسـیاری از مؤلفه های باقی مانده چیزی بیش از زیرگروه های کوچکی از متغیرها یا حتی فقط یک متغیر تک برجای نماند. چنین مؤلفه‌ای، که روی آن تنها یک متغیر یا تعداد کمی متغیر بار زیادی دارند، نه بخش‌های «اشـتراک» ، بلکه بخش‌های «منحصـر به فرد» مواد تحقیق را نشان می‌دهد. و از آن جا که هدف عمده تحلیل عوامل آشکار ساختن بخش‌های مشترک است، ما در مرحله مقدماتی به جستجوی راه‌حلی می‌پرداختیم که مؤلفه‌ها کمتر از متغیرها باشند، تحت این عنوان که «مؤلفه‌ها چه تعداد هستند؟». البته این یک راه‌کار موردی بود. در تحلیل عامل اصلی این کار معمول نیست، زیرا تقلیل بُعد در این شیوه از ابتدا لحاظ شده است.

در تحلیل عامل اصلی(PFA)، دیگر صحبت از «مؤلفه‌ها» نیست، به جای آن از «عامل‌ها» نام می‌بریم. در PFA نیز می‌خواهیم که عامل‌ها متعامد باشـند از پی یکدیگر، حداکثر واریانس را از متغیرها حاصـل کنند. اما حالا می‌خواهیم «عامل‌ها» واقعاً «عامل‌هایی» باشـند که بخش‌های «مشترک» متغیرهای اولیه را بازنمایی کنند. به این دلیل گاهی PFA را «تحلیل عامل‌های مشترک» نیز می‌نامند. عنصر جدید در PFA این است که نه تنها عامل‌های مشترک بلکه «عامل‌های انحصاری» (Ei) نیز که بخش منحصر به فرد هر متغیر را ترسیم می‌کنند، در مدل گنجانده شده‌اند. عموماً تعداد عامل‌های مشترک (Fi) کمتر از تعداد متغیرهای اولیه است (البته به جز در مواردی‌که ساختار داده‌ها وجه اشتراک را نمایان نمی‌سازد).

در مثال اختصاری ما یک راه‌حل دو عاملی مشهود است. بنابراین ما دو عامل مشترک F_1 و F_2 در نمودار ترسیم می‌کنیم. به منظور تأکید بر این که بخش‌های منفرد (علاوه بر بخش‌های مشترک) را نیز در بر می‌گیرد، عامل‌های منحصـر به فرد را هم برای هر متغیر یک بار ترسـیم کرده‌ایم (یعنی E_1، E_2 و E_3). انتخاب حرف E به این خاطر اسـت که این عامل‌های منفرد در حقیقت عبارات خطا هستند (E مخفف error). زیرا در تحلیل عامل اصلی، متغیرهای اولیه X_i توسط عامل‌های مشترک (F_i) تبیین می شود و بخش تبیین نشده (خطا)ی این متغیرهای X، به عنوان بخش منحصر به فرد (E) در نظر گرفته می‌شود. نمودار آن در شکل ۶-۹ ارائه شده است.



شکل ۶-۹ نمودار تحلیل عامل اصلی(PFA)

۹-۲-۲ ماتریس داده‌ها

مجموعه اختصاری (فرضی) داده‌ها همانند PCA است:

۹-۲-۳ مدل تحلیل عامل اصلی

مدل PCA عبارت بود از $X = CA'$. مؤلفه‌ها (C_i) حالا عامل‌ها (F_i) هســـتند. بنابراین با به کار بردن F به جای C مدل PCA چنین است: $X = FA'$. این یک دستگاه سه معادله‌ای است که در آن هر متغیر به عنوان ترکیب خطی از عامل‌ها (سه عامل) تعریف می‌شود:

$$X_1 = a_{11}\ f_1 + a_{12} f_2 + a_{13} f_3$$
$$X_2 = a_{21} f_1 + a_{22} f_2 + a_{23} f_3$$
$$X_3 = a_{31} f_1 + a_{32} f_2 + a_{33} f_3$$

برای تعیین بارهای عاملی α_{ij} ابتدا یک SVD روی **R** انجام شد، طوری که $R' = UDU'$ و ماتریس **A** بارهای عاملی به صورت $\mathbf{A} = \mathbf{UD}^{\frac{1}{2}}$ محاسبه شوند. در تحلیل عامل اصلی، شیوه محاسباتی مشابهی به کار برده خواهد شد، امّا مدل آن فرق می‌کند.

مدل PFA نه تنها شـــامل عامل‌های مشـــترک F_i بلکه دربردارنده‌ی عامل‌های مجزای E_i نیز می‌باشد:

$$\boxed{\mathbf{X} = \mathbf{FA'} + \mathbf{E}}$$

$\boldsymbol{F}$ را برای ماتریس نمرات عامل‌های مشـــترک و $\boldsymbol{E}$ را به عنوان ماتریس نمرات عامل‌های منحصـــر به فرد در نظر گرفته‌ایم. قبلاً یادآور شدیم که این مدل را گاهی «مدل عامل مشترک» می‌نامیم تا نشان

دهیم که عامل‌های مشترک واقعاً مشترک هستند، یعنی تحت تأثیر خصایص اختصاری هیچ‌یک از متغیرها نیستند. یک عامل انحصاری E_i می‌تواند هنوز هم به خصایص جداگانه متغیرهای وابسته (عامل ویژه) جنبه‌های تصادفی آن متغیر (عبارت خطا) تقسیم شود.

در مرحله اول ما تمام عامل‌ها را در مدل دخالت می‌دهیم، یعنی به تعداد متغیرها عامل مشترک داریم (در این مثال سه عامل)، امّا در عمل تلاش می‌کنیم تا یک مدل اقتصادی پیدا کنیم که در آن تعداد کمی از عامل‌ها با یکدیگر بخش قابل ملاحظه‌ای از واریانس متغیرها را توضیح دهند. با همه عامل‌های مشترک، مدل مورد نظر توسط دستگاه جبری زیر بازنمایی می‌شود:

$$X_1 = a_{11} f_1 + a_{12} f_2 + a_{13} f_3 + E_1$$
$$X_2 = a_{21} f_1 + a_{22} f_2 + a_{23} f_3 + E_2$$
$$X_3 = a_{31} f_1 + a_{32} F_2 + a_{33} f_3 + E_3$$

این مدل چند پیش فرض را ایجاب می‌کند. نخست این که عامل‌های انحصاری E_i با یکدیگر ناهمبسته‌اند. به زبان ماتریسی بدین معناست که $\mathbf{E'E/(n-1)}$ قطری است. ثانیاً عامل‌های انحصاری و مشترک ناهمبسته‌اند، به عبارت دیگر ماتریس $\mathbf{E'F}$ معادل ماتریس صفر یعنی $\boldsymbol{\varphi}$ است.

۴-۲-۹ ماتریس همبستگی تقلیل یافته

اگر مدل PFA و دو پیش فرض یاد شده را مبنا قرار دهیم، ماتریس همبستگی $\mathbf{R}$ را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{X'X}}{\mathbf{n}-1} = \frac{\mathbf{(FA'+E)'(FA'+E)}}{\mathbf{n}-1}, \mathbf{for} \quad \mathbf{X} = \mathbf{FA'+E}$$

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{(AF'+E')(FA'+E)}}{\mathbf{n}-1}$$

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{AF'FA'+AF'E+E'FA'+E'E}}{\mathbf{n}-1}$$

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{AF'FA'}+\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\varphi}+\mathbf{E'E}}{\mathbf{n}-1},$$ چون F_i و E_i ناهمبسته‌اند

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\frac{\mathbf{F'F}}{\mathbf{n}-1}\mathbf{A'} + \frac{\mathbf{E'F}}{\mathbf{n}-1}$$

جایی‌که $\mathbf{E'E/(n-1)} = \mathbf{I}$، مشروط به این که عامل‌ها ناهمبسته باشند. از این رو:

$$\mathbf{R} = \mathbf{AA'} + \frac{\mathbf{E'E}}{\mathbf{n}-1}$$

جایی‌که $\mathrm{E'E/(n-۱)}$، ماتریس قطری واریانس‌های $\delta^{۲}_{Ei}$ عامل‌های انحصاری است. بنابراین چنانچه این واریانس‌ها از عناصر قطری (۱) ماتریس همبستگی $\boldsymbol{R}$ کم شوند، نتیجه $\mathbf{AA'}$ است:

$$\mathbf{AA}' = \mathbf{R} - \mathbf{E}'\mathbf{E}/(n-1)$$

$$\mathbf{AA}' = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & 1 & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_{E1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{E2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{E3}^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AA}' = \begin{bmatrix} 1-\delta_{E1}^2 & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & 1-\delta_{E2}^2 & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & 1-\delta_{E3}^2 \end{bmatrix}$$

در نتیجه AA' یک ماتریس همبستگی بین متغیرهای اولیه است که در آن عناصر (۱) قطر اصلی از واریانس‌های عامل‌های انحصاری کسر شده‌اند. از آن جا که متغیرها استاندارد شده هستند، یعنی واریانس آن‌ها برابر ۱ است، این عناصر نظری جدید معرف مقدار کل منهای مقدار انحصاری هستند، یعنی واریانس مشترک هر متغیر که همان اندازه‌ی اشتراک h^2 است. بنابراین ماتریس $\mathbf{AA}'$ به صورت $\overline{\mathbf{R}}$ نشان داده می‌شود که ماتریس همبستگی بین متغیرهای اولیه است که در آن عناصر نظری (۱) با اندازه‌های اشتراک عوض شده‌اند:

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{AA}' = \begin{bmatrix} h_1^2 & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & h_2^2 & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & h_3^2 \end{bmatrix}$$

تحلیل عامل اصلی، به طور ساده اجرای عملیات SVD روی این **ماتریس همبستگی تقلیل یافته‌ی $\overline{\mathbf{R}}$** است. به عبارت دیگر در PFA واریانس مشترک متغیرهای اصلی مورد تحلیل قرار می‌گیرد نه واریانس کل (۱) آنها. درست مثل PCA، ماتریس همبستگی به صورت حاصل‌ضرب سه ماتریس تجزیه می‌شود: $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{UDU}'$، که $\mathbf{U}$ شامل بردارهای ویژه و $\mathbf{D}$ شامل ارزش‌های ویژه است.

به هر حال **دو تفاوت** عمده بین **PCA** (تحلیل مؤلفه‌های اصلی) و PFA (تحلیل عامل اصلی) وجود دارد. اول این که در PFA **همه عامل‌ها در مدل جای داده نمی‌شوند**. به لحاظ نظری این کار را ممکن است بتوان انجام داد، امّا بدیهی است از تحلیلی که در آن تعداد عامل‌های مشترک با

تعداد متغیرهای اوّلیه برابرند، چیز زیادی فهمیده نمی‌شـــود. معنای آن چنین خواهد بود که چندگانگی متغیرها به سمت یگانگی سوق پیدا نکرده است. پیش‌تر در PCA معلوم گردید که تعداد کمی مؤلفه می‌توانند با هم میزان زیادی از واریانس متغیرها را توضیح دهند. امّا در آن جا مدل اصلی به همان تعداد متغیرها، دارای مؤلفه اســت. از ســوی دیگر در PFA، هدف در ابتدا به دســت آوردن مدلی است که در آن عامل‌ها کمتر از تعداد متغیرها باشند، یعنی تحلیل عامل اصلی شیوه‌ای برای کاهش ابعاد است.

تفاوت دوم این است که در مدل PFA که محاسبات آن به ماتریس تقلیل یافته همبستگی باز می‌گردد، **اندازه‌ی اشتراک** (عناصر قطری h^2) می‌بایستی **برآورد گردد.** در مرحله اول در حقیقت یک حدس اســـت، نه یک برآورد، زیرا فرد نســـبت به بخش مشـــترک متغیرها که مهمترین هدف جســتجوی اوســت، بی‌اطلاع می‌باشـد. یک حدس متداول اولیه، همانند اندازه‌ی اشــتراک یک متغیر، مجذور ضریب همبستگی چندگانه این متغیر با سایر متغیرهاست. چنان چه این ضرایب تعیین چند متغیره $\mathbf{R}_i^2$ در قطر $\overline{\mathbf{R}}$ جایگزین شـــوند، آنگاه می‌توان عملیات SVD، $\overline{\mathbf{R}}-\mathbf{UDU}'$ را در مرحله نخست اجرا نمود و ماتریس عاملی $\mathbf{A}$ را محاسبه کرد. از این طریق می توان $\overline{\mathbf{R}}=\mathbf{AA}'$ را به دست آورد. امّا از آن جا که اندازه‌های اشتراک فقط حدس‌های اولیه می‌باشند، به دست آوردن این مورد در مرحله نخست اغلب اوقات ارضا کننده نیست، به این خاطر یک فرایند تکراری بنا می‌شود. اندازه‌های اشـــتراک حاصـــل از مرحله نخســـت (یعنی عناصـــر قطری $h^{۲}=\Sigma a_{ij}^{۲}$ مربوط به بازتولید ماتریس همبستگی $\overline{\mathbf{R}}=\mathbf{AA}'$) مجدداً برای انجام عملیات مشابهی به کار گرفته می‌شوند. هرگاه اندازه‌های اشتراک به حدکافی همگرایی پیدا کنند این فرایند تکراری پایان می‌پذیرد.

۵-۲-۹ ارزش‌های ویژه و بردارهای ویژه داده‌های سازگاری زناشویی

اکنون به محاسبه تحلیل عامل اصلی مثال اختصاری خودمان می‌پردازیم. ماتریس همبستگی عبارت است از :

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰.۰۵۶ & -۰.۹۳۲ \\ ۰.۰۵۶ & ۱ & -۰.۱۰۰ \\ -۰.۹۳۲ & -۰.۱۰۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

ماتریس همبستگی تقلیل یافته از طریق جایگزین کردن عناصر قطری (۱) با اندازه‌های برآورده شده اشتراک به دست می‌آید. به طور نمونه عنصر بالایی سمت چپ با ضریب همبستگی چندگانه عوض شده است که در تحلیل رگرسیون از $X_۱$ به عنوان تابعی از $X_۲$ و $X_۳$ به دست می‌آید. در مورد عناصر دیگر قطری نیز همین کار صورت می‌گیرد.

$$\overline{\mathbf{R}}=\begin{bmatrix} h_۱^۲ & r_{۱۲} & r_{۱۳} \\ r_{۱۲} & h_۲^۲ & r_{۲۳} \\ r_{۱۳} & r_{۲۳} & h_۳^۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} R^۲_{۱/۲۳} & ۰.۰۵۶ & -۰.۹۳۲ \\ ۰.۰۵۶ & R^۲_{۲/۱۳} & -۰.۱۰۰ \\ -۰.۹۳۲ & -۰.۱۰۰ & R^۲_{۳/۱۲} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۰.۸۶۹ & ۰.۰۵۶ & -۰.۹۳۲ \\ ۰.۰۵۶ & ۰.۰۲۱ & -۰.۱۰۰ \\ -۰.۹۳۲ & -۰.۱۰۰ & ۰.۸۷۰ \end{bmatrix}$$

ســـاختار ویژه این ماتریس تقلیل یافته، با یک روش معروف آزمایش می‌شـــود: معادله ویژه $|\overline{R}-\lambda \mathrm{I}|=۰$ را تشـــکیل داده، برای مقادیر لامبدأی λi آن را حل نموده، در معادله ماتریس جایگزین می‌کنیم $(\overline{R}-\lambda \mathrm{I})U=۰$، و بردار ویژه $\mathbf{u_i}$ را پیدا می‌کنیم. این عملیات SVD به تجزیه زیر منجر می‌شود که می‌تواند یک مرور تمرینی برای خواننده باشد:

$$\overline{\mathbf{R}}=\mathbf{UDU'}=\begin{bmatrix} -۰.۷۰۵ & -۰.۲۸۰ & ۰.۶۵۲ \\ -۰.۰۶۲ & ۰.۹۳۹ & ۰.۳۳۷ \\ ۰.۷۰۷ & -۰.۱۹۷ & ۰.۶۷۹ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱.۸۰۸ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰.۰۲۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۰.۰۷۳ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -۰.۷۰۵ & -۰.۰۶۲ & ۰.۷۰۷ \\ -۰.۲۸۰ & ۰.۹۳۹ & -۰.۱۹۷ \\ ۰.۶۵۲ & ۰.۳۳۷ & ۰.۶۷۹ \end{bmatrix}$$

۶-۲-۹ ماتریس عاملی A برای تمام عامل‌ها: مسأله ارزش‌های ویژه منفی

اکنون می‌بایست با استفاده از ماتریس $\mathbf{U}$ بردارهای ویژه و ماتریس قطری $\mathbf{D}$ ارزش‌های ویژه، ماتریس عاملی $A=UD^{½}$ را محاســـبه کنیم. تا پایان کار، یعنی تعیین $D^{½}$، مجذور ریشـــه‌های ارزش‌های ویژه می‌بایست محاسبه شده باشد. امّا ارزش ویژه آخری منفی است، بدین‌ترتیب عامل سوم فرضی[1] و موهوم خواهد بود. لازم است به این موضوع اشاره مختصری شود.

اگر ماتریســـی علاوه بر ارزش‌های ویژه مثبت، ارزش‌های ویژه منفی را هم نتیجه دهد می‌گوییم نیمه معین مثبت[2] است. به راحتی می‌توان نشان داد که ماتریس همبستگی $\mathbf{R}$ در PCA، با عناصر ۱۱ روی قطر اصلی، همیشه نیمه معین مثبت است، بدین معنی که تمام ارزش‌های ویژه غیر منفی هستند. چنانچه ارزش‌های اشتراک را روی قطر اصلی جایگزین کنیم، آنگاه ماتریس همبستگی تقلیل

1. Imaginary 2. Posetive semi-definite

یافته تقریباً در همه حالات، ارزش‌های ویژه منفی را ایجاد می‌کند. و از آن جا که یک ارزش ویژه را می‌توان به عنوان بخشی از واریانس تبیین شده تفسیر کرد که طبعاً بایستی مثبت باشد، چنین نتیجه می‌گیریم که ارزش‌های ویژه منفی مطلقاً بی‌معنا هستند.

در ماتریس همبستگی اولیه، مجموعه ارزش‌های ویژه برابر ۳=۱+۱+۱، یعنی واریانس کل سه متغیر است. در ماتریس همبستگی تقلیل یافته این مقدار برابر با ۱/۷۶۰=۰/۸۷۰+۰/۰۲۱+۰/۸۶۹ می باشد که با مجموع ارزش‌های اشتراک برابر است، به عبارت دیگر معادل کل واریانس مشترک سه متغیر با هم است. حاصل مجموع ارزش‌های ویژه $\Sigma\lambda_i$ = ۱/۸۰۸+۰/۰۲۵+(۰/۰۷۳-) نیز همین است، زیرا هر ارزش ویژه بیانگر بخشی از واریانس مشترک متغیرها از کل واریانس است است که عامل مربوطه آن را توضیح می‌دهد. بنابراین این حاصل جمع باید همان واریانس مشترک کل باشد. از این رو ما خود را در شرایط نامساعدی می‌بینیم که در آن دو عامل نخست با هم ۱۰۴٪=۱/۷۶۰÷(۱/۸۰۸+۰/۰۲۵) از واریانس مشترک را تبیین می‌کنند. درحالی‌که سه متغیر با هم ۱۰۰٪ را تبیین می‌کنند. از سوی دیگر ارزش ویژه منفی عمدتاً بی‌نهایت کوچک است (نزدیک به صفر). از این گذشته، در اغلب موارد، تعداد کمی از عامل‌ها برای تبیین بخش مشترک متغیرها کفایت می‌کند. در مثال اختصاری ما ارزش ویژه دوّم در حال حاضر کوچک است ($\lambda_2 =$ ۰/۰۲۵)، به طوری‌که یک راه‌حل تک عاملی کفایت می‌کند.

۹-۲-۷ تفاوت اساسی PFA و PCA

مقایسه راه‌حل یک عاملی PFA با راه‌حل دو مؤلفه‌ای PCA در خور توجه است. مؤلفه نخست که به $X_۱$ (گفت و شنود) و $X_۳$ (ترجیح هر دو به ماندن در خانه) اشاره دارد، بعد معاشرت را نشان می‌دهد. مؤلفه دوّم که متغیر $X_۲$ (توافق مالی) بار زیادی روی آن دارد به عنوان یک بعد جداگانه به نام «توافق» تعبیر شده است.

چنین به نظر می‌رسد که مدل PFA عامل دیگری به دست نمی‌دهد. خصیصه مجزّای متغیر $X_۲$ تقریباً به طور کامل به عامل انحصاری $E_۲$ نسبت داده شده است و متعلق به بخش‌های مشترک محسوب نمی‌شود. این کار در PCA ممکن نیست، زیرا این مدل برای عامل‌های انحصاری تدوین نشده است. ملاحظه می شود که تفاوت بین منطق مدل PCA و مدل PFA را می‌توان به محتوا ربط داد.

۹-۲-۸ ماتریس عاملی A برای عامل اوّل و تعاملات بعدی

امکان محاسبه ماتریس عاملی $\mathbf{A}$ برای یک راه‌حل سه عاملی وجود نداشت، زیرا ارزش‌های ویژه منفی مانع این کار بود. اکنون خود را به عامل اوّل، با ارزش ویژه $\lambda_1 =$ ۱/۸۰۸ محدود می‌سازیم. در این صورت بازنمایی $\overline{\mathbf{R}}$ به شکل زیر است:

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{U_1}\boldsymbol{\lambda}_1\mathbf{u}_1' = \begin{bmatrix} -0.705 \\ -0.062 \\ 0.707 \end{bmatrix} (1.808) \quad (-0.705 \;\; -0.062 \;\; 0.707)$$

و ستون اوّل ماتریس $\mathbf{A}$ چنین است:

$$\mathbf{a_{il}} = \mathbf{u_1}\boldsymbol{\lambda}_1^{1/2} = \begin{bmatrix} -0.705 \\ -0.062 \\ 0.707 \end{bmatrix} (1.808)^{1/2} = \begin{bmatrix} -0.948 \\ -0.083 \\ 0.953 \end{bmatrix}$$

همان طور که انتظار می‌رفت متغیرهای $X_۱$ و $X_۳$ دارای بار عاملی زیادی روی عامل نخست (تنها عامل) هستند: به ترتیب ۰/۹۴۸- و ۰/۹۵۰. مجذور این بارها (۰/۸۹۹ و ۰/۹۰۲) اندازه‌های اشتراک $X_۱$ و $X_۳$ با عامل $F_۱$ می‌باشد. مجموع مجذورات سه عامل فوق معادل ارزش ویژه عامل نخست است: ۱/۸۰۸= ۰/۹۰۲+۰/۰۰۷+۰/۸۹۹.

سه اندازه‌ی ا شتراک با آنچه ابتدا برآورد گردید خیلی فرق دارند: ۰/۸۹۹، ۰/۰۰۷ و ۰/۹۰۲ در مقابل ۰/۸۶۹، ۰/۰۲۱ و ۰/۸۷۰. بنابراین سه اندازه‌ی اشتراک جدید از نو در قطر اصلی ماتریس همبستگی جایگزین شده و عملیات SVD یک بار دیگر اجرا می‌شود. این فرایند تعاملی[1] تکرار می‌شود تا اندازه‌های اشتراک همگرا[2] شوند. پس از ۹۹ تعامل، آن‌ها عبارت خواهند بود از: ۰/۹۳۵، ۰/۰۰۷ و ۰/۹۴۸.

۹-۲-۹ اندازه‌های اشتراک

تاکنون این نکته بیان نشد که **اولین برآورد** اندازه‌های اشتراک، تعداد تعامل‌ها را تعیین خواهد کرد: هر چه اولین برآورد بهتر باشد، همگرایی زودتر اتفاق می‌افتد. بنابراین جای تعجّب نیست که مؤلفین پیشنهادهای بسیاری را ارائه کرده‌اند. پیش از این، مجذور همبستگی چندگانه یک متغیر با همه متغیرهای دیگر به عنوان یک برآورد اولیه از اندازه اشتراک آن به کار می‌رفت. بعضی پیشنهادهای دیگر عبارتند از:

الف) به دست آوردن بیشترین مقدار همبستگی‌های هر متغیر با سایر متغیرها (تورستن).

ب) به دست آوردن میانگین همبستگی هر متغیر با سایر متغیرها .

ج) ابتدا یک PCA را اجرا نموده، مؤلفه‌هایی که ارزش ویژه‌ی آن‌ها بزرگ‌تر از ۱ باشد را نگه داریم و برای هر متغیر بخشی که توسط این مؤلفه‌ها با هم تبیین می‌شود را به دست آوریم (پیشنهادی از کایزر تحت عنوان«لحظه کوتاه[3]»).

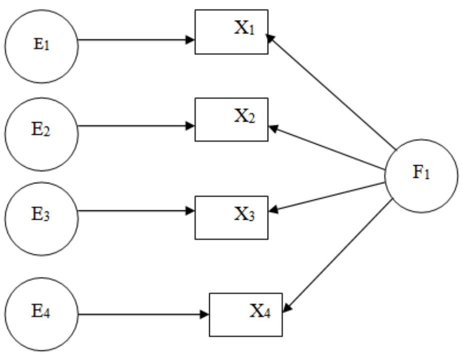
1. Interative Process 2. Converge 3. Little Jiffy

طبق نظر بعضی مؤلفان، مشکل برآورد اندازه‌های اشتراک را می‌توان با ثابت نگه‌داشتن تعداد عامل‌های مدل PFA حل کرد. پیشنهاد «لحظه کوتاه» کایزر در واقع جلوه‌ای از این راهبرد است.

در این جا لازم می‌دانیم یک نکته احتیاطی و یک تذکر را درباره اندازه‌های اشتراک اضافه کنیم. اولاً اگر مدل PFA تنها یک عامل مشترک داشته باشد (و یک عامل انحصاری برای هر متغیر)، آنگاه وضعیت جالب توجه از طریق اندازه اشتراکی رخ می‌دهد که از ۱ بزرگتر شود. منظور این است که متغیر مربوطه و عامل دارای اشتراکی بیش از ۱۰۰٪ باشند که البته چیز بی‌معنایی است. این وضعیت غیرعادی «حالت فوق‌العاده»[1] نامیده می‌شود. این حالت یک زنگ خطر است که ما را به این نتیجه می‌رساند که رتبه‌ی یک ماتریس همبستگی تقلیل یافته، از ۱ بیشتر است. چنانچه بیش از یک عامل مشترک در تحلیل باشد، هیچ اندازه‌ی اشتراکی بیشتر از ۱ نخواهد بود.

ثانیاً کاهش تعداد زیادی متغیر به تعداد کمی عامل مشترک، وابسته به یک سری **شرایط** است. اشاره مختصری به این موضوع می‌کنیم. در PCA همه عناصر قطری ماتریس همبستگی معادل ۱ بودند. تعداد مؤلفه‌ها به اندازه‌ی تعداد متغیرها بود. از سوی دیگر در PFA عناصر روی قطر اصلی با اندازه‌های اشتراک عوض شده‌اند، بدین معنی که تنها واریانس مشترک متغیرها (جدای از عامل‌های انحصاری) مورد تحلیل قرار گرفته است. علاوه بر این، این مدل عموماً دارای تعداد کمتری مؤلفه نسبت به متغیرهاست. مورد آخر یعنی تقلیل ابعاد، تنها در صورتی ممکن است که شرایط خاصی در رابطه با همبستگی‌های بین متغیرها برقرار باشد.

بدون این که بخواهیم این موضوع دنباله‌دار شود، در حد یک یادآوری نظری، تجسمی از این شرایط را بیان می‌کنیم. مدلی را در نظر بگیرید که چهار متغیر و یک عامل مشترک دارد. همچنین تحلیل عامل را به گونه‌ای تصور کنید که اگر یک تحلیل مسیر بود، عامل‌های آن متغیرهای علّی مکنون بودند. در این حالت، نمودار کمانی مانند شکل ۷-۹ خواهد بود.



شکل ۷-۹ نمودار کمانی چهار متغیر و یک عامل مشترک

1. Heywood case

معادلات ســاختاری و معادلات r را تشــکیل داده و مشــخص می‌شــود که $r_{12}r_{34} = r_{14}r_{23}$ و نیز $r_{13}r_{24} = r_{14}r_{24}$ بایستی برقرار باشند. این ها شرایطی هستند که بدون آن نمی‌توان چهار متغیر را به یک بعد کاهش داد، یعنی بدون آن رتبه **R** نمی‌تواند به ۱ تقلیل یابد.

۱۰ -۲-۹ چرخش‌ها و نمرات عاملی

موارد زیر با آنچه در مورد PCA توضیح داده شد فرقی ندارد. علاوه بر بارهای عاملی، نمرات عاملی را هم می‌توانیم به صورت $F = XUDD^{-1/2}$ حساب کنیم.

یک چرخش را خواه به صــورت متعامد یا مایل می‌توان انجام داد تا یک ماتریس عاملی با «ســاختار ســاده» به دســت آید. مفهوم «ســاختار ســاده» (که به نظرات تورســتون بر می‌گردد) در بخش‌های قبلی توضیح داده شد، به طور کلی بدین معناست که هر عاملی توسط خوشه جداگانه‌ای از بارهای عاملی بالا بازنمایی شــود. این البته به معنای کم ارزش بودن چرخش مایل نیســت، به این خاطر که در علوم اجتماعی معمولاً عامل‌ها (مثل گفتگو و توافق در مثال ما) نمی‌توانند کاملاً از هم مستقل باشند. احتیاط مربوط به چرخش مایل در اصل بیشتر جنبه فنی دارد. باید مراقبت دقیق به عمل آید تا اطمینان حاصل شود که همبستگی‌های عاملی بیش از حد بالا نباشند. از این گذشته در چرخش مایل توصیه شده که روی بارهای الگوی عاملی (ضرایب رگرسیون) تأکید شود، نه ضرایب ساختار عاملی (همبستگی‌های بین متغیرها و عامل‌ها)، زیرا این ها با ضرایب عاملی آلوده شده‌اند.

۱۱-۲-۹ نتایج PFA حاصل از SPSS ویندوز

در برنامه کامپیوتری SPSS تحلیل عامل اصلی به نام عامل‌یابی محور اصلی (PAF) خوانده می شود، چون شیوه محور اصلی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در این جا نتایج مشــکل با آماره‌های یک متغیره، ماتریس ضــرایب همبســتگی و معکوس آن، ماتریس همبستگی خلاف- انگاره[1]، مقادیر معناداری و نمودار سنگریزه‌ای ارزش‌های ویژه و همچنین نمرات عاملی درخواست نمی شوند، چرخشی را هم نمی‌توان صورت داد چون PAF و ملاک[1] کایزر (پیش‌گزینه ســیســتم) تنها یک عامل را اســتخراج می‌کنند و یک راه حل تک عاملی قابل چرخش نیست.

انتخاب یا ساختن فایل داده‌ها

چگونگی باز کردن یا ساختن و ذخیره سازی فایل داده‌ها در فصل ۴ توضیح داده شده است.

---

1 . anti-image

1. built-in Kaiser criterion

اجرای شیوه آماری

روی عبارت statistics کلیک کنید. روی عبارت Data Reduction کلیک کنید. روی عبارت Factor کلیک کنید. این کار دریچه محاوره‌ای تحلیل عامل (Factor Analysis) را باز می‌کند. روی متغیرهای $X_۱$، $X_۲$ و $X_۳$ (به طور جداگانه یا با در نظر گرفتن دکمه موس و حرکت دادن آن روی نام متغیرها همه را با هم انتخاب کنید) کلیک کنید و با کلیک روی علامت ⊳ آن‌ها را برای تحلیل به کادر مربوطه منتقل کنید.

روی عبارت Descriptive کلیک کنید. متوجه خواهید شد که در این لحظه Initial Solution انتخاب شده است. روی عبارت Reproduced correlation Matrix و بعد از آن روی Continue کلیک کنید تا به دریچه محاوره‌ای Factor Analyisis برگردید.

روی عبارت Extraction کلیک کنید، دریچه محاوره Factor Analyisis Extraction باز خواهد شد. خواهید دید که پیش‌گزینه روی روش تحلیل مؤلفه‌های اصلی قرار گرفته است. می‌توانید بجای آن روی عبارت Principal Axis Factoring و سپس روی عبارت Maximum Iteratios for convergence کلیک کنید. اگر تنها یک بار تکرار را برای مقایسه با محاسبات دستی می‌خواهید، با کلیک دکمه برگشت ←رقم ۲۵ را حذف و عدد ۱ را وارد کنید. بعد روی واژه Continue کلیک کنید .

اکنون شما به دریچه محاوره‌ای تحلیل عامل (Factor Analysis) بر می گردید. روی واژه ok کلیک کنید. حالا SPSS شیوه آماری مورد نظر را اجرا کرده و نتایج در دریچه مربوطه ظاهر می شود.

ذخیره سازی نتایج را فراموش نکنید : روی واژه File کلیک کنید. روی واژه save as کلیک کنید و نام فایل را با پسوند Lst تایپ کرده و روی واژه ok کلیک کنید.

همان طور که می‌دانید نتایج کامپیوتری فوق را با بازکردن دریچه دستورات و تایپ دستورات SPSS هم می‌توان به دست آورد. روی واژه File و سپس New بعد SPSS syntax کلیک کنید و دستورات را تایپ نمایید. مکان نما را در خط اول قرار داده و روی علامت ⊳در نوار تصویر (یا واژه Run در مورد SPSS ویندوز نوع ۵.۰) کلیک کنید.

دستورات بدین شرح است:

```
1 Factor/variables  X1  X2   X3
2        /Print Initial Extraction Pepr
3        /criteria iterate(1)
4        / Extraction PAF.
```

در دستور آخر ۴، تحلیل عامل (عامل محور اصلی) با استفاده از عبارت extraction درخواست شده است.

در تحقیق عملی از دستور ۳پرهیز می‌شود. تنظیم پیش گزینه کامپیوتر، ۲۵ تکرار است؛ می‌توان با دستور criteria iterate (n) تعداد n تکرار را تعیین نمود. در عمل معمولاً وقتی کسی از این دستور استفاده می‌کند که بیش از ۲۵ تکرار $(n\rangle ۲۵)$ را برای نزدیکی بیشتر اندازه‌های اشتراک

به یکدیگر (همگرایی) لازم بداند. در این جا به منظور رعایت اختصار، ما n را روی ۱ تنظیم کرده‌ایم، چون در محاسبات دستی تنها یک تکرار را انجام داده‌ایم، بدین ترتیب نتایج کامپیوتری با آن قابل مقایسه خواهد بود.

در دستور ۲ با دستور "print" بعضی آماره‌ها خواسته شده است. با دستور Intial اندازه‌های اشتراک اولیه، ارزش‌های ویژه و درصد واریانس تبیین کننده اولیه درخواست می شود. این نتایج همانند PCA خواهند بود، به جز در مورد اندازه‌های اشتراک، چون در این جا اندازه‌های اشتراک معادل ۱ نیستند، امّا در PFA در ابتدا به عنوان ضرایب چندگانه تعیین ۰/۸۶۹، ۰/۰۲۱، ۰/۰ و ۰/۸۷۰ برآورد شده‌اند. پس از یک تکرار می شوند ۰/۸۹۹، ۰/۰۰۷ و ۰/۹۰۳ که با دستور "Extraction" می‌توان آن‌ها را کاهش داد و در بخش نتایج با عنوان "Final statistics" قابل بازبینی هستند. با دستور "repr" ماتریس همبستگی بازسازی شده به دست می‌آید.

نتایج به این شرح است:

Analysis number 1 Listwise deletion of Cases with missing values
Extraction 1 for Analysis 1, Principal Axis Factoring (PAF)
Initial Statistics:

Variable	Communality	*	Factor	Eigenvalue	Pct of var	Cum pct
X1	.86946	*	1	1.94457	64.8	64.8
X2	.2053	*	2	.98818	32.9	97.8
X3	.87036	*	3	.06726	2.2	100.0

PAF Attempted to extract 1factors
More than 1 iterations required. Convergence= .03270
Facror Matrix:

	Facror 1
X1	.94789
X2	.08279
X3	-.95030

Final Statistics:

Variable	Communality	*	Factor	Eigenvalue	Pct of var	Cum pct
		*				
X1	.89849	*	1	1.80840	60.3	60.3
X2	.00685	*				
X3	.90306	*				

Reproduced correlation Matrix:

	X1	x2	x3
X1	.89849*	-.02257	-.03092
X2	.07848	.00685*	-.02133
X3	-.90077	-.07867	.90306*

The Lower Left triangle contains the Reproduced correlation Matrix:The diagonal, communalities: and the upper right triangle ,residuals between the observed correlations and the Reproduced correlations.
There are 0(.0%) residuals (above diagonal)that are > 0.05

۹-۳ تنوع شیوه‌های تحلیل عوامل

طی قرن اخیر، تعداد زیادی از شـیوه‌های تحلیل عاملی توسـعه یافته‌اند. ما مثال هرمان و دیگران را دنبال می‌کنیم. هم بین یک *مدل* و یک *شـیوه* تفاوت قائل می‌شـویم. *مدل* تحلیل مؤلفه‌های اصـلی $\mathbf{X}=\mathbf{CA}'$ (دربردارنده همه مؤلفه‌ها) و مدل تحلیل عامل‌های اصلی $\mathbf{X}=\mathbf{FA}'+\mathbf{E}$ (مشتمل بر عامل‌های انحصـاری و عموماً تعداد عامل‌های خیلی کمتر از متغیرها) دو نمونه از مدل‌های خطی هسـتند. آن‌ها را می‌توان به وسـیله یک دسـتگاه معادلات سـاختاری یا به وسـیله یک نمودار کمانی همانند تحلیل مسیر نشان داد. از سوی دیگر *شیوه آماری*، یک روش محاسباتی است که به ما امکان پیدا کردن یک راه‌حل عاملی را می‌دهد، یعنی امکان محاسـبه بارهای عاملی، نمرات عاملی، همبسـتگی‌های عاملی و غیره را فراهم می‌کند. در PCA و PFA همین شـیوه به کار می‌رود، به طور مشخص براساس شیوه محور اصلی عامل نخست بیشترین واریانس متغیرها را به خود می‌گیرد، عامل دوم بیشـترین مقدار را از واریانس باقی مانده اقتباس نموده و با عامل اوّل متعامد می‌باشـد، و عامل سوم از واریانس باقی مانده بیشترین مقدار را می‌گیرد و با عامل دوم متعامد است. در PCA این روند ادامه پیدا می‌کند تا وقتی‌که همه متغیرها به کار گرفته شـوند. در PFA روند فوق تا جایی ادامه می‌یابد که همه‌ی واریانس «مشترک» صرف شود، چون PFA فقط بخش غیرانحصاری واریانس را مورد تحلیل قرار می‌دهد، چنان‌که ماتریس همبسـتگی دربردارنده واریانس‌های کل (۱) نیسـت، بلکه حاوی واریانس‌های مشترک برآورد شده (h^2) است. غیر از این، تفاوت دیگری بین روش به کار رفته در PCA و PFA وجود ندارد. ماتریس همبسـتگی، تقلیل نیافته و تقلیل یافته به ترتیب با اسـتفاده از عملیات SVD از لحاظ سـاختار مورد آزمایش قرار می‌گیرند. این آزمایش سـاختار ویژه واقعاً همان شـیوه محور اصـلی اسـت، زیرا ارزش‌های ویژه بخش‌هایی از واریانس هسـتند که توسط عامل‌ها از متغیرها اقتباس می‌شـوند و در بالا به آن‌ها اشـاره شـد. بردارهای ویژه به طور سـاده جهت‌های این عامل‌ها را نشان می‌دهند .

علاوه بر شـیوه محور اصـلی (که نباید با مدل عامل اصـلی که یک مدل اسـت اشـتباه شـود) شیوه‌های بسیار دیگری هم به وجود آمده‌اند که برای پیدا کردن راه‌حل عاملی به کار می‌روند. در این بخش گزیده‌ای از دنیای غنی شیوه‌های تحلیل عامل را توضیح می‌دهیم. بعضی از این شیوه‌ها از دور خارج شده‌اند.

۱-۳-۹ روش قطری

روش (شیوه) قطری (=شیوه ریشه دوم= شیوه مثلثی) از لحاظ تاریخی از قدیمی‌ترین شیوه‌ها ست. این شیوه از زمانی کاربرد دارد که کامپیوتر هنوز ساخته نشده بود و به آسانی با دست قابل محاسبه اسـت. در این روش، از سـاختار ویژه ماتریس همبسـتگی تحلیلی به عمل نمی‌آید. تجزیه آن خیلی سـاده‌تر اسـت: ماتریس همبسـتگی به عنوان حاصـل‌ضـرب یک ماتریس پایین مثلثی[1] و ترانهاده آن

1. lower Triangular Matrix
2. Upper triangular Matrix

ماتریس بالا مثلثی[2] تجزیه شده است (وجه تسمیه شیوه مثلثی همین است). در حقیقت منظور فرمول $R = AA'$ است که قبلاً در PCA وارد کردیم. با این تفاوت که $\mathbf{A}$ در این جا یک ماتریس پایین مثلثی است، یعنی ماتریسی که بالای قطر اصلی آن را صفر تشکیل می‌دهد.
نحوه محاسبه ماتریس عاملی $\mathbf{A}$ را می‌توان بی‌درنگ اثبات کرد. در مثال سازگاری زناشویی ماتریس همبستگی زیر را داشتیم:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰.۰۵۶ & -۰.۹۳۲ \\ ۰.۰۵۶ & ۱ & -۰.۱۰۰ \\ -۰.۹۳۲ & -۰.۱۰۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

با قراردادن ستون اول $\mathbf{R}$ به عنوان ستون اول ماتریس عاملی $\mathbf{A}$، خواهیم داشت:

$$\mathbf{a}_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰.۰۵۶ \\ -۰.۹۳۲ \end{bmatrix}$$

از آن جا که ستون اول $\mathbf{R}$ معرف متغیر اول و ستون اول $\mathbf{A}$ معرّف عامل اول می‌باشد، این کار بدان معنی است که متغیر اول به عنوان عامل اول در نظر گرفته شده است.
بازسازی $\mathbf{R}$ براساس این عامل اول $\mathbf{a_1 a_1'}$ خواهدبود:

$$\mathbf{a_1 a}'_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰.۰۵۶ \\ -۰.۹۳۲ \end{bmatrix} (۱ \quad ۰.۰۵۶ \quad -۰.۹۳۲) = \begin{bmatrix} ۱ & ۰.۰۵۶ & -۰.۹۳۲ \\ ۰.۰۵۶ & ۰.۰۰۳ & -۰.۰۵۲ \\ -۰.۹۳۲ & -۰.۰۵۲ & ۰.۸۶۸ \end{bmatrix}$$

ماتریس همبستگی باقی مانده که با کسر ماتریس بازسازی شده از ماتریس همبستگی اولیه حاصل می‌شود، بدین‌گونه است:

$$\mathbf{R_1} = \mathbf{R} - \mathbf{a}_۱\mathbf{a}'_۱ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰.۹۹۷ & -۰.۰۴۸ \\ ۰ & -۰.۰۴۸ & ۰.۱۳۲ \end{bmatrix}$$

ستون و ردیف اول این نخستین ماتریس همبستگی باقی مانده منحصراً شامل صفرهاست. بدین معنا که عامل‌های بعدی تنها با دو متغیر آخر در رابطه‌اند. به عبارت دیگر متغیر اول حذف شده است، به گونه‌ای که با محاسبه همبستگی تفکیکی قابل مقایسه است. ستون دوم ماتریس همبستگی باقی مانده $\mathbf{R_1}$ شامل تمام ضرایب همبستگی با متغیر دوم است بعد از آنکه را متغیر اول (= عامل اول) کنار زده شود.

در مرحله بعد، ستون دوم ماتریس عامل $\mathbf{A}$، با گرفتن ستون دوم ماتریس همبستگی باقی‌مانده $\mathbf{R_1}$ و تقسیم همه این عناصر بر جذر عنصر قطری آن ستون، شکل می‌گیرد:

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} ۰ \div (۰.۹۹۷)^{۱/۲} \\ ۰.۹۹۷ \div (۰.۹۹۷)^{۱/۲} \\ -۰.۰۴۸ \div (.۹۹۷)^{۱/۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰.۱۹۸ \\ -۰.۰۴۸ \end{bmatrix}$$

بدین ترتیب ماتریس همبستگی بازسازی شده دوم می‌شود:

$$\mathbf{a}_2\mathbf{a}'_۲ = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰.۹۹۸ \\ -۰.۰۴۸ \end{bmatrix} (۰ \quad ۰.۹۹۸ \quad -۰.۰۴۸) = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰.۹۹۷ & -۰.۰۴۸ \\ ۰ & -۰.۰۴۸ & ۰.۰۰۲ \end{bmatrix}$$

و ماتریس همبستگی باقی مانده دوم چنین است:

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 - \mathbf{a}_2\mathbf{a}'_۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰.۱۳۰ \end{bmatrix}$$

دو ستون و ردیف اول این ماتریس منحصراً شامل صفرهاست. به آسانی می‌توان نشان داد که بقیه همبستگی‌های $\mathbf{R}_2$ (فقط در اینجا) ضرایب تفکیکی هستند که دو متغیر اول از آن‌ها کنار زده شده است. این فرایند آنقدر تکرار می‌شود تا همبستگی‌های باقی‌مانده به اندازه کافی کوچک باشند. آنگاه عدّه عامل‌های مهم همان تعدادی است که فرایند در آن متوقف می‌شود. در مثال اختصاری ما، مرحله سوم و آخرین مرحله بدین صورت است:

$$\mathbf{a}_۳ = \begin{bmatrix} ۰ \quad \div (۰.۱۳۰)^{۱/۲} \\ ۰ \quad \div (۰.۱۳۰)^{۱/۲} \\ ۰.۱۳۰ \div (۰.۱۳۰)^{۱/۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰.۳۶۰ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_3\mathbf{a}'_۳ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰.۱۳۰ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_۳ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

ماتریس $\mathbf{A}$ بارهای عاملی یعنی حاصـل نهایی این سـه راه‌حل عاملی مرکب از سـه بردار $\mathbf{a}_۱$، $\mathbf{a}_۲$ و $\mathbf{a}_۳$ است:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰.۰۵۶ & ۰.۹۹۸ & ۰ \\ -۰.۹۳۲ & -۰.۰۴۸ & ۰.۳۶۰ \end{bmatrix}$$

یادآور می‌شویم که $\mathbf{AA}'$ در واقع معادل $\mathbf{R}$ است.

به طور خلاصه شیوه قطری، متغیر اول را به عنوان عامل اول در نظر می‌گیرد. عامل دوم متغیر دوم است پس از اینکه اثر متغیر اول از آن منفک شود. عامل سوم، متغیر سوم بدون تأثیر دو عامل اول است، و الی آخر.

به آسـانی می‌توان نشـان داد که این شـیوه شـبیه به تحلیل مسـیر با دسـتگاه مثلثی معادلات ساختاری زیر است بدون باقی‌مانده:

$$\begin{aligned} X_۱ &= F_۱ \\ X_۲ &= a_{۲۱}F_۱ + a_{۲۲}F_۲ \\ X_۳ &= a_{۳۱}F_۱ + a_{۳۲}F_۲ + a_{۳۳}F_۳ \end{aligned}$$

از آن‌جا که عبارت باقی‌مانده در شیوه قطری بروز می‌یابد، نتیجه می‌گیریم مدل شبیه به PCA است. در حقیقت اگر ما ابتدا PCA را اجرا کرده و به دنبال آن یک چرخش را اجرا کنیم با این محدودیت که ماتریس عاملی $\mathbf{A}$ می‌بایستی ماتریس مثلثی پایین باشد، راه‌حل مشابهی را به‌دست خواهیم آورد.

در هر حال، شـیوه قطری را به این مدل با عبارات باقی‌مانده هم می‌توان اعمال کرد، مثل آنچه در PFA صـورت می‌گیرد؛ یعنی $\mathbf{X} = \mathbf{FA}' + \mathbf{E}$. در این حالت دیگر ماتریس همبسـتگی اولیه

نخواهد بود، بلکه ماتریس همبستگی تقلیل یافته با اندازه‌های اشتراک بر قطر اصلی است که به عنوان نقطه شروع محاسبات قرار می گیرد. درست مثل PFA، این شیوه هم با مشکل برآورد اولین اندازه‌ی اشتراک (حدس زدن!) مواجه است. به غیر از این مسئله، محاسبات عیناً یکسان است.

کاملاً واضح است که شیوه قطری تنها ارزش تاریخی و آموزشی دارد. یکی از ضعف‌های این شیوه آن است که ترتیب ورود متغیرها بر آن تأثیر می‌گذارد. چنان‌چه ترتیب متغیرها در ماتریس همبستگی $\mathbf{R}$ به جای $X_۱$، $X_۲$ و $X_۳$ به صورت $X_۱$، $X_۳$ و $X_۲$ بود، آنگاه ماتریس $\mathbf{A}$ دارای بارهای عاملی متفاوتی می‌بود:

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} ۱ & -۰.۹۳۲ & ۰.۰۵۶ \\ -۰.۹۳۲ & ۱ & -۰.۱۰۰ \\ ۰.۰۵۶ & -۰.۱۰۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۰.۹۳۲ & ۰.۳۶۳ & ۰ \\ ۰.۰۵۶ & -۰.۱۳۲ & ۰.۰۱۹۰ \end{bmatrix}$$

۲-۳-۹ شیوه مرکز ثقل

همین مطلب در مورد شیوه مرکز ثقل نیز درست است. ارزش آن عمدتاً به لحاظ تاریخی است. اوج ترقی این روش در دهه‌های ۱۹۳۰و ۱۹۴۰ بود، اما با ظهور کامپیوتر این شیوه به وسیله روش تحلیل عامل (PFA) کنار زده نشد. این شیوه به لحاظ آموزشی حائز اهمیت است چون به سادگی با دست قابل محاسبه است.

مثل شیوه قطری، مرحله نخست از این فرض گذرا شروع می شود که تمام همبستگی‌های بین متغیرها را با یک عامل می‌توان توضیح داد. در شیوه قطری این عامل اوّل، اولین متغیر است (بسته به این که کدام‌یک از متغیرها اول وارد شوند). از سوی دیگر در شیوه مرکز ثقل تمام همبستگی‌های بین متغیرهای $\mathbf{R}$ در هنگام تعیین عامل اول در محاسبات دخالت دارند. از آن‌جا که در پیش گرفتن سیر مدل PCA با عناصر (۱) روی قطر اصلی مرسوم نیست، بلکه به جای آن مدل PFA با اندازه‌های اشتراک به کار برده می شود، ما از ماتریس همبستگی تقلیل یافته شروع می‌کنیم (همین کار را در شیوه قطری هم می‌توانیم انجام دهیم).

اجازه دهید برآورد اندازه‌ی اشتراک هر متغیر را به صورت بیشترین همبستگی با سایر متغیرها (با علامت مثبت) در نظر بگیریم.

$$\overline{\mathbf{R}}=\begin{bmatrix} ۰.۹۳۲ & ۰.۰۵۶ & -۰.۹۳۲ \\ ۰.۰۵۶ & ۰.۱۰۰ & -۰.۱۰۰ \\ -۰.۹۳۲ & -۰.۱۰۰ & ۰.۹۳۲ \end{bmatrix}$$

در این صورت فرض موقتی مرحله اول عبارت است از : $\mathbf{\overline{R}} = \mathbf{a_1 a_1' a}$.

قبل از این که توضیح دهیم چگونه بارهای عاملی $\mathbf{a}_1$ تعیین می‌شود (در شیوه قطری این به‌طور ساده ستون اول $\mathbf{R'}$ یا $\mathbf{\overline{R}}$ است)، ابتدا همبستگی‌های منفی $\mathbf{\overline{R}}$ را به ضرایب مثبت تغییر می‌دهیم. این کار را با برعکس کردن شکل متغیر ۳ انجام می‌دهیم: عبارت ۱ «هر دو ترجیح می‌دهند در خانه نمانند» را به «هر دو ترجیح می‌دهند در خانه بمانند» بر می‌گردانیم، با این کار ضرایب همبستگی ۰/۹۳۲- و ۰/۱۰۰- علامت منفی خود را از دست می‌دهند. البته این شیوه را در ضرایب منفی هم می‌شود اعمال کرد، اما در این حالت بیشتر مشکل‌ساز خواهد بود.

در ماتریس $\mathbf{\overline{R}}$ با همبستگی‌های مثبت، مجموع هر ردیف یعنی Σrij هر متغیر با سایر متغیرها و همچنین خودش را پیدا کرده، سپس مجموع مجموعه‌ها، یعنی مجموع T همه همبستگی‌های بین متغیرهای $\mathbf{\overline{R}}$ را به دست می‌آوریم:

$$\overline{R}\begin{bmatrix} ۰.۹۳۲ & ۰.۰۵۶ & ۰.۹۳۲ \\ ۰.۰۵۶ & ۰.۱۰۰ & ۰.۱۰۰ \\ ۰.۹۳۲ & ۰.۱۰۰ & ۰.۹۳۲ \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \Sigma_j r_{۱y} &= ۱.۹۲۰ \\ \Sigma_j r_{۲j} &= ۰.۲۵۶ \\ \Sigma_j r_{۳j} &= ۱.۹۶۴ \\ \hline T &= ۴.۱۴۰ \end{aligned}$$

اکنون نسبت‌های $(\Sigma_J r_{ij}) \div T^{\frac{1}{2}}$ به عنوان بارهای عاملی در نظر گرفته می‌شوند، یعنی عناصر $\mathbf{a}_۱$. **توجیهات** زیادی برای این فرمول می‌توان ارائه کرد. ما دو مورد صوری و هندسی آن را بیان می‌کنیم.

مشتق‌گیری[1] **صوری** به صورت زیر است. می‌دانیم که $\mathbf{\overline{R}} = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1'$:

$$\mathbf{\overline{R}} = \begin{bmatrix} r_{۱۱} & r_{۱۲} & r_{۱۳} \\ r_{۲۱} & r_{۲۲} & r_{۲۳} \\ r_{۳۱} & r_{۳۲} & r_{۳۳} \end{bmatrix} = a_۱ a_۱' = \begin{bmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \\ a_{۳۱} \end{bmatrix} (a_{۱۱} \quad a_{۲۱} \quad a_{۳۱})$$

$$= \begin{bmatrix} a_{۱۱}^۲ & a_{۱۱}a_{۲۱} & a_{۱۱}a_{۳۱} \\ a_{۲۱}a_{۱۱} & a_{۲۱}^۲ & a_{۲۱}a_{۳۱} \\ a_{۳۱}a_{۱۱} & a_{۳۱}a_{۲۱} & a_{۳۱}^۲ \end{bmatrix}$$

1. Deyvation

نتیجه می‌گیریم که مجموع همه عناصر $\bar{\mathbf{R}}$ معادل مجموع تمام عناصر $\mathbf{a_1a_1'}$ است:

$$r_{11}+r_{22}+r_{33}+2r_{12}+2r_{13}+2r_{23}=a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2+2a_{11}a_{21}+2a_{11}a_{31}+2a_{11}a_{31}$$

$$\sum_i\sum_i r_{ij}=(a_{11}+a_{21}+a_{31})^2$$

$$T=(\sum_i ai1)^2$$

بنابراین مجموع T همه همبستگی‌های بین متغیرها برابر است با مجموعه مجذورات بارهای عاملی، چنانکه $\Sigma_i a_{i1}=T^{½}$. این مخرج کسری است که باید مشتق گرفته شود.

برای متغیر i صورت معادل $\Sigma_j rij$ است، یعنی مجموع همبستگی‌ها با سایر متغیرها: $r_{i۱}+r_{i۲}+r_{i۳}$. و از آن جا که $\bar{\mathbf{R}}=\mathbf{a_1a_1'}$، هر ضریب همبستگی برابر با حاصل‌ضرب دو بار عاملی($(r_{\mathbf{ij}}=\mathbf{a_1a_1'})$ خواهد بود، بدین ترتیب:

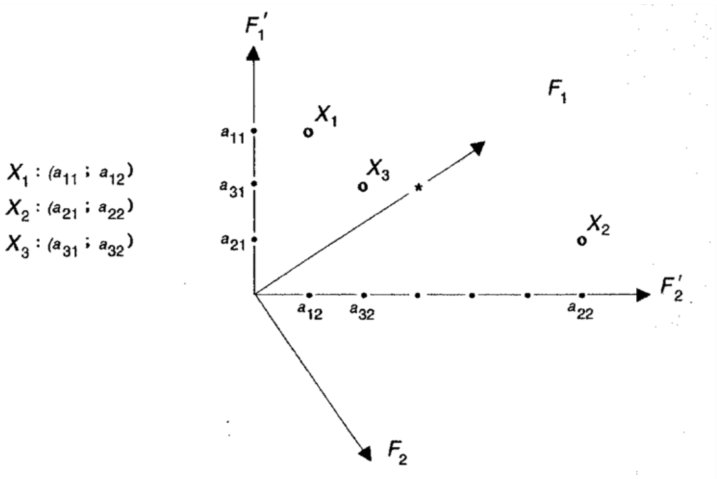
$$r_{i۱}+r_{i۲}+r_{i۳}=a_{i۱}a_{۱۱}+a_{i۱}a_{۲۱}+a_{i۱}a_{۳۱}$$
$$\sum_i rij=a_{i۱}(a_{۱۱}+a_{۲۱}+a_{۳۱})=a_{i۱}\sum_i a_{i۱}$$

از این رو $a_{i1}=\Sigma_j r_{ij}\div\Sigma_i ai1$. و با توجه به این که $\Sigma_i a_{il}=T^{½}$ است، نتیجه می‌گیریم $a_{i1}=(\Sigma_j r_{ij})\div T^{½}$. این توجیه صوری محاسبه بارها روی عامل نخست است.

توجیه **هندسی** اشاره به نام « شیوه مرکز ثقل» دارد. ما متغیرهای مورد نظر را به عنوان سه بردار در فضای عامل‌های متعامد در نظر می‌گیریم. حداکثر تعداد عامل‌ها مسلماً معادل تعداد متغیرهاست (در این جا سه عامل).

در یک فضای دو عاملی $F_۱$ و $F_۲$، دستگاه مختصات برای این سه متغیر به صورتی است که در شکل ۸-۹ نشان داده شده است.

این دستگاه مختصات به لحاظ تعریفی، بارهای عاملی متغیرها بر عامل‌ها است. برای این منظور به بحث PCA رجوع می‌کنیم: بارهای عاملی، ضرایب رگرسیون یک تحلیل رگرسیون با متغیرها به عنوان متغیرهای وابسته و عامل‌ها به عنوان متغیر مستقل (الگوی عاملی) هستند، که در این حالت معادل ضرایب همبستگی بین متغیرها و عامل‌ها (ساختار عاملی) می‌باشند؛ زیرا عامل‌ها مایل هستند. این بارهای a_{ij} ناشناخته‌ها هستند، معنای آن این است که محورهای عاملی (موقتاً به صورت F_1' و F_2' نشان داده شده‌اند) هنوز تثبیت نشده‌اند. در قطر روش $F_۱$ با متغیر $X_۱$ برابر شده است. در شکل به این معنا ست که محور $F_۱$ از مبدأ به سمت نقطه X_1 (= نقطه انتهایی بردار X_1) امتداد خواهد یافت. در هر حال در شیوه مرکز ثقل محور $F_۱$ به‌گونه‌ای انتخاب می‌شود که از مرکزیت بگذرد، همان‌طور که از نام آن بر می‌آید. در این شکل، مرکزیت یعنی نقطه‌ای که میانگین‌ها به هم می‌رسند، به وسیله یک ستاره ❋ مشخص شده است:



شکل ۸-۹ دستگاه مختصات سه متغیر مورد نظر

$$* = (\frac{۱}{۳}\Sigma ai۱ : \frac{۱}{۳}\Sigma ai۲)$$
$$= (\frac{a_{۱۱} + a_{۲۱} + a_{۳۱}}{۳} : \frac{a_{۱۲} + a_{۲۲} + a_{۳۲}}{۳})$$

مختصـــات مرکزیت روی عامل‌های دیگر (در این‌جا تنها $F_۲$) برابر صـــفر خواهد بود. در مثال ما، با محورهای $F_۱$ و $F_۲$ به عنوان دســـتگاه مرجع، مقدار $\Sigma_{ai۲} = a_{۱۲} + a_{۲۲} + a_{۳۲}$ در واقع معادل صفر است. اگر این را در فرمول اصلی $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{a_1 a_1'}$ جایگزین کنیم، همان نتیجه‌ی بالا را برای بارهای عاملی روی عامل نخست به دست خواهیم آورد: $a_{i1} = (\Sigma_j r_{ij}) \div T^{½}$.

با گذر از منطق شــیوه مرکز ثقل، صـوری و هندســی، ما اکنون می‌توانیم محاســبات مورد نظر را پی بگیریم. بارهای روی عامل اوّل از تقسیم هر مجموعه ردیف ماتریس همبستگی تقلیل یافته بر $T^{½}$ به دست می‌آیند:

$$\mathbf{a}_۱ = \begin{bmatrix} ۱.۹۲۰ \div (۴.۱۴۰)^{۱/۲} \\ ۰.۲۵۶ \div (۴.۱۴۰)^{۱/۲} \\ ۱.۹۶۴ \div (۴.۱۴۰)^{۱/۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰.۹۴۴ \\ ۰.۱۲۶ \\ ۰.۹۶۵ \end{bmatrix}$$

از انی معادله، اوّلین بازسازی $\overline{\mathbf{R}}$ مشتق می‌شود:

$$\mathbf{a_1a'_۱} = \begin{bmatrix} ۰.۹۴۴ \\ ۰.۱۲۶ \\ ۰.۹۶۵ \end{bmatrix} (۰.۹۴۴ \quad ۰.۱۲۶ \quad ۰.۹۶۵) = \begin{bmatrix} ۰.۹۸۱ & ۰.۱۱۹ & ۰.۹۱۱ \\ ۰.۱۱۹ & ۰.۰۱۶ & ۰.۱۲۲ \\ ۰.۹۱۱ & ۰.۱۲۲ & ۰.۹۳۱ \end{bmatrix}$$

این معادله اولین ماتریس همبستگی باقیمانده را به دست می‌دهد:

$$\mathbf{R_1} = \overline{\mathbf{R}} - \mathbf{a_1a'_۱} = \begin{bmatrix} ۰.۰۴۱ & -۰.۰۶۳ & ۰.۰۲۱ \\ -۰.۰۶۳ & -۰.۰۸۴ & -۰.۰۲۲ \\ ۰.۰۲۱ & -۰.۰۲۲ & ۰.۰۰۱ \end{bmatrix}$$

توجه دا شته با شید که مجموع هر ردیف (یا هر ستون) برابر صفر ا ست، چون همب ستگی‌های مثبت و منفی متوازن شـــده‌اند. در نتیجه، دیگر شـــیوه جمع را نمی‌توان به کار برد. بنابراین ما همبســـتگی‌های منفی را به کمترین تعداد کاهش می‌دهیم. فرایندی به نام «باز تاب» را به کار می‌بریم. در قســـمت فوق با معکوس کردن متغیر $X_۳$ همه همبســـتگی‌ها را مثبت کردیم. در مراحل بعدی شـــیوه‌های مرکز ثقلی، حقّه فنی را به کار می‌بریم. برای هر متغیر، مجموع همبســـتگی‌های مثبت با سایر متغیرها را تعیین می‌کنیم (S^+) و (مقدار مطلق) مجموع همب ستگی‌های منفی با سایر متغیرها (S^-) را حســـاب کرده و آن متغیر را برای هر $S^- - S^+$ که دارای بزرگترین مقدار اســـت بازنمایی می‌کنیم (مقدار کل را در قطر اصـــلی نادیده می‌گیریم)؛ این روند را به طور متوالی تکرار می‌کنیم تا جایی‌که همه مقادیر $S^- - S^+$ منفی باشـــند یا این که دیگر تقلیل علائم منفی ممکن نباشد.

این کار در مثال اختصاری ما خیلی ساده است. در نگاه اول می‌توانیم ببینیم که بازنمایی متغیر $X_۲$ همه همبســـتگی ها را مثبت خواهد کرد. اگر شـــیوه بازنمایی را به کار ببریم، مقادیر: ۰/۰۴۲=۰/۰۲۱:/-۰/۰۶۳-۰، ۰/۰۸۵=۰-۰/۰۸۵-۰و۰/۰۰۱=۰/۰۲۱-۰/۰۲۲-۰ به ترتیب برای سه متغیر به دست می آیند. مقدار $X_۲$ در واقع بیشترین مقدار است.

روش کار به سبک مشابهی است:

$$\mathbf{R}_۱ = \begin{bmatrix} ۰.۰۴۱ & ۰.۰۶۳ & ۰.۰۲۱ \\ ۰.۰۶۳ & ۰.۰۸۴ & ۰.۰۲۲ \\ ۰.۰۲۱ & ۰.۰۲۲ & ۰.۰۰۱ \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \Sigma r_{۱j} = ۰.۱۲۵ \\ \Sigma r_{۲j} = ۰.۱۶۹ \\ \underline{\Sigma r_{۳j} = ۰.۰۴۴} \\ \quad ۰.۳۳۸ \end{array}$$

$$\mathbf{a}_{۲}=\begin{bmatrix}۰.۱۲۵/(۰.۳۳۸)^{۱/۲}\\ ۰.۱۶۹/(۰.۳۳۸)^{۱/۲}\\ ۰.۰۴۴/(۰.۳۳۸)^{۱/۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰.۲۱۵\\ ۰.۲۹۱\\ ۰.۰۷۶\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2\mathbf{a}'_{۲}=\begin{bmatrix}۰.۲۱۵\\ ۰.۲۹۱\\ ۰.۰۷۶\end{bmatrix}(۰.۲۱۵\quad ۰.۲۹۱\quad ۰.۰۷۶)=\begin{bmatrix}۰.۰۴۶ & ۰.۰۶۳ & ۰.۰۱۶\\ ۰.۰۶۳ & ۰.۰۸۵ & ۰.۰۲۲\\ ۰.۰۱۶ & ۰.۰۲۲ & ۰.۰۰۶\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_2=\mathbf{R}_1-\mathbf{a}_2\mathbf{a}'_{۲}=\begin{bmatrix}-۰.۰۰۵ & ۰.۰۰۰ & ۰.۰۰۵\\ ۰.۰۰۰ & -۰.۰۰۱ & ۰.۰۰۰\\ ۰.۰۰۵ & ۰.۰۰۰ & -۰.۰۰۵\end{bmatrix}$$

همبستگی‌های باقی مانده خیلی کوچک هستند. بدین معنی که دو عامل کفایت می‌کند. نباید از وجود مقادیر منفی روی قطر اصلی که البته به لحاظ نظری غیرقابل قبول و ناممکن است نگران بود، زیرا به مقادیر اشتراک اختصاص دارند یعنی مقادیر مجذور که همیشه مثبت هستند. به طور ساده منظور این است که برآورد نخست مقادیر اشتراک به اشتباه صورت می گیرد. شیوه دیگری که گاهی استفاده می شود این است که مقادیر اشتراک در هر مرحله به اندازه کافی بزرگ برآورد می شوند، طوری که روی قطر اصلی ماتریس همبستگی باقی مانده‌ها دیگر مقادیر منفی قرار نمی‌گیرد. در هر حال همه اینها یک شکل آزمایش و خطا دارند. برتری تحلیل عامل با شیوه تعاملی ساختار آن، تا هنگام همگرایی مقادیر اشتراک، درا ینجا روشن می‌شود.

رویکرد دو عاملی ما طبق شیوه مرکز ثقل به ماتریس عاملی زیر منحصر می شود که متشکل از دو ستون $a_{۱}$ و $a_{۲}$ است:

$$A=\begin{bmatrix}۰.۹۴۴ & ۰.۲۱۵\\ ۰.۱۲۶ & ۰.۲۹۱\\ ۰.۹۶۵ & ۰.۰۷۶\end{bmatrix}$$

با توجه با این که ما از مدل PFA شروع کردیم، در این جا هم این مطلب که راه حل یک عاملی کفایت می‌کند صادق است. اگر بارهای روی عامل نخست را با بارهای تحلیل عامل اصلی مقایسه کنیم، خواهیم دید که شیوه دستی مرکز ثقل تورستن به شیوه‌های کامپیوتری امروزی بسیار نزدیک است.

۳-۳-۹ شیوه کمترین باقیمانده‌ها (MINERS)

در هر دو شیوه قطری و مرکز ثقل، مفهوم «ماتریس همبستگی باقی مانده‌ها» به کار رفته بود.

با شروع از فرمول اولیه $\mathbf{R}=\mathbf{AA}'$ در یک مرحله نخست، بارهای عاملی a_{i1} تعیین شدند و حاصلضرب $a_{i1}a_{j1}$ (از $\mathbf{AA}'$) به عنوان همبستگی‌های بازنمایی شده مورد بررسی قرار گرفت. اختلاف $\mathbf{R}=\mathbf{AA}'$ یک ماتریس $\mathbf{R}_1$ با عناصر $r_{ij}-a_{ij}a_{j1}$ حاصل کرد که اولین ماتریس همبستگی باقی‌مانده‌ها نامیده شد. اگر همه عناصر این ماتریس باقی‌مانده نزدیک صفر بود، این عمل خاتمه پیدا می‌کرد؛ اگر این عناصر باز هم قابل ملاحظه بودند معنایش این بود که تعداد عامل‌ها هنوز کم است و بنابراین مرحله اوّل تکرار شد تا ماتریس همبستگی باقی‌مانده دوّم $\mathbf{R}_2$ به دست آمد و به همین ترتیب این کار ادامه یافت.

معلوم است که هدف این شیوه کوچک کردن ضرایب همبستگی باقیمانده تا حد ممکن است. ازاین‌رو نام « شیوه کوچک‌ترین باقی‌مانده‌ها» برای دو شیوه مذکور نا به جا نبوده است. با این که در شیوه کمترین باقی‌مانده‌ها (MINERS) هم از اصل مشابهی پیروی می‌شود، اما با دو شیوه پیش تفاوت دارد، زیرا عناصر قطری ماتریس همبستگی (اندازه‌های اشتراک) در محاسبه باقی مانده‌ها دخالت ندارند. به عبارت دیگر، روشی دنبال می‌شود که در آن عناصر قطر اصلی هر ماتریس همبستگی را کنار گذاشته و سایر عناصر در کوچکترین مقدار خود قرار دارند.

مدلی که ما با آن آغاز کردیم مدل $\mathbf{X}=\mathbf{FA}'+\mathbf{E}$ مربوط به PFA است. در فرمول اولیه $\mathbf{R}=\mathbf{AA}'$ عناصر قطری در $\overline{\mathbf{R}}$ و همچنین $\mathbf{AA}'$ حذف شده‌اند:

$$\mathbf{R}-\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1 & r_{12} & r_{13}\\ r_{21} & 1 & r_{23}\\ r_{31} & r_{32} & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & r_{12} & r_{13}\\ r_{21} & 0 & r_{23}\\ r_{31} & r_{32} & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AA}'-\mathbf{diag(AA')}=\begin{bmatrix}h_1^2 & \hat{r}_{12} & \hat{r}_{13}\\ \hat{r}_{21} & h_2^2 & \hat{r}_{23}\\ \hat{r}_{31} & \hat{r}_{32} & h_3^2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}h_1^2 & 0 & 0\\ 0 & h_2^2 & 0\\ 0 & 0 & h_3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \hat{r}_{12} & \hat{r}_{13}\\ \hat{r}_{21} & 0 & \hat{r}_{23}\\ \hat{r}_{31} & \hat{r}_{32} & 0\end{bmatrix}$$

هر همبستگی بازنمایی شده $\hat{r}_{ij}$ معادل مجموع حاصل‌ضرب‌های بارهای عاملی است:

$$\hat{r}=a_{i1}a_{j1}+a_{i2}a_{j2}+\ldots+a_{im}a_{jm}=\sum_{p=1}^{m}a_{ip}a_{ij} \quad (\text{برای } m \text{ عامل})$$

تفاوت‌های بین همبستگی‌های اولیه r_{ij} و همبستگی‌های بازنمایی شده از طریق بارهای عاملی $\hat{r}_{ij}$ (^ نشانه برآورد شدن) محاسبه و مجموع مجذورات این اختلاف‌ها تا حد ممکن کوچک شده است، یعنی تابع $f = \Sigma(r_{ij} - \Sigma a_{ip}a_{jp})^{۲}$ کمترین مقدار است. از آن جا که این تابع وابسته به تعداد همبستگی ها است $[n(n-۱) \div ۲$ که n تعداد متغیر هاست]، به جای خود f ترجیحاً $[۲f \div n(n-۱)]^{۱/۲}$ به کار می‌رود. بارهای عاملی آن‌هایی هستند که این تابع برای آن‌ها به یک حداقل می‌رسد. ماتریس قطری اندازه‌های اشتراک به روش مشابهی از این بارهای عاملی به دست می‌آید.

این شیوه در این جا به طور کامل طرح نمی‌شود، چون مراحل تکراری زیادی در آن وجود دارد. یک ماتریس موقتی $\mathbf{A}$ را برای شروع در نظر می‌گیریم و برای هر ردیف $\mathbf{A}$ مقداری را به هر بار عاملی اضافه می‌کنیم، به نحوی که تابع f در حداقل باشد. بارهای عاملی جدید به یک ماتریس همبستگی بازنمایی شده جدید (بدون عناصر قطری) می‌انجامد. سپس تابع $f = \Sigma(r_{ij} - \hat{r}_{ij})^{۲}$ را به حداقل رسانده و این کار ادامه می‌یابد. این روند تکراری ادامه پیدا می‌کند تا وقتی‌که بارها همگرا شوند.

جهت اطلاع از جزئیات بیشتر در این باره شامل موارد هیوود[1] (که در آن اشتراک بزرگتر از ۱ است) به هرامن و جونز (۱۹۶۶) مراجعه کنید. برخلاف شیوه‌های قطری و مرکز ثقل که صرفاً ارزش تاریخی دارند، MINERS یک شق واقعی برای اغلب تحلیل عامل‌های اصلی امروزی است.

۴-۳-۹ تحلیل عامل کانونی (متعارف)

شیوه هوشمندانه دیگر جهت به دست آوردن یک راه‌حل عاملی تحلیل عامل کانونی یا متعارف (CFA) است.

واژه «کانونی یا متعارف» به وضوح از تحلیل همبستگی کانونی هاتلینگ ریشه می‌گیرد. در محاسبه همبستگی کانونی دو (یا چند) مجموعه از متغیرها مورد بررسی قرار می‌گیرند و برای هر مجموعه یک ترکیب خطی جستجو می‌شود به شیوه‌ای که همبستگی (کانونی) بین این ترکیبات خطی حداکثر باشد.

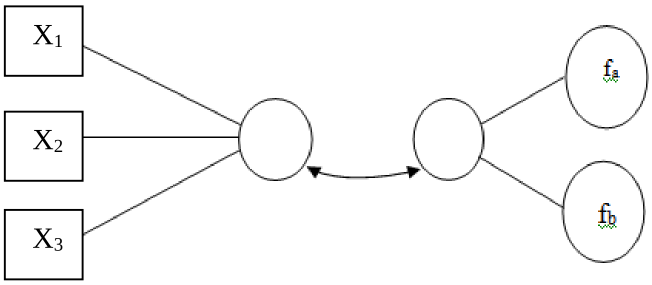
خاصیت اصلی CFA این است که یک شیوه موازی در آن دنبال می‌شود.

به طور نمونه مجموعه داده‌های اختصاری قبلی با سه متغیر (فرضی و در واقع بسیار کوچک) را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که مدل PFA با دو عامل (مصاحبت و توافق) برقرار است. سپس در CFA، سه متغیر به عنوان مجموعه نخست X در دو عامل به عنوان مجموعه دوم f در نظر گرفته

1. Heywood

و بین این دو مجموعه یک تحلیل همبســتگی کانونی به عمل می آوریم، به نحوی که در شــکل ۹-۹ نشان داده شده است.

برای مجموعه X و نیز مجموعه f یک ترکیب خطی به گونه‌ای ترتیب داده می‌شــود که همبستگی (کانونی) بین دو ترکیب در بیشترین حد ممکن باشد. بر این اساس، ماتریس همبستگی ارائه شده در جدول ۳-۹ آزمایش می‌شود.



شکل ۹-۹ طرح تحلیل عامل کانونی (CFA)

در این ماتریس، همبســـتگی‌های بین متغیرها و عامل‌ها، بارهای عاملی هســـتند $(\mathbf{R}_{xf} = \mathbf{A})$. همبســتگی‌های بین عاملی، ماتریس همســانی را تشــکیل می‌دهند، چون فرض می‌شــود که عامل‌ها ناهمبسته هستند $(\mathbf{R}_{ff} = \mathbf{I})$. در محاسبه همبستگی کانونی، ساختار ویژه ماتریس $\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy}\mathbf{R}_{yy}^{-1}\mathbf{R}_{yx}$ مورد برر سی قرار می‌گیرد. اگر این را در تحلیل عامل کانونی اعمال کنیم که در آن مجموعه y اکنون مجموعه f می‌باشــد، این ماتریس می‌شــود $\mathbf{R}_{xx}^{1}\mathbf{R}_{xy}\mathbf{R}_{ff}^{-1}\mathbf{R}_{fx} = \mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{AIA}' = \mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{AA}'$. معادله ویژه و معادله حاصله به ترتیب عبارتند از : $\left|\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{AA}' - \lambda\mathbf{I}\right| = \mathbf{0}$ و $\mathbf{R}_{xx}^{-2}\mathbf{AA}' - \lambda\mathbf{I})\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

جدول ۳-۹ ماتریس همبستگی

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & x_۱ & x_۲ & x_۳ & f_a & f_b \\
\hline
x_۱ & ۱ & r_{۱۲} & r_{۱۳۱} & r_{۱a} & r_{۱b} \\
x_۲ & r_{۲۱} & ۱ & r_{۲۳} & r_{۲a} & r_{۲b} \\
x_۳ & r_{۳۱} & r_{۳۲} & ۱ & r_{a۳} & r_{۳b} \\
f_a & r_{a۱} & r_{a۲} & r_{a۳} & ۱ & ۰ \\
f_b & r_{b۱} & r_{b۲} & r_{b۳} & ۰ & ۱
\end{array}
= \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{xx} & \boldsymbol{R}_{xf} = \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{R}_{fx} = \boldsymbol{A}' & \boldsymbol{R}_{ff} = \boldsymbol{I} \end{bmatrix}
$$

در این فرمول λ نشـــان‌دهنده ارزش ویژه یعنی یک مجذور همبســـتگی کانونی بین مجموعه x مجموعه f، و b علامت یک بردار ویژه ا ست. در ادامه همه اینها در عمل تو ضیح داده می شوند. البته ماتریس $\mathbf{A}$ ناشناخته است، چنان که بارهای عاملی، کمیت‌های بسیاری هستند که ما در جستجوی آن‌ها هستیم. در هر حال، $\mathbf{AA}'$ را می‌توان به عنوان ماتریس همبستگی $\overline{\mathbf{R}}_{xx}$ با اندازه‌های ا شتراک بر روی قطر اصـــلی برآورد کرد. به جای ا ندازه های اشـــتراک h^2 می‌توان وار یانس انحصـــاری $u^۲ = ۱ - h^۲$ را هم برآورد کرد. به عبارت دیگر $\overline{\mathbf{R}}_{xx}$ نیز معادل $\mathbf{R}_{xx} - \mathbf{U}^2$ اســـت که در آن U یک ماتریس قطری با واریانس‌های عامل‌های انحصـــاری اســـت. بدین صـــورت معادله ماتریس چنین خواهد بود:

$$[\boldsymbol{R}_{xx}^{-۱}(\boldsymbol{R}_{xx} - U^۲) - \lambda I]b = ۰$$

بدین‌سان:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{R}_{xx}^{-1}(\mathbf{R}_{xx} - \mathbf{U}^2)\mathbf{b} = \lambda\mathbf{I}\mathbf{b} \\
&\mathbf{R}_{xx}\mathbf{R}_{xx}^{-1}(\mathbf{R}_{xx} - \mathbf{U}^2)\mathbf{b} = \mathbf{R}_{xx}\lambda\mathbf{I}\mathbf{b} \\
&\overline{\mathbf{R}}_{xx}\mathbf{b} = \lambda\mathbf{R}_{xx}\mathbf{b} \\
&\overline{\mathbf{R}}_{xx}\mathbf{b} = \lambda(\overline{\mathbf{R}}_{xx} + \mathbf{U}^2)\mathbf{b} \quad \text{زیرا} \quad \mathbf{R}_{xx} = \overline{\mathbf{R}}_{xx} + \mathbf{U}^2 \\
&\qquad \overline{\mathbf{R}}_{xx}\mathbf{b} - \lambda\overline{\mathbf{R}}_{xx}\mathbf{b} = \lambda\mathbf{U}^2\mathbf{b} \\
&\qquad (1-\lambda)\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}\mathbf{b} = \lambda\mathbf{U}^2\mathbf{b} \\
&\qquad \overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}\mathbf{b} = \frac{\lambda}{1-\lambda}\mathbf{U}^2\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

فرض کنید:

$$\lambda/(1-\lambda) = v \text{ and } \mathbf{Ub} = \mathbf{q}(\text{or } \mathbf{b} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{q}):$$

$$\overline{\mathbf{R}}_{xx}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{q} = v\mathbf{Uq}$$

با ضرب سمت چپ تساوی در U^{-1} خواهیم داشت:

$$\mathbf{U}^{-1}\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{q} = v\mathbf{q}$$
$$(\mathbf{U}^{-1}\overline{\mathbf{R}}_{xx}\mathbf{U}^{-1} - v\mathbf{I})\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

این همان معادله ماتریسی است که می‌توان آن‌را در عمل به کار برد. U شامل ریشه دوّم واریانس‌های انحصاری u^2 است و $\overline{\mathbf{R}}_{xx}$ ماتریس همبستگی است که عناصر $1-u^2$ در آن اکنون در قطر اصلی وارد می‌شوند.

تحلیل ساختار ویژه $u^{-1}\overline{\mathbf{R}}_{xx}\mathbf{U}^{-1}$ ارزش‌های ویژه v و بردار ویژه $\mathbf{q}$ را به دست می‌دهد که از آن می توان λ و b را محاسبه کرد. اگر ارزش‌های ویژه v در یک ماتریس قطری $\mathbf{\Lambda}$ و بردارهای ویژه q در یک ماتریس $\mathbf{Q}$ جمع گردند، آنگاه معادله $\mathbf{U}^{-1}\overline{\mathbf{R}}_{xx}\mathbf{u}^{-1}\mathbf{q} = v\mathbf{q}$ به صورت $\mathbf{U}^{-1}\overline{\mathbf{R}}_{\mathbf{xx}}\mathbf{u}^{-1}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda Q}$ در می‌آید. با ضرب سمت چپ معادله در $\mathbf{U}$ و سمت راست آن در $\mathbf{Q}'$ و $\mathbf{U}$ خواهیم داشت:

$$\overline{\mathbf{R}}_{xx} = \mathbf{UQ\Lambda Q'U}$$

(با $\mathbf{Q'Q} = \mathbf{I}$ در صورتی که بردارهای ویژه بهنجار باشند)

$$\overline{\mathbf{R}}_{xx} = (\mathbf{UQ\Lambda}^{1/2})(\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{Q'U})$$
$$\overline{\mathbf{R}}_{xx} = (\mathbf{UQ\Lambda}^{1/2})(\mathbf{UQ\Lambda}^{1/2})'$$

و از آن جا که $\overline{\mathbf{R}}_{xx} = \mathbf{AA}'$، می‌توان دریافت بارهای عاملی:

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{UQ\Lambda}^{1/2}}$$

می‌توان نشان داد که این بارهای عاملی‌از مقیاس‌بندی دلخواه متغیرهای مشاهده شده، تأثیر نمی‌پذیرند (وان دی گیر ۱۹۷۱، ص ۱۷۹).

آنچه که در این جا نشان دادیم مرحله اوّل را تشکیل می‌دهد. رائو[1] یک شیوه تکراری طرح کرد که در آن $\mathbf{U}^2$ در مرحله اوّل براساس تعداد معینی از عامل‌ها برآورد می‌شود. پس از محاسبه ماتریس عامل $\mathbf{A}$ ماتریس همبستگی جمعیتی برآورد می‌شود و از آن برآورد جدیدی از $\mathbf{U}^2$ حاصل می‌شود و این کار ادامه پیدا می‌کند تا وقتی‌که برآورده‌های پایدار $\mathbf{U}^2$ به دست آیند.

۹-۳-۵ شیوه حداکثر درست نمایی

1. Rao 2-Maximum Likelihood method

شیوه حداکثر درست نمایی (ML) اولین چیزی است که با آمار استنباطی واقعی سر وکار دارد، زیرا تمایز روشنی بین نمونه و جمعیت برقرار می‌سازد. شیوه‌های قبلی در واقع برای آزمون‌های معناداری مدل یا تعداد عامل‌های دربردارنده، ارائه شده‌اند مثل آزمون بارتلت که در PCA نشان داده شد، امّا تنها متوجه آزمون‌های تک کاره[۳] هستند که آزمون‌های تعیین بارهای عاملی مجزّا می‌گردند. در مقابل در شیوه ML (حداکثر درست نمایی) تمایز بین همبستگی‌های درونی نمونه و همبستگی‌های درونی (فرضی) جمعیت از ابتدا طرح شده است و این تمایز، در کل فرایند برآورد حفظ می‌شود.

در مدل PFA، $X = FA' + E$ به عنوان نقطه شروع عمل می‌کند، امّا این مدل اکنون متوجه جمعیت بوده و عناصر A در این جا بارهای عاملی جمعیت هستند. پارامترهای جمعیتی به طریقی برآورد می‌شوند که داده‌های نمونه‌ی مشاهده شده کمتر تعجب‌انگیز (بیشتر مشابه) می‌باشند.

مفهوم **درست نمایی** باید ابتدا توضیح داده شود. درست نمایی به معنای احتمال نتایج حاصل از نمونه به پارامترهای جمعیت است. به عنوان مثال یک متغیر X را در نظر بگیرید. فرض کنید X در جمعیت دارای توزیع نرمال بوده و پارامترهای آن μ و σ هستند (میانیگن و انحراف معیار). آنگاه احتمال این که یک فرد i که به طور تصادفی انتخاب شده، نمره X_i را در متغیر X به دست آورد، معادل درست نمایی نمره‌ی X_i برای μ و σ است. چنانچه تمام مشاهدات X_i مستقل از یکدیگرند در نظر گرفته شوند، در این صورت درست نمایی نظیر آن‌ها معادل حاصل‌ضرب این احتمالات منفرد است، یعنی $\Pi p(Xi|\mu,\sigma)$. این حاصل ضرب را تابع درست نمایی، L می‌نامند و نشان‌دهنده‌ی درست‌نمایی همه داده‌های X_i نمونه (با هم) درباره پارامترهای جمعیتی μ و σ است. البته پارامترهای جمعیت ناشناخته‌اند، امّا اگر بخواهیم می‌توانیم ارزش‌های مختلفی از μ و σ فراهم کرده و مقدار تابع درست‌نمایی L را برای هر یک حساب کنیم. ارزش‌های μ و σ که برای آن‌ها L بیشترین مقدار باشد برآوردهای حداکثر درست‌نمایی نامیده می شوند، همان‌گونه که از اسم آن بر می‌آید.

در عمل، خود L محاسبه نمی‌شود، بلکه لگاریتم آن حساب می‌شود:

برای به دست آوردن بینش واقعی درباره مفهوم درست‌نمایی، بایستی آن را با مفاهیم نظریه بایس[۱] راجع به احتمال پیشین و پسین مقایسه کنیم. در درست‌نمایی، احتمال داده‌های نمونه در باره داده‌های جمعیت است. از آن‌جا که داده‌های جمعیتی فرضی هستند، به مفاهیم احتمال داده‌ها (D)، با فرض معین (H) اشاره دارد، یعنی $p(D|H)$. البته در قضیه‌ی بایس، به جای $p(D|H)$، فرض $P(H|D)$ محاسبه می شود. منظور این است که محقق می‌خواهد در پرتو داده‌های مشاهده شده به بررسی میزان احتمال یک فرض بپردازد نه برعکس.

میزان احتمال به صورت زیر تعیین می‌گردد.

1-Bayes ,Theorem

می‌دانیم که

$$P(HD) = P(H)P(D|H)$$

و

$$P(HD) = P(D)P(H|D)$$

در نتیجه

$$P(D)P(H|D) = P(H)P(D|H)$$

با توجه با این که $p(\mathrm{D})$ در واقع یک مقدار ثابت اســـت، از این رو ما فقط یک نمونه داریم و بنابراین داده‌ها ثابت هســـتند، به این خاطر، مقدار ثابت حذف و علامت = با علامت احتمال $\propto$ جایگزین می‌شود، یعنی: «برابر است با استثنای یک عامل ضربی ».

سپس $P(H|D) \propto p(H)p(D|H)$ را به دست می‌آوریم که قضیه بایس است.

عبارت $\mathrm{P(H)}$ احتمال پیشین است، یعنی احتمال این که فرضیه بدون توجه به داده‌ها درست باشد. عبارت $p\ (H|D)$ احتمال پسین است که معنای آن احتمال درستی فرضیه با توجه به داده‌ها است (پس از اطلاع از داده‌ها). عبارت $P(D|H)$ درست نمایی داده‌ها ست، یعنی احتمال داده‌ها با توجه به فرضـــیه مورد نظر. این همان میزان درســـت‌نمایی اســـت که در شـــیوه ML (حداکثر درست‌نمایی) مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اگر این مفهوم درســـت‌نمایی را در تحلیل چند متغیره به کار ببریم، وضـــعیت به طورطبیعی پیچیده‌تر می‌شود.

در قســـمت قبلی فرض گرفتیم که X در جمعیت، توزیع بهنجار دارد. برای متغیرهای بیشـــتر چنین فرض می‌کنیم که آن‌ها یک توزیع بهنجار را تشکیل می‌دهند، در این حالت بیش از دو پارامتر جمعیت وجود خواهد داشـــت: میانگین‌ها، واریانس‌ها و همچنین کوواریانس‌ها. همه این پارامترهای جمعیتی را می‌توان در یک ماتریس به نام ماتریس کوواریانس جمعیت Σ جمع کرد.

زمانی‌که متغیرها استاندارد شده‌اند این ماتریس همبستگی جمعیت خواهد بود (فرض استاندارد بودن متغیرها ضروری نیست، زیرا شیوه‌های ML را روی Σ هم می‌توان اعمال کرد.)

در این وضعیت پیچیده، تابع درست‌نمایی L درستنمایی‌های ماتریس‌های همبستگی نمونه جهت ماتریس‌های جمعیت را نشـــان می‌دهد. در شـــیوه ML پارامترهای جمعیت به طریقی برآورد می‌شوند که L تا حد امکان بالاتر باشد، یعنی آن‌ها برآوردهای حداکثر درست‌نمایی هستند.

برای به دســت آوردن بارهای عاملی (عناصـر $\mathbf{A}$) یک روش تعاملی مورد نیاز اســت. با توجه به میزان زیاد محاسبات درگیر در این روش، بهتر است محاسبات با کامپیوتر انجام گیرد. در این جا نیز از فرمول پایه‌ی مشابهی استفاده می شود $(\mathbf{R} = \mathbf{AA'} + \mathbf{U}^2)$ امّا حالا برآوردکننده‌های جمعیتی مد نظر هستند.

شیوه ML تمام امتیازات سایر شیوه‌های معقول را داراست (پیش‌بینی موارد Heywood، آزمون تعداد عامل‌ها و غیر آن).

این شیوه مشابه CFA است که در آن بارهای عاملی از مقیاس‌بندی دلخواه متغیرهای اولیه تأثیر می پذیرند (لاولی، ۱۹۴۰). در حقیقت دلیل اینکه چرا هم Σ و هم R را می‌توان به کار برد همین است.

بد نیست یادآور شویم که رابطه نزدیکی بین تحلیل عامل کانونی (CFA) و شیوه حداکثر درست‌نمایی (ML) وجود دارد.

این رابطه را به یک سبک قیا سی می‌توان نشان داد. هدف CFA یافتن بیشترین همبستگی (کانونی) بین متغیرهای مورد مشاهده و عامل‌ها است. از آن جا که ماتریس همبستگی تقلیل یافته $\mathbf{R}-\mathbf{U}^2$ مورد استفاده قرار می‌گیرد، عامل‌ها از خطای نمونه بری هستند، مشروط به این که واریانس‌های انحصاری ($\mathbf{U}^2$) معلوم باشند. امّا با توجه به این که $\mathbf{U}^2$ به ندرت معلوم می‌باشد، شیوه ML یک نسخه پیشرفته از CFA را ارائه می‌کند، زیرا سؤال از خطاهای نمونه به طور نظام یافته‌ای با این روش درآمیخته است.

شیوه ML عمدتاً مدیون کارهای ژورسکوک و قابلیت‌های فزاینده کامپیوتری است. یک برتری این روش که نباید دست کم گرفته شود، این است که اگر تعداد عامل‌ها از ابتدا ثابت باشد، میزان انطباق راه‌حل ML توسط میانگین‌های آزمون χ^2 قابل سنجش است. این موضوع اغلب در کاربردهای تحقیقاتی نادیده گرفته می‌شود.

۶-۳-۹ تحلیل عامل آلفا

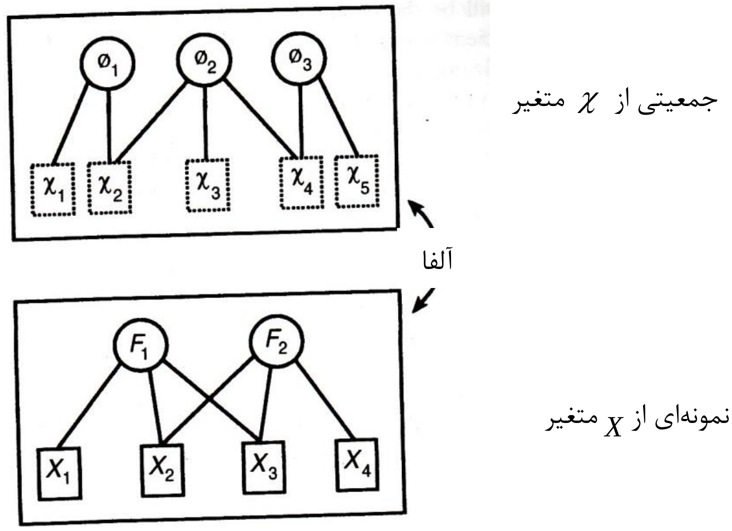
در تحلیل عامل آلفا باز هم با نقطه نظر جدیدی سر وکار داریم. در این جا نقش متغیرها و واحدهای ماتریس داده‌ها ، جا به جا می شوند. در دیدگاه کلا سیک (سنتی) یک نمونه همواره یک مجموعه از «واحدها» است که از جمعیتی از «واحدها» نمونه‌گیری شده است، و تعداد متغیرها ثابت است. ما اکنون این استدلال را وارونه می‌سازیم. ما تعداد افراد را ثابت گرفته و مجموعه «متغیرها» را به عنوان نمونه‌ای از جمعیت «متغیرها» در نظر می‌گیریم.

برای فهم این که در این جا چه اتفاقی می‌افتد، می‌توان تصور کرد که یک گروه اشخاص ممکن است در معرض تعداد نامحدودی آزمون قرار گیرند، امّا فقط n بار آزمون شوند. در این صورت، تعداد n آزمون نمونه‌ای از یک جمعیت نامحدود آزمون‌ها را تشکیل می‌دهد. با در نظر گرفتن یک سیاهه (پرسشنامه) می‌توان تصور کرد که n سؤال یک پرسشنامه روی یک آزمون واحد، تنها یک نمونه از تعداد نامحدودی از دسته‌های سؤالات را تشکیل می‌دهند.

از این نقطه نظر بر می‌آید که دو نوع تحلیل عامل می‌توان در نظر گرفت، یکی روی نمونه‌ای از X متغیر و دیگری روی جمعیتی از x متغیر (حروف یونانی معرف علائم جمعیتی هستند). عامل‌های مشترک X متغیر در نمونه به صورت F و در x متغیر جمعیت به صورت ϕ نشان داده می‌شوند. دو نوع تحلیل عامل مورد نظر در شکل ۱۰-۹ به تصویر کشیده شده است (در این شکل متغیرهای x به وسیله مربع‌هایی با خطوط بریده نشان داده شده‌اند، زیرا همه آن‌ها اندازه‌گیری نشده‌اند).

در تحلیل عامل آلفا عامل‌های F به طریقی تعیین می‌شوند که مجذور همبستگی با عامل‌های ϕ متغیرهای جمعیتی نظیر آن تا حد امکان بزرگ باشد. این (مجذور) همبستگی بین ϕ وF ضریب آلفای α کرونباخ (۱۹۵۱) نامیده می شود که دلیل نامگذاری تحلیل عامل آلفا می‌با شد. این ضریب آلفا را به سبک زیر می‌توان نوشت. به خاطر دارید که یک مجذور، ضریب همبستگی بخش مربوط به واریانس تبیین کننده را بیان می‌کند و معادل (مجذور) کوواریانس است که براساس واریانس‌های هریک از متغیرها تصحیح شده است:

$$r_{xy}^2 = \frac{[\mathrm{cov}.(x.y)]^2}{(cavx)(\mathrm{var}\ \ y)}$$



شکل ۱۰-۹ دو تحلیل عامل در تحلیل عامل آلفا

در تحلیل عامل آلفا عامل‌های F به طریقی تعیین می‌شوند که مجذور همبستگی با عامل‌های ϕ متغیرهای جمعیتی نظیر آن تا حد امکان بزرگ باشد. این (مجذور) همبستگی بین ϕ و F ضریب آلفای α کرونباخ (۱۹۵۱) نامیده می‌شود که دلیل نامگذاری تحلیل عامل آلفا می‌باشد. این ضریب آلفا را به سبک زیر می‌توان نو شت. به خاطر دارید که یک مجذور، ضریب همبستگی بخش

مربوط به واریانس تبیین کننده را بیان می‌کند و معادل (مجذور) کوواریانس اســـت که براســـاس واریانس‌های هریک از متغیرها تصحیح شده است:

$$r_{xy}^{۲} = \frac{\left[\operatorname{cov}.(x.y)\right]^{۲}}{(cavx)(\operatorname{var}\ y)}$$

برای عامل‌های $\mathbf{F}$ و عامل‌های $\boldsymbol{\varphi}$ نظیر آن، کوواریانس‌ها برابر $\mathbf{F}'\boldsymbol{\varphi}/m$ و واریانس‌ها $\mathbf{F}'\mathbf{F}/m$ و $\boldsymbol{\varphi}'\boldsymbol{\varphi}/m$ هستند (که m معرف تعداد افراد ا ست). معنایش این ا ست که ضریب α چنین خواهد بود:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{[\mathbf{F}'\boldsymbol{\varphi} \div \mathbf{m}]^2}{(\mathbf{F}'\mathbf{F} \div \mathbf{m})(\boldsymbol{\varphi}'\boldsymbol{\varphi} \div \mathbf{m})} = \frac{(\mathbf{F}'\boldsymbol{\varphi})^2}{(\mathbf{F}'\mathbf{F})(\boldsymbol{\varphi}'\boldsymbol{\varphi})}$$

هدف، این است که عامل‌هایی از $\mathbf{F}$ انتخاب شوند که α برای آن‌ها حداکثر باشد. ضریب α نشان می‌دهد که چه بخشی از واریانس $\boldsymbol{\varphi}$عامل (متغیر جمعیت) توسط عامل‌های $\mathbf{F}$ (متغیر نمونه) توضیح داده می‌شود. بنابراین، α مقیاس تعمیم‌پذیری متغیرهاست که گاهی پایایی خوانده می‌شود. از این رو به حداکثر رســاندن α به معنای محاســبه بیشــترین پایایی اســت که از متغیرهای اولیه می‌توان به دست آورد.

عامل‌های $\mathbf{F}$ ترکیبات خطی از متغیرهای x هستند، از این رو: $\mathbf{F{=}XW}$، که $\mathbf{W}$ بردار وزن‌ها اســت (ضــرایب رگرســیون). به همین ترتیب برای جمعیت داریم $\boldsymbol{\varphi} = \chi\boldsymbol{\omega}$(حروف یونانی معرف جمعیت اســت). با این همه اگر این مقدار را هم در فرمول بالا مربوط به α قرار دهیم، کاری از پیش نخواهیم برد چون فقط X معلوم ا ست. نتیجه اینکه ما بای ستی فرض‌هایی را پایه‌گذرای کنیم. چنین فرض می شود که کوواریانس‌های بین متغیرهای نمونه و جمعیت (عناصر $\mathbf{F}'\boldsymbol{\varphi}$) به طور متو سط برابر میانگین همســاز کوواریانس‌های نمونه (عناصــر غیر قطری $\mathbf{F}'\mathbf{F}$) و کوواریانس‌های جمعیتی (عناصــر غیر نظری $\boldsymbol{\varphi}'\boldsymbol{\varphi}$) است.

به عبارت دیگر $(\overline{\mathbf{F}'\boldsymbol{\varphi}})^2 = (\overline{\mathbf{F}}\ \ \bar{\bar{\mathbf{F}}})(\overline{\boldsymbol{\varphi}}\ \bar{\bar{\boldsymbol{\varphi}}})$، که – نشانه میانگین و ---- نشانه میانگین عناصر غیر قطری است.

از آن جا که $\mathbf{F{=}Xw}$ اشــاره به متغیرهای $\mathrm{n}X$ و $\boldsymbol{\varphi} = \chi\boldsymbol{\omega}$ اشــاره به تعداد بی شــماری از متغیرهای x دارد، فرمول α در قسمت فوق، قابل ساده شدن به صورت زیر است:

$$\mathbf{a} = \frac{(\mathbf{F}'\boldsymbol{\varphi})^2}{(\mathbf{F}'\mathbf{F})(\boldsymbol{\varphi}'\boldsymbol{\varphi})} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{F}'\mathbf{F}}\,\frac{(\mathbf{F}'\boldsymbol{\varphi})^2}{\boldsymbol{\varphi}'\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{F}'\mathbf{F}}\,\frac{(\mathbf{n}\infty)^2\,\overline{(\mathbf{F}'\boldsymbol{\varphi})^2}}{\infty^2\,\overline{(\boldsymbol{\varphi}'\boldsymbol{\varphi})}}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{F}'\mathbf{F}}\,\mathbf{n}^2\,\overline{\mathbf{F}}'\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{n}^2\,\frac{\overline{\mathbf{F}}\,\overline{\mathbf{F}}}{\mathbf{F}'\mathbf{F}} = \mathbf{n}^2\,\frac{\overline{\mathbf{w}}'\overline{\mathbf{X}}'\overline{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{w}}}{\mathbf{w}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{w}}$$

در مخرج $\mathbf{X'X}$ ماتریس همبستگی (ضربدر m) حاکی از آن است که متغیرها به شکل استاندارد شده، هستند. همچنین امکان به دست آوردن ماتریس همبستگی تقلیل یافته با اندازه‌های اشتراک روی قطر اصلی وجود دارد. درباره صورت کسر هم همین طور است، امّا در این جا یک میانگین ---- بکار رفته که تنها به عناصر خارج قطری اشاره دارد، یعنی $\mathbf{\overline{R}-H^2}$ (که $\mathbf{H}^۲$ ماتریس قطری اندازه‌های اشتراک است). و با توجه به این که n(n-۱) کوواریانس در محاسبات چنین --- میانگینی دخالت دارند، فرمول بدین صورت در می‌آید:

$$\mathbf{a = n^2 \frac{w'(\overline{R}-H^2)w/n(n-1)}{w'\overline{R}w}}$$

$$\mathbf{a = \frac{n}{n-1}\left(1-\frac{w'H^2w}{w'\overline{R}w}\right)}$$

جستجو برای بیشترین α به یافتن کمترین مقدار عبارت $\mathbf{w'H^2w/w'\overline{R}w}$ یا بیشترین نسبت معکوس آن $\mathbf{w'\overline{R}w/w'H^2w}$ خلاصه می شود. اگر قسمت دوم را معادل λ بگیریم فرمول به این صورت در می‌آید:

$$\alpha = \frac{n}{n-۱}(۱-\frac{۱}{\lambda})$$

بدین ترتیب α را همواره می‌توان به طور برگشتی محاسبه کرد. به حداکثر رساندن $\mathbf{\lambda = w'\overline{R}w/w'H^2w}$ طبق روش محاسباتی معروفی انجام می‌گیرد، یعنی تشکیل معادله ماتریس و معادله ویژگی نظیر آن. معادله ماتریس مربوطه (به عنوان تمرینی برای خواننده) بدین شرح است: $\mathbf{[H^{-1}\overline{R}H^{-1}-\lambda I]q=0}$ که همانند CFA در این جا نیز $\mathbf{q=H\,\omega}$ است (در CFA داشتیم $\mathbf{q=Ub}$). می‌توان مشاهده کرد که یک قیاس صوری درباره تحلیل عامل کانونی پدیدار شده است. تنها فرق این است که ماتریس $\mathbf{U^{-1}\overline{R}U^{-1}}$ که ساختار ویژه آن می‌بایستی آزموده شود، اکنون $\mathbf{H^{-1}\overline{R}H^{-1}}$ می‌باشد. واریانس‌های انحصاری ($\mathbf{U}$) با اندازه‌های اشتراک ($\mathbf{H}$) عوض شده‌اند.

همه این ها قابل فهم خواهد بود، اگر در نظر بگیریم تحلیل عامل آلفا با نمونه‌ای n متغیری از جمعیت بی‌شمار متغیرها در رابطه است. در نتیجه، ما بر بخش مشترک و نه انحصاری متغیرها تمرکز می‌کنیم. تحلیلی از جنبه واریانس‌های انحصاری، مؤلفه خطای هر متغیر را بازگو می‌کند و لذا به تعداد آزمودنی‌ها (m) وابسته است. از سوی دیگر یک تحلیل از جنبه اندازه‌های اشتراک به مؤلفه‌های مشترک اشاره دارد و قویاً وابسته به تعداد متغیرهاست (n).

این تحلیل را در محاسبه بارهای عاملی نیز می‌توان مشاهده کرد. در CFA داشتیم $\mathbf{A = UQ\Lambda^{1/2}}$. در تحلیل عامل آلفا، $\mathbf{U}$ با $\mathbf{H}$ جایگزین می‌شود: $\mathbf{A = HQ\Lambda^{1/2}}$.

در تحلیل عامل آلفا نیز همچون در CFA و ML این مطلب صادق است که بارها از مقیاس‌بندی دلخواه متغیرها تأثیر نمی‌پذیرند.

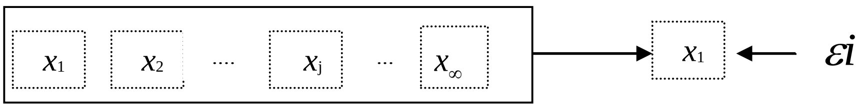
در این جا هم همچون سایر شیوه‌های تحلیل عوامل، اندازه‌های اشتراک بایستی در ابتدای کار برآورد گردند (تعبیر خوشبینانه‌ای از حدس زدن). کایزر و کافری (۱۹۶۵) یک شیوه تکراری را طرح کردند که تا رسیدن به همگرایی ادامه می‌یابد.

۷-۳- ۹ تحلیل انگاره[1]

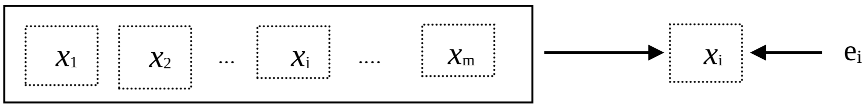
نظریه تحلیل عامل آلفا که در آن متغیرها به عنوان نمونه‌ای از جمعیت متغیرها به حساب می‌آیند، در مورد تحلیل انگاره گاتمن (۱۹۵۳) هم مصداق پیدا می‌کند.

«انگاره» یک متغیر x_i بخشی از آن متغیر است که با متغیرهای دیگر در آن سهیم می باشد. «ضد انگاره»[2] بخش انحصاری است که با سایر متغیرها تداعی نمی‌شود. انگاره و ضدانگاره به وسیله یک تحلیل رگرسیون چندگانه متغیر x_i به عنوان تابعی از همه متغیرهای دیگر محاسبه می‌شوند، یعنی، $X_i \sum_{j=1}^{n-1} bijX_j + e_i$ که در آن بخش پیش‌بینی شده ی $\hat{X}_i = \sum_{J=1}^{n-1} b_{ij} X_j$ معادل انگاره، و جمله خطا e_i معادل ضد انگاره سطح عمود بر آن است. بعضی پیش‌فرض‌ها در این رابطه عبارتند از: $Cov(e_i, X_j) = 0$ و $Cov(e_i, \hat{X}_i) = 0$.

تا این جا مفاهیم «انگاره» و «ضد انگاره» در تعابیر کلی خود به کار برده شدند. امّا گاتمن یک قدم فراتر گذاشته است. او بین نمونه‌ای از n متغیر و جمعیت بی‌شمار متغیرها تمایز قائل می‌شود، تمایزی که در تحلیل عامل آلفا توضیح داده شد. در نمونه متغیرها او به ترتیب از انگاره تفکیکی و ضد انگاره تفکیکی صحبت می‌کند. در مورد جمعیت متغیرها، او تمایز مشابهی بین انگاره کل و ضد انگاره کل قائل می‌شود. این تمایز را به صورت زیر می‌توان به تصویر کشید:



جمعیت شامل ∞ متغیر است. انگاره کل x_i عبارت است از $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_{ij} x_j$ و ضد انگاره کل x_i نیز εi است.



1-Image Analysis
2-Anti- Image

نمونه شـــامل n متغیر اســـت. انگاره تفکیکی x_i عبارت اســـت از $\sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} X_j$. ضـــدانگاره تفکیکی x_i نیز e_i است.

گاتمن نشان داد که اگر کل جمعیت متغیر در نظر گرفته شود مقادیر اشتراک هر متغیر X_i معادل مجذور ضریب همبستگی چندمتغیره با متغیرهای دیگر است. بنابراین بهترین برآورد از بخش مشـــترک X_i با دیگر متغیرها، معادل اســـت با انگاره $\hat{X}_i = \sum b_{ij} X_j$ ، یعنی بخش پیش‌بینی‌شـــده تحلیل رگرســـیون (در جایی که متغیرها اســـتاندارد شـــده هســـتند، طوری‌که وزن‌های b_{ij} ضـــرایب اســـتاندارد رگرســـیون می‌باشـــند). بهترین برآورد بخش انحصـــاری X_i برابر ضـــدانگاره اســـت: $e_i = X_i - \hat{X}_i$.

در تحلیل انگاره، ماتریس کوواریانس $\mathbf{G}$ از نمرات انگاره و کوواریانس ماتریس $\mathbf{r}$ ضـــدانگاره، مورد اســـتفاده قرار گرفت. گاتمن نشـــان داد که ماتریس همبســـتگی n متغیر اولیه برابر اســـت با : $\mathbf{R} = \mathbf{G} - \mathbf{r} + 2S^2$ که در آن S^2 = ماتریس قطری واریانس‌های ضدانگاره.

او همچنین نشـــان داد که تحلیل انگاره در جمعیت ∞ متغیری همانند تحلیل عامل اســـت. لذا اگر $n \to \infty$ و در نتیجه اگر نســـبت تعداد عامل‌ها و تعداد متغیرها $m/n \to 0$، آنگاه S^2 به سمت ماتریس قطری $\mathbf{U}^2$ واریانس‌های انحصاری میل می‌کند که در بخش‌های دیگر مورد بحث قرار می‌گیرد. ماتریس همبستگی تقلیل یافته $\mathbf{R\text{-}U^2}$ آنگاه توسط $\mathbf{R\text{-}S^2}$ تقریب می‌یابد. این شیوه که در این جا بیش از این توضیح داده نمی شود، به آزمون ساختار ویژه ماتریس $\mathbf{R\text{-}S^2}$ منتهی خواهد شد. گاتمن نشان داد که ماتریس همبستگی تقلیل یافته یعنی مجذور همبستگی‌های چندگانه، به لحاظ نظری کوچکترین اندازه‌های اشتراک ممکن هستند. در بررسی ساختار ویژه، فرد به مقابله با مشکلی می‌پردازد که ما پیش از این در PFA با آن روبرو شـــدیم. یعنی ایجاد ارزش‌های ویژه منفی به عنوان نتیجه نادرســـت برآوردهای اندازه‌های اشـــتراک. در این حالت ماتریس همبســـتگی تقلیل یافته مثبت نیمه معین نمی‌باشد (می‌توانیم بگوییم که ماتریس روشن نیست یا این که یک ماتریس گرام[1] نیست. گرام نام شخصی که آن را طرح کرده است). چیزی که در زمینه تحلیل انگاره گاتمن اساسی می‌باشد، این است که مقیاس‌بندی دوباره ماتریس همبستگی تقلیل یافته به شیوه‌ای صورت می‌گیرد که بدون سوگیری باقی بماند. برای توضیح بیشتر به کایزر (۱۹۶۳) و مولاک (۱۹۷۲) مراجعه کنید.

به طور خلاصـــه: اســـتخراج عامل‌ها از طریق بررســـی ســـاختار ویژه ماتریس کوواریانس انگاره با مجذور همبستگی‌های چندگانه روی قطر اصلی و ضرایب تعدیل‌شده همبستگی در مبادی غیرقطری صورت می‌گیرد که طی آن عمل تعدیل، شیوه‌ای است که ماتریس گرام (بدون سوگیری) را تضمین می‌نماید.

1. Gram

نیازی به ذکر این نکته نیست که عناصر ضد انگاره ماتریس کوواریانس همگی تقریباً صفر هستند، مشروط به این که پیش‌فرض‌های تحلیل عاملی ساختار متغیر درست باشند.

باقی مانده این شیوه، یعنی پیدا کردن بارهای عاملی، تعیین تعداد عامل‌ها، تکرار و غیره با سایر شیوه‌هایی که توضیح داده شد قابل مقایسه است.

همچنین قابل ذکر است که جورسکی (۱۹۶۹) یک شکل پیشرفته از شیوه گاتمن را ارائه کرده که نام «تحلیل عامل انگاره» به آن داده شده است.

۸-۳-۹ شیوه چند گروهی

تا به حال روشن شد که تحلیل عامل را می‌توان با رویکردهای مختلفی صورت داد: روش انتخاب یک به یک متغیرها به صورتی که بیشترین واریانس متغیرها گرفته می شود (PCA و PFA)، انتخاب یک به یک عامل‌ها برا ساس یک نظام محا سبه رابطه تفکیکی (روش قطری)، انتخاب عامل‌ها یکی یکی و از طریق مرکز ثقل (روش مرکز ثقل)، انتخاب یک به یک عامل‌ها به طریقی که همبستگی‌های باقی‌مانده بین متغیرهای «مختلف» حداقل باشد (MINRES)، به کار بردن تحلیل همبستگی کانونی روی مجموعه‌ای از متغیرها و مجموعه‌ای از عامل‌ها (CFA)، تعمیم دادن به جمعیتی از افراد (ML)، تعمیم دادن به جمعیتی از متغیرها (تحلیل آلفا و انگاره).

شیوه چند گروهی نمونه دیگری از یک رویکرد جدید است که طبق آن متغیرها به گروه‌ها یا خوشه‌هایی با همبستگی‌های درونی قوی تقسیم می شوند. در واقع این روش نوعی تحلیل خوشه‌ای است درست مثل شیوه ضریب B و تحلیل پیوند که در این جا موضوع بحث ما نیست و چون خوشه‌های متغیرها لزوماً در جهات عمود بر هم قرار نمی‌گیرند، بدیهی است که یک راه حل مایل انتخاب خواهد شد.

تمام روش‌هایی که تا این جا مطرح شدند، به عامل‌های متعامد می‌انجامد و یک راه حل مایل تنها پس از آن، و با اجرای یک چرخش مایل حاصل می‌شود. از سوی دیگر در شیوه ی چند گروهی یک ماتریس عامل مایل به طور مستقیم به دست می‌آید و تمام عامل‌ها همزمان استخراج می شوند. به دنبال آن، همبستگی‌های عاملی بخشی از مدل خواهند بود و تمایز یاد شده بین ساختار عاملی (همبستگی‌های بین عامل‌ها و متغیرها) و الگوی عاملی (ضرایب رگرسیون) شامل این شیوه می‌شود.

جوهره شیوه چند گروهی شامل انتخاب عامل‌ها به روشی است که محور آن‌ها از مرکز ثقل متغیرهای خوشه‌ها بگذرد. برای انجام این شیوه، می‌بایستی با گروه‌بندی n متغیر در m خوشه آغاز کرد، که می‌تواند براساس ملاحظات نظری یا با به کار بردن نتایج شیوه‌های دیگر صورت پذیرد (مثل شیوه ضرایب B).

اگر متغیرها استاندارد شده باشند، در این صورت هر عامل را می‌توان به عنوان مجموع متغیرها در خوشه مربوطه محاسبه کرد، زیرا چنین متغیر جمعی از مرکز ثقل می‌گذرد.

به طور مثال در خو شه k با p متغیر : $F_k = \sum_{j=1}^{p} x_j$ (که در آن، k= ۲،۱، ... m، ا ست، اگر m خوشه وجود داشته باشد).

برای تهیه یک راه‌حل عاملی، نخست دو حاصل جمع همبستگی‌ها را در ماتریس تقلیل یافته همبستگی (که حاوی برآوردهای اندازه‌ی اشتراک روی قطر اصلی است) حساب می‌کنیم. اوّلی شامل حا صل جمع همبستگی‌های هر متغیر با کلیه متغیرها (شامل خود آن متغیر) در هر خو شه ا ست. برای متغیر x_i از خو شه‌ی K این حا صل‌جمع عبارت ا ست از $S_{ik} = \sum_{j=1}^{p} r_{ij}$، که همبستگی r_{ii} متغیر x_i با خودش برابر مقدار ا شتراک h_i^2 ا ست. حا صل‌جمع دوم، حا صل‌جمع همبستگی‌های بین خوشه l و خوشه k (شامل حالت $l=k$) است. حاصل‌جمع S_{ik} به آسانی از طریق جمع کردن حاصل جمع های قبلی S_{ik} برای هر یک از q متغیر خوشه L حساب می‌شود: $S_{ik} = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} r_{iy} = \sum_{i=1}^{q} S_{ik}$. یک حالت ویژه حاصل‌جمع S_{kk} است.

اکنون می‌توانیم همبستگی عاملی را محاسبه کنیم که در ماتریس φ Ø جمع خواهد شد. برای تعیین همبستگی بین عامل F_k و عامل F_1 به آسانی فرمول آشنای ضریب همبستگی را به کار می‌بریم.

$$r_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{s_x s_y}$$

$$r_{F_k F_1} = \frac{\Sigma F_k F_1}{N s_{F_k} S_{F1}}$$

در این فرمول، N تعداد افراد است. توجه داشته باشید که مخرج کسر شامل انحراف معیار عامل‌هاست، چنان که دلیل آن استاندارد بودن متغیرهای x_j نیست، بلکه این حالت در مورد حاصل‌جمع‌های F_k آن‌ها هم صادق است.

ساده کردن فرمول به راحتی امکان‌پذیر است. واریانس $(s_{Fk})^2$ یک عامل F_k معادل حاصل‌جمع s_{kk} ا ست که می‌توان آن را از طریق نشان دادن F_k به عنوان حا صل‌جمع متغیرهای ا ستاندارد شده x_j و به و سیله دقیق شدن روی واریانس این حا صل‌جمع به د ست آورد، با به حساب آوردن این که: $r_{jj} = (h_j)^2$.

برای کوواریانس نیز شیوه ساده کردن مشابهی به کار می‌رود: $(\Sigma F_k F_1) / N = S_{kl}$.

در نتیجه بین عامل‌های F_k و F_1 به صورت حاصل‌جمع همبستگی‌ها قابل نمایش است:

$$r_{F_K F_1} = \frac{S_{kl}}{(S_{kk} S_u)^{1/2}}$$

علاوه بر این همبســتگی‌های عاملی (جمع شـده در ماتریس $\boldsymbol{\varphi}$)، می‌توان همبســتگی‌های بین متغیرها و عامل‌ها را هم به صورت حاصل جمع‌های زیر نشان داد:

$$r_{X_y F_k} = \frac{\Sigma_{XJ} F_k}{N_{sxj} S_{FK}} = \frac{S_{ik}}{(S_{KK})^{1/2}}$$

این همبســتگی‌ها در یک ماتریس عامل $\mathbf{S}$ که ســاختار عاملی را نشــان می‌دهد، گرد آمده‌اند. بارهای $\mathbf{S}$ با همبســتگی عاملی درآمیخته‌اند. با اســتفاده از $\mathbf{S}$ و $\boldsymbol{\varphi}$ الگوی عامل $\mathbf{A}$ را به صــورت زیر می‌توان محاسبه کرد:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\boldsymbol{\varphi}^{-1}.$$

بارهای $\mathbf{A}$، مختصات متغیرها در یک نظام مرجع مایل از محورهای عاملی هستند. آن‌هاضرایب همبســتگی (مثل در $\mathbf{S}$) نیســتند، بلکه ضــرایب رگرســیونی در نظامی از معادلات خطی به شــکل $\mathbf{X} = \mathbf{FA}'$ هستند که متغیرها در آن متغیرهای وابسته بوده و عامل‌ها متغیرهای مستقل هستند. این بارهای الگوی عاملی از درآمیختگی همبســـتگی‌های عاملی مبرا هســـتند (چون این‌ها ضـــرایب «تفکیکی» رگرسیون می‌باشند).

وقتی‌که بارهای عاملی شناخته شده باشند، می‌توان همان روندی که در سایر شیوه‌ها به کار می‌رفت را در این جا هم به کار برد، یعنی محاسبه ماتریس همبستگی بازسازی شده و باقی‌مانده در مراحل چندگانه تعاملی. البته یک فرق مهم بین این شـــیوه و همه شـــیوه‌های قبلی وجود دارد و آن این‌که، عامل‌ها متعامد نیســـتند، بلکه مایل هســـتند. در یک راه‌حل متعامد، ماتریس همبســـتگی باز تولید شده، با حاصل ضرب $\mathbf{AA}'$ برابر است. این حالت در بخش مربوط به PFA نشان داده شد. در آن‌جا فرمول زیر را به کار بردیم:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\frac{\mathbf{F}'\mathbf{F}}{\mathbf{n}-\mathbf{1}}\mathbf{A}' + \frac{\mathbf{E}'\mathbf{E}}{\mathbf{n}-\mathbf{1}}$$

که $\mathbf{F}'\mathbf{F}/(\mathbf{n}-\mathbf{1}) = \mathbf{I}$، در صورتی‌که عامل‌ها ناهمبسته باشند. امّا در شیوه چند گروهی که در آن همبســـتگی‌های عاملی در فرایند دخالت دارند، ماتریس $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{F}'\mathbf{F}/(\mathbf{n}-\mathbf{1})$ عموماً معادل ماتریس همســـانی نبوده و لذا ماتریس همبســـتگی باز تولید شـــده دیگر معادل $\mathbf{AA}'$ نیســـت، بلکه معادل $\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}\mathbf{A}'$ است. از آن جا که $\mathbf{A_s A} = \mathbf{S}\boldsymbol{\varphi}^{-1}$ ما همچنین می‌توانیم بنویسیم:

$$\boldsymbol{\Lambda\varphi}\mathbf{A}' = \mathbf{S}\boldsymbol{\varphi}^{-1}\boldsymbol{\varphi\varphi}^{-1}\mathbf{S}' = \mathbf{S}\boldsymbol{\varphi}^{-1}\mathbf{S}'$$

که $\boldsymbol{\varphi}^{-1}$ از مزاحمت درهم‌آمیختگی با همبســتگی‌های عاملی (که در ســاختار عاملی $\mathbf{S}$ وجود دارند) جلوگیری می‌کند. ماتریس همبستگی طبعاً معادل ماتریس اولیه منهای ماتریس همبستگی باز تولید شده است، یعنی $\mathbf{R}-\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}\mathbf{A}'$. اگر این به ماتریس صفر تقریب پیدا کند، کار خاتمه می‌یابد. ما تنها می‌توانیم امیدوار باشیم که الگوی عاملی «ساختار ساده‌تر ستونی» داشته باشد، طوری که خوشه‌ها به و ضوح قابل ت شخیص با شند. از سوی دیگر چنانچه همب ستگی‌های باقی‌مانده خیلی بالا با شند، یک روش تعاملی بنا می‌گردد که ادامه پیدا می‌کند تا آنکه اندازه‌ی همبستگی‌های باقی مانده ناچیز شود.

در این قسمت چنین قلمداد کردیم که شیوه چند گروهی به لحاظ تعریفی، یک راه‌حل مایل را ایجاد می‌کند. در هر حال، در عمل یک راه حل متعامد ترجیح داده می‌شود که از طریق متعامدسازی راه‌حل مایل حا صل می شود. این کار به و سیله روش متعامد سازی گرام- ا سمیت صورت می‌گیرد، شــیوه‌ای که براســاس آن عامل‌های غیرمتعامد را متعامد نموده و بدین منظور به هر کتابی در زمینه جبر خطی می‌توان رجوع کرد. در شیوه‌های پیشین یک راه‌حل متعامد ترتیب داده می‌شد و تنها پس از انجام چرخش بود که معلوم می‌گشت آیا یک راه‌حل مایل، بهتر با واقعیت تطبیق حاصل می‌کند یا نه. در این جا حالت عکس آن اتفاق می‌افتد: ابتدا یک راه‌حل مایل ترتیب داده می‌شــود و بعداً آن را متعامد می‌کنند. مزیت یک راه‌حل متعامد چنان‌که می‌دانیم این اســت که در آن، واریانس مشــترک تبیین شده به وسیله عامل‌ها را می‌توان به شکلی غیرمبهم تعیین کرد. بنابراین برعهده محقق است که تصــمیم بگیرد آیا می‌خواهد این مرحله متعامد را صــورت دهد یا نه. جهت توضــیحات بیشــتر به هرامن (۱۹۶۷) و بنه و باور (۱۹۷۶) مراجعه کنید.

۴-۹ سایر شیوه‌های دنیای تحلیل عوامل

شــیوه‌هایی که تا به حال توضــیح داده شــد تنها گزیده‌ای از دنیای غنی شــیوه‌های تحلیل عاملی را تشکیل می‌دهد. در گزینش این شیوه‌ها تأکید ما بر جنبه تفکر در این باره بود.

مدل PCA بدون عامل‌های انحصــاری از مدل PFA متفاوت اســت. به حداقل رســاندن باقی مانده‌ها (MINERS)، متفاوت از به حداکثر رساندن واریانس (PCA و PFA) است.

تعمیم دادن به جمعیت افراد (ML)، با تعمیم دادن به جمعیت متغیرها (تحلیل آلفا و انگاره) فرق دارد.

پیدا کردن یک راه‌حل متعامد و بعد احتمالاً یک راه‌حل مایل را صــورت دادن (تقریباً در همه شیوه‌ها) با یافتن یک شیوه مایل و آنگاه متعامد ساختن (شیوه چند گروهی) متفاوت است.

انتخاب یکی یکی عامل‌ها (شیوه مرکز ثقل و قطری) با ا ستخراج همزمان عامل‌ها (شیوه چند گروهی) تفاوت دارد.

در نظر گرفتن یک تحلیل عاملی به عنوان شکلی از تحلیل همبستگی کانونی بین یک مجموعه مکنون و یک مجموعه مشـــاهده شـــده از متغیرها (CFA) جدای از در نظر گرفتن تحلیل عامل به عنوان نوعی تحلیل خوشــه اســت که در آن متغیرهای مشـاهده شـده به گروه‌های جداگانه تقســیم می‌شوند (شیوه چند گروهی).

پایایی درونی دســته‌های ســؤالات (تحلیل عامل آلفا) با مطالبه اعتبار یک مدل عاملی (تحلیل عامل به عنوان تحلیل مسیر با متغیرهای مکنون) فرق می‌کند.
و همین‌طور فرق‌های بسیار دیگری وجود دارد. در ادامه سه مورد دیگر را ذکر می‌کنیم.

۱ -۴- ۹ تحلیل عامل R و Q

تمام شــیوه‌هایی که در این فصـل مورد بحث قرار گرفتند، تحلیل عامل R هســتند. n متغیر ماتریس داده‌ها نقطه شــروع را تشــکیل داده و یک ماتریس همبســتگی $\mathbf{R}$ و یک ماتریس $n \times n$ محاســبه می‌شود که بر روی آن عملیات کاهش بعد انجام می‌شود.

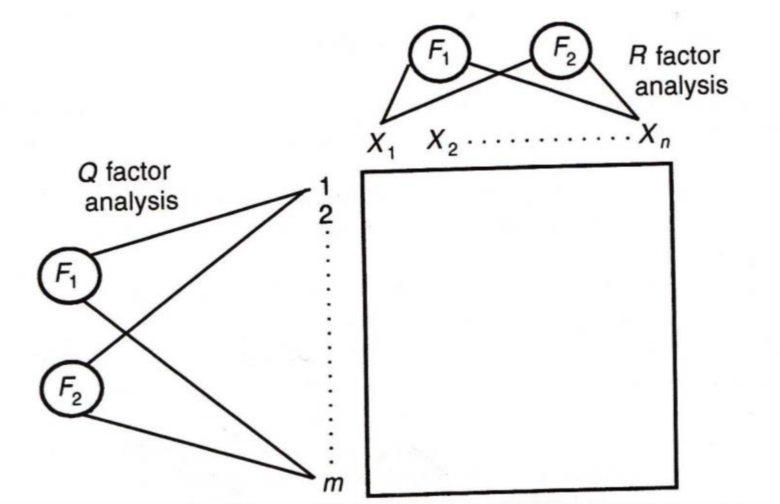
از سوی دیگر در تحلیل عامل Q، تعداد m شخص نقطه شروع را تشکیل می‌دهند که ماتریس همبستگی ماتریس $m \times m$ خواهد بود. با توجه به ماتریس داده‌ها، جنبه متغیر، مورد تحقیق نیست، بلکه جنبه فرد مورد بررسی است (نگاه کنید به شکل ۱۱-۹).
اگر از بعد محتوا اندیشه کنیم، تصور اینکه در مسائل تحقیقی خاص جنبه فردی بیش از جنبه متغیر مورد توجه قرار گیرد، مشکل نیست. به طور مثال، تحقیق علم سیاست در باره ملل اغلب معطوف به گروه‌بندی ک شورها ست، که نمرات روی یک مجموعه متغیرها مورد ا ستفاده قرار می‌گیرد. در چنین حالاتی تقسیم بندی در گروه‌هایی از کشورها شکلی از تحلیل خوشه این واحدهاست نه متغیرها.

جنبه فنی تحلیل Q به اندازه کافی ســاده اســت، چنان که عملیات SVD برای آزمون ســاختار ویژه که در PCA توضــیح داده شــد نیز بر روی ماتریس ترانهاده داده‌ها قابل اجرا اســت این موضــوع معمولاً بدون ذکر این نکته بیان می شود که در یک تحلیل Q، می‌بای ستی تعداد کافی از متغیرها در د سترس با شند. از آنجا که آماره‌ها هنوز مبتنی بر تئوری تعداد زیاد ا ست و چون نقش افراد در این جا توســـط متغیرها اجرا می‌شـــود، تحلیل روی شـــمار کم متغیرها، به همبســـتگی‌های بین فردی ناپایداری می‌انجامد. در نتیجه امکانات کاربردی تحلیل عامل Q اغلب محدود اســت. از این گذشــته، شیوه‌های دیگر تحلیل خوشه واحدها وجود دارد که برای اهداف خاصی از گروه‌بندی طرح شده‌اند.

۹-۴-۲ تحلیل عامل غیر خطی و ناپارامتریک

در شیوه‌های قبلی عموما سطح سنجش متغیرها، مورد بحث قرار نگرفت. از آن جا که میانگین‌ها و واریانس‌ها در محاسبات شرکت دا شتند، چنین فرض می شد که متغیرها در سطح سنجش فاصله‌ای

یا نسبی اندازه‌گیری شده بودند. همچنین فرض بر این بود که روابط بین متغیرها و عامل‌ها در نظامی از معادلات ارائه شـــده که همگی خطی بودند، زیرا بارهای الگوی عاملی، ضــرایب رگرســـیون تحلیل رگرسیون خطی بودند.



شکل ۱۱-۹ تحلیل عامل Q

البته این دو ضرورت قابل تخفیف یافتن هستند. برنامه کامپیوتری PRINCALS (نگاه کنید به: گیفی[1]، ۱۹۸۰) یک تحلیل مؤلفه‌های اصلی را به اجرا در می‌آورد که غیرمتریک و غیرخطی است.

بررســی طرز کار این روش فراتر از اهداف این کتاب اســت، امّا یادآور می‌شــود که شـیوه PCA غیرمتریک و غیرخطی، یک حالت نویدبخش جدید اســـت که شـــایان توجه می باشـــد. خوانندگان علاقه‌مند را به کتاب گیفی (۱۹۸۰) ارجاع می‌دهیم.

۳-۴-۹ تحلیل عامل سطح بالاتر

بنا به نظر بعضی مؤلفین، ساختارهای نظری ما دارای سقف‌های باز است. بنابراین یک تحلیل عامل ممکن اســـت در مراحل مختلفی صـــورت پذیرد. عوامل مایل یک تحلیل اولیه را می‌توان به عنوان متغیرهایی در نظر گرفت که یک تحلیل عامل جدید روی آن‌ها انجام می‌گیرد. این تحلیل تازه، ارائه کننده عامل‌های مرتبه دوم خواهد بود. این فرایند می‌تواند برای به دست آوردن عامل‌های مرتبه سوّم و بالاتر هم ادامه پیدا کند.

1. Gifi

بدیهی است که تحلیل عامل سطح بالاتر اغلب در عمل مورد استفاده قرار نمی‌گیرد. برای انجام آن، عامل‌های مرتبه اوّل بایستی مایل باشند تا مرحله دوم پیگیری شود. همچینن باید تعداد آن‌ها به اندازه کافی زیاد باشد تا به عنوان متغیرها منظور شوند.

فصل ۱۰

تحلیل همبستگی کانونی: مطالعه برابری اقتصادی و عدم ثبات سیاسی

۱-۱۰ مسأله تحقیق و طرح علّی

در مطالعه‌ای به وسیله راست[۱] دانشمند علم سیاست، تحلیلی درباره‌ی رابطه بین اقتصاد و ویژگی‌های سیاسی ۴۷ کشور به عمل آمد. برای اندازه‌گیری عدم تعادل اقتصادی، پنج شاخص به کار برده شد: تقسیم‌بندی زمین‌های کشاورزی، شاخص جینی[۲] و درصد کشاورزانی که روی زمین‌های اجاره‌ای کار می‌کنند، تولید ناخالص ملی در سرمایه[۳] و درصد زارعین. راست برای اندازه‌گیری عدم ثبات سیاسی، چهار شاخص زیر را به کار برد: عدم ثبات رهبری، میزان خشونت داخلی، میزان جنگ‌های داخلی و ثبات دمکراسی. فرض تحقیق این بود که ادعای «آلکسیس دی نوکویل» مبنی بر این که: «مملکتی که اکثر درآمد آن به طور نابرابر بین افراد توزیع شده باشد، قادر به حفظ طولانی حکومتی مردمی نخواهد بود» درست است. به بیان دیگر بین عدم تعادل اقتصادی و عدم ثبات سیاسی رابطه معناداری وجود دارد.

دو مفهوم نظری در این مسأله تحقیق عبارتند از "عدم تعادل اقتصادی «(X^*) و عدم ثبات سیاسی» (Y^*). این‌ها را متغیرهای کانونی می‌نامیم، با این استثنا که این دو شدیداً همبسته هستند. همبستگی بین آن‌ها را اکنون به عنوان «همبستگی کانونی» می‌شناسیم. متغیر کانونی اوّل X^* توسط p=۵ شاخص X_1 تا X_5 اندازه‌گیری می شود و X^* را به عنوان یک ترکیب خطی (مجموع وزن یافته) از این متغیرهای X در نظر می‌گیریم. متغیر دوّم کانونی Y^* نیز ترکیبی خطی از q=۴ شاخص Y_1 تا Y_4 ا ست. در حالت خیلی کلی که مجموعه‌ی X شامل p متغیر و مجموعه Y شامل q متغیر است، طرح را می‌توان به صورت شکل ۱-۱۰ نشان داد.

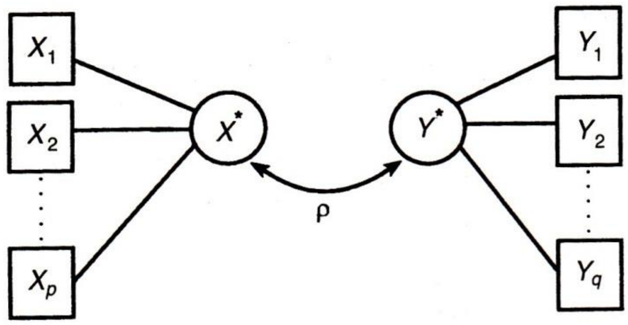
در مسأله تحقیقاتی راسِت، همبستگی بین متغیرهای کانونی X^* و Y^*در حقیقت یک رابطه علّی است، زیرا او مدعی است ملت‌هایی که با (عدم) تعادل اقتصادی زیادی روبرو هستند، ثبات (بی‌ثباتی) سیاسی بالایی را نشان می‌دهند. جهت مخالف علامت پیکان که طبق آن ویژگی‌های

---

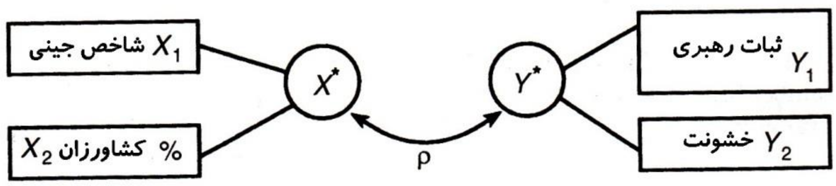
۱ -Russett   1-GINI Index   2-GNP Per Capita

سیاسی بر ویژگی‌های اقتصادی تأثیر می‌گذارد، در نظریه دی توکوویل یا راسِت مطرح نشده است. در هر حال با در نظر گرفتن این که همبستگی کانونی نوعی «همبستگی» است، تحلیل آماری مورد نظر نامتقارن نمی‌باشد. به این دلیل در تصویر، بین X^* و Y^* پیکان علّی رسم نکرده‌ایم، بلکه یک پیکان دوسویه منحنی شکل رسم کرده‌ایم که نشان می‌دهد پرسش علّیت باز می‌ماند.

به منظور رعایت سادگی، بگذارید خود را به حداقل مجموعه ی داده‌ها محدود کنیم، یعنی دو شاخص عدم تعادل اقتصادی، شامل شاخص جینی و درصد زارعین، و دو شاخص عدم ثبات سیاسی که عبارتند از عدم ثبات رهبری و میزان خشونت داخلی. آنگاه طرح به صورت شکل ۲-۱۰ خواهد بود.



شکل ۱-۱۰ طرح علّی: فراگیر



شکل ۲-۱۰ طرح علّی: ویژه

۱۰-۲ ماتریس داده‌ها

واحدهای تحلیل، کشورها هستند. از آن جا که راسِت در مقاله خود، داده‌ها را مشتمل بر ۴۷ کشور نموده، نیازی نیست ما خودمان داده‌ها را سازمان‌دهی کنیم. ما یک نمونه تصادفی شامل n=۱۲ کشور از ماتریس داده‌های اولیه انتخاب کرده‌ایم. چنان که گفتیم به دو متغیر از مجموعه X و دو متغیر از

مجموعه Y بســـنده می‌کنیم و این‌ها را به ترتیب $X_۱$، $X_۲$ ، $Y_۱$ و $Y_۲$ می‌نامیم. همه این متغیرها در سطح سنجش فاصله‌ای اندازه‌گیری شده‌اند.

شـاخص جینی ($X_۱$) به ما می‌گوید که توزیع واقعی درآمد در یک کشــور، به چه میزان از یک توزیع مطلوب در شرایط برابری کامل، انحراف (فاصله) دارد. مقدار آن بین ۱ تا ۱۰۰ متغیر است. هر چه عدد بزرگتر باشد نشان‌دهنده نابرابری بیشتر است.

در صد نیروی کار شاغل در بخش کشاورزی ($X_۲$) نیز عددی بین ۱ تا ۱۰۰ است. این اندازه‌ای از عدم تعادل نیست، بلکه یک متغیر اقتصادی فوق‌العاده است که بیانگر صنعتی نشدن است.

عدم ثبات رهبری (Y_i) یک شاخص است [۱۷-a/b] . در این جا a تعداد سال‌هایی است که یک کشور در فاصله بین سال‌های ۱۹۶۱-۱۹۴۵ دارای استقلال بوده است. مخرج b تعداد رهبران سیاسی در آن مدت و عدد ۱۷ تعداد سال‌های مورد مشاهده است. این شاخص بین ۰ تا ۱۷ متغیر است . هر چه مقدار این شاخص بزرگتر باشد، نشانه بیشتر بودن عدم ثبات رهبری است.

سطح خشونت درون‌گروهی ($Y_۲$) تعداد کشته شدگان ناشی از آشوب‌ها، انقلاب‌ها و جنگ‌های داخلی در یک میلیون جمعیت در فاصله ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۲ است. بدیهی است هر چه عدد بزرگتر باشد، نشان دهنده بی‌ثباتی بیشتر است.

نمونه تصادفی ما شامل n=۱۲ کشور، در ماتریس داده‌ها در جدول ۱-۱۰ آمده است.

جدول ۱-۱۰ ماتریس داده‌ها

کشور	شاخص جینی	٪ کشاورزان	رهبری	خشونت
یوگسلاوی	۴۷/۳	۶۷	۰	۰
هلند	۴۵/۰	۵۷	۸/۵	۵
ژاپن	۴۷/۰	۴۰	۱۵/۷	۰/۱
هند	۵۲/۲	۷۱	۳/۰	۱۴/۰
فیلیپین	۶۵/۴	۵۹	۱۴/۰	۲۹۲/۰
سوئد	۵۷/۷	۱۳	۸/۵	۰
نیوزیلند	۷۷/۳	۱۶	۱۲/۸	۰
اسپانیا	۷۸/۰	۵۰	۰	۰/۲
ایتالیا	۸۰/۳	۲۹	۱۵/۵	۰/۲
عراق	۸۸/۱	۸۱	۱۶/۲	۳۴۴/۰
ونزوئلا	۹۰/۹	۴۲	۱۴/۹	۱۱۱/۰
بولیوی	۹۳/۸	۷۲	۱۵/۳	۶۶۳/۰

۳-۱۰ مدل تحلیل همبستگی کانونی

در تحلیل همبستگی کانونی می‌خواهیم ببینیم آیا بین یک مجموعه از متغیرهای X و یک مجموعه از متغیرهای Y رابطه معناداری وجود دارد. بدین منظور در جستجوی یک ترکیب خطی X^*، از مجموعه X و یک ترکیب خطی Y^*، از مجموعه Y هستیم، به نحوی که X^* و Y^* دارای بیشترین همبستگی باشند. دو ترکیب خطی X^* و Y^* مشاهده نشده‌اند و در حال حاضر ناشناخته‌اند. این‌ها متغیرهای کانونی نامیده می‌شوند. در مثال ما برای این دو *از قبل* نامی در نظر گرفته شده: عدم تعادل اقتصادی و عدم ثبات سیاسی. گاهی چنین نظریه‌ی *از قبل* طرح شده‌ای در ابتدای تحقیق وجود ندارد و بعداً بایستی نامی بر آن نهاد. همبستگی ρ بین X^* و Y^* همبستگی کانونی نامیده می‌شود.

ساده‌ترین راه برای توضیح منطق تحلیل همبستگی کانونی از طریق تحلیل رگرسیون چندگانه است. در تحلیل رگرسیون چندگانه یک متغیر وابسته Y و مجموعه‌ای از متغیرهای مستقل X_i وجود دارد. سپس سعی می‌کنیم یک ترکیب خطی به شکل $X^* = a_1X + a_2X_2 + ...$ پیدا کنیم که X^* و Y دارای بیشترین همبستگی باشند (توجه داشته باشید که در فصل ۵، $\hat{y}$ به عنوان یک نماد به جای X^* به کار برده می‌شد.)

در تحلیل همبستگی کانونی فقط یک Y وجود ندارد، بلکه یک مجموعه کلی از متغیرهای Y وجود دارد. این متغیرها به وسیله یک ترکیب خطی به شکل $Y^* = b_1Y_1 + b_2Y_2 + ...$ نشان داده خواهند شد. البته دو ترکیب خطی مورد نظر (متغیرهای کانونی) X^* و Y^* ناشناخته‌اند. برای پیدا کردن آن‌ها، وزن‌های a و b بایستی محاسبه شوند. تحلیل همبستگی کانونی تعیین این وزن‌ها را به گونه‌ای هدف قرار می‌دهد که همبستگی کانونی ρ تا حد امکان بزرگ باشد. مجذور این همبستگی کانونی، بخشی از واریانس یک مجموعه (مثل، ویژگی‌های سیاسی) است که به وسیله واریانس مجموعه دیگر (مثل، ویژگی‌های اقتصادی) تبیین می‌گردد.

درست مثل تحلیل مؤلفه‌های اصلی که نه تنها یک مؤلفه بلکه چندین مؤلفهٔ ناهمبسته را می‌توان تبیین کرد، در این جا نیز جفت‌های مختلفی از متغیرهای کانونی را می‌توان پیدا کرد. هر جفت با جفت قبلی ناهمبسته است و هر بار به گونه‌ای محاسبه می شود که همبستگی‌های کانونی حداکثر باشد. تعداد جفت‌های متغیرهای کانونی که می‌توان آن‌ها را تعداد همبستگی‌های کانونی هم نامید، معادل تعداد متغیرها در کوچکترین مجموعه است یعنی کمینه $[q,p]$.

در مثال ما $p=q=۲$ است. بنابران دو جفت متغیرهای کانونی و همین طور دو همبستگی کانونی نظیر آن را می‌توان محاسبه کرد. متغیرهای کانونی عبارتند از : $X^* = a_1X + a_2X_2$ و $Y^* = b_1Y_1 + b_2Y_2$. شکل علائم برداری آن‌ها بدین‌گونه است: $\mathbf{X}^*=\mathbf{Xa}$ و $\mathbf{y}^*=\mathbf{yb}$.

همچون شیوه‌های فصل‌های قبل، محاسبه هر یک از همبستگی‌های کانونی و وزن‌های a و b با آزمایش ســـاختار ویژه یک ماتریس معرف، صـــورت خواهد گرفت. این ماتریس معرف، در تحلیل تشـخیصـی (افتراقی) و تحلیل مؤلفه‌های اصـلی، به ترتیب $\mathbf{W^{-1}B}$ و $\mathbf{R}$ بود. در تحلیل همبسـتگی کانونی این ماتریس $\mathbf{R_{yy}^{-1}R'_{xy}R_{xx}^{-1}R_{xy}}$ اســـت. علت این که این روش با چنین ماتریس پیچیده‌ی خاصـی درگیر اسـت، بعداً زمانی روشـن خواهد شـد که همبسـتگی کانونی X^* و Y^* به عنوان یک همبســتگی کانونی چندگانه بین متغیر کانونی Y^* و مجموعه متغیرهای X بررســی می‌شــود. قبل از این که این مطلب را توضـــیح دهیم اجازه دهید ابتدا بین انواع مختلف ماتریس‌های همبســـتگی بین‌گروهی و درون‌گروهی تمایز قائل شــویم و همچنین رویکرد هندســی و اهداف این شــیوه را مورد بحث قرار دهیم.

۴-۱۰ سه نوع همبستگی

یک روش معقول برای آزمودن همبســـتگی‌های بین ویژگی‌های اقتصـــادی و ســـیاســـی، تحلیل همبســتگی‌های جداگانه بین شــاخص جینی و (عدم) ثبات رهبری (X_1, Y_1)، بین شــاخص جینی و میزان خشونت (X_1, Y_2)، بین در صد کشاورزان و (عدم) ثبات رهبری (X_2, Y_1)، و بین کشاورزان و میزان خشــونت (X_2, Y_2) اســت. اینها همبســتگی‌های بین X و Y هســتند، لذا **همبستگی‌های بین‌گروهی** نامیده می‌شوند.

تحلیل همبستگی کانونی البته یک قدم فراتر از این آزمون جداگانه همبستگی پیش می‌رود.

قبل از هر چیز، هدف فرد در تحلیل کانونی، آزمودن این مسأله است که دو مجموعه متغیرهای X از یک‌سو و متغیرهای Y از سوی دیگر، «به یک شکل کلی» تا چه حد، با هم رابطه نشان می‌دهند. بدین منظور هر مجموعه با یک ترکیب خطی جایگزین می‌شود. همبستگی بین این دو ترکیب خطی، موضوع تحقیق را تشکیل می‌دهد.

ثانیاً، در تحلیل همبســـتگی کانونی محقق به کنترل همبســـتگی‌های درونی هر مجموعه از متغیرها می‌پردازد، زیرا امکان دارد متغیرهای درون مجموعه X ویژگی‌های اقتصـــادی با یکدیگر هم بسته باشند. این نوع همبستگی‌ها را **همبستگی درون‌گروهی** گویند. این ها شکلی از مسأله را به وجود می‌آورند که با موضوع چند هم خطی بودن در تحلیل رگرسون چندگانه قابل مقایسه است. در آن جا ضرایب رگرسیونی که محاسبه می شدند ضرایب تفکیکی بودند، یعنی ما هر متغیر را از لحاظ همبسته بودن با سایر متغیرها در مجموعه X کنترل می‌کردیم. در تحلیل همبستگی کانونی چیزی شــبیه این کار صــورت می‌گیرد، ولی در این جا ما تنها به کنترل روی مجموعه X نمی‌پردازیم، بلکه این کنترل روی مجموعه Y ویژگی‌های ســیاســی هم صــورت می‌گیرد، چون متغیرهای Y مختلفی داریم که ممکن است با هم همبسته باشند.

بدین ترتیب ما سه نوع همبستگی را می‌توانیم مشخص کنیم:

۱- همبستگی بین متغیرهای X؛ ماتریس همبستگی $\boldsymbol{R}_{xx}$ است.
۲- همبستگی بین متغیرهای Y ؛ ماتریس همبستگی $\boldsymbol{R}_{yy}$ است.
۳- همبستگی بین متغیرهای X و Y؛ ماتریس همبستگی $\boldsymbol{R}_{xy} = \mathbf{R}'_{\mathbf{yx}}$ است.

به عبارت دیگر اگر همبســـتگی‌های بین همه متغیرهای X_1، X_2، Y_1 و Y_2 را در یک ماتریس بزرگ قرار دهیم ماتریس از هم گسیخته خواهد بود، به صورتی که در جدول ۲-۱۰ نشان داده شده است.

جدول ۲-۱۰: ماتریس همبستگی

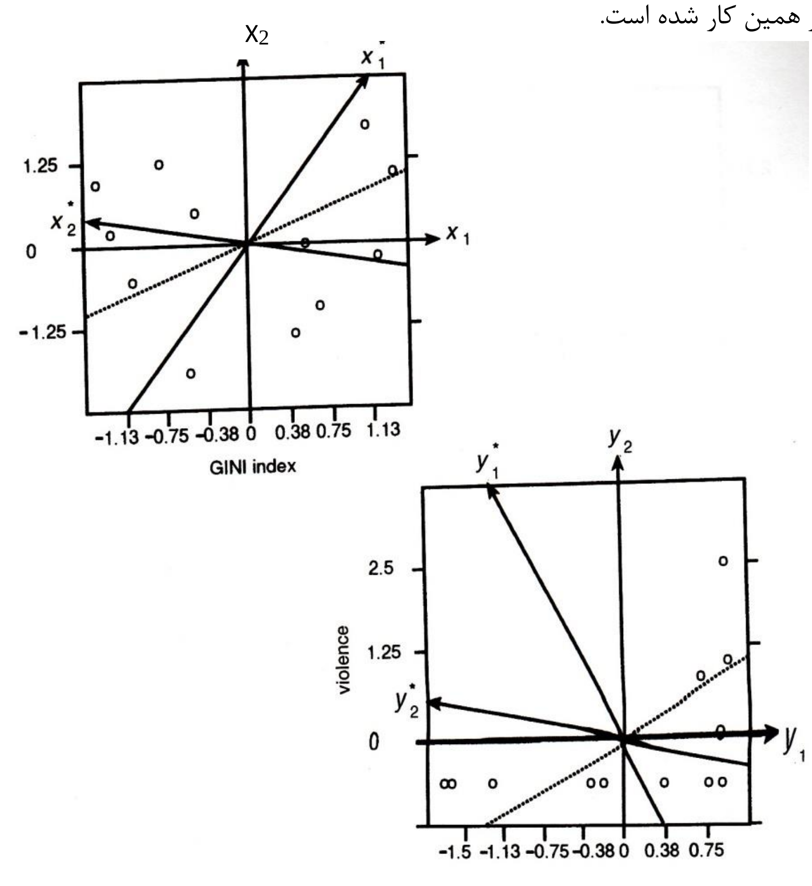
$$
\begin{array}{c|cccc}
 & X_1 & X_2 & Y_1 & Y_2 \\
\hline
X_1 & & & & \\
X_2 & & & & \\
Y_1 & & & & \\
Y_2 & & & &
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & r_{x_1x_2} & r_{x_1y_1} & r_{x_1y_2} \\
r_{x_2x_1} & 1 & r_{x_2y_2} & r_{x_1x_2} \\
r_{y_1x_1} & r_{y_1x_2} & 1 & r_{y_2y_2} \\
r_{y_2x_1} & r_{y_2x_2} & r_{y_2y_1} & 1
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\boldsymbol{R}_{xx} & \boldsymbol{R}_{xy} \\
\boldsymbol{R}_{yx} & \boldsymbol{R}_{yy}
\end{bmatrix}
$$

این حقیقت که تحلیل همبستگی کانونی معطوف به آزمون همبستگی‌های بین گروهی است نه درون‌گروهی، از طریق مقایســه این شــیوه با دو بار تحلیل مؤلفه‌های اصــلی (دوبار انجام PCA) بهتر قابل توضیح است. PCA به جستجوی همبستگی‌های درون یک مجموعه از متغیرها یعنی همبستگی درونی می‌پردازد. اگر ما دو تحلیل PCA انجام دهیم، یکی روی مجموعه X و یکی روی مجموعه Y، در هر PCA یک مؤلفه اصــلی به دســت خواهیم آورد. همبســـتگی بین این دو مؤلفه اولیه همانند همبســـتگی کانونی (اولیه) نیســـت، زیرا همبســـتگی بین دو مؤلفه این مطلب را می‌ســـنجد که همبســـتگی‌ های درون گروهی بین ویژگی‌ های اقتصــــادی، با همبســـتگی‌ های درون‌گروهی بین ویژگی‌های سیا سی، تا چه حد قابل مقایسه هستند. از طرف دیگر همبستگی کانونی این موضوع را می‌سنجد که که ویژگی‌های اقتصادی و سیاسی تا چه حد همبسته هستند، درحالی که از یک سو از لحاظ همبســتگی درون‌گروهی مجموعه اقتصــادی و از ســوی دیگر از لحاظ همبســتگی درون‌گروهی مجموعه سیاسی کنترل می‌شوند (یعنی فرض بر این است که این همبستگی‌های درون‌گروهی وجود ندارد).

۵-۱۰ نگرش هندسی

به منظور توضیح تحلیل همبستگی با یک رویکرد هندسی، دو دستگاه مختصات رسم می‌کنیم: یکی با دو متغیر X و به عنوان محورهای x_1 و x_2؛ و دیگری با دو متغیر y به صــورت محورهای y_1 و Y_2 (شکل ۳-۱۰). این متغیرها استاندارد شده هستند.

ترکیب‌های خطی x^*_1 و x^*_2 در فضـای (x_1 و x_2) و ترکیب‌های خطی y_1^* و y_2^* در فضـای (y_1 و y_2) واقع شده‌اند. توجه داشته باشید که یک متغیر کانونی x_1^* مثلاً همانند تابع رگرسیون x_2 روی تابع x_1 نیست، چون دومی وابسته به همبستگی و رگرسیون درون مجموعه x است، در حالی که متغیر کانونی x_1^* به گونه‌ای طرح شده که بیشترین همبستگی را با y_1^* از مجموعه دوم دارد. این تمایز در تصویر مذکور با نشان دادن متغیر کانونی x_1^* با یک خط ممتد و تابع رگرسیون x_2 روی x_1 با خط چینی که از بین نمودار نقطه‌ای می‌گذرد، مشخص شده است. برای سه متغیر کانونی دیگر نیز همین کار شده است.



شکل ۳-۱۰ دو نظام مختصات

هدف تحلیل همبستـــگی کانونی، یافتن یک جفت اولیه از متغیرهای کانونی اســـت، یک x^* در فضـای (x_1، x_2) و یک y^* در فضـای (y_1، y_2)، به طریقی که همبســتگی بین x^* و y^* حداکثر باشـد.

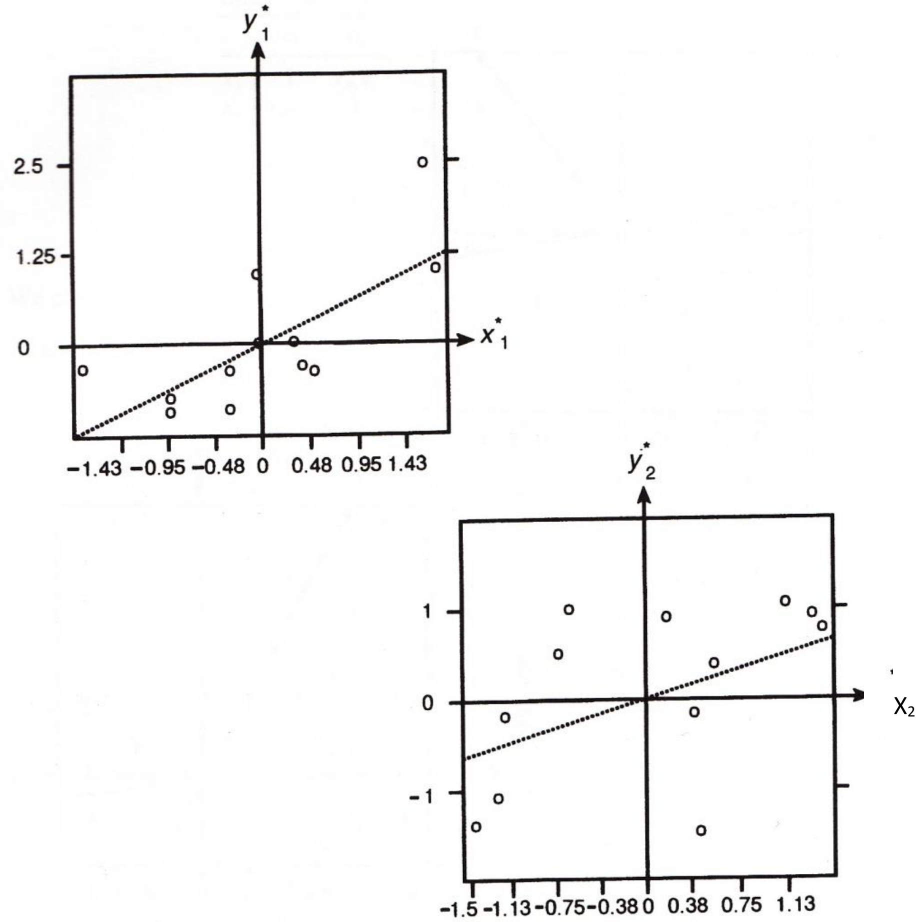
سپس فرد به جستجوی یک جفت متغیر کانونی ثانویه می پردازد که با جفت اوّلیه ناهمبسته باشد، به طریقی که همبستگی (کانونی) بین این جفت ثانویه تا حد ممکن زیاد باشد.

با نگاهی به شکل ۴-۱۰ دستگاه مختصات که محورها متغیرهای کانونی می‌باشند، می‌توان مشاهده کرد که همبستگی‌های کانونی بین جفت اول x_1^* و y_1^* و همچنین جفت دوم (ناهمبسته با اولی)، در واقع خیلی بالاست.

این واقعیت که x_1^* و x_2^* (و همین طور y_1^* و y_2^*) ناهمبسته هستند، ضرورتاً به این معنی نیست که آن‌ها در فضای (x_1، x_2) متعامد می‌باشند. یعنی خط رگرسیون در فضای (x_1^* و x_2^*) دارای شیب صفر است. این موضوع در شکل ۵-۱۰ نشان داده شده است.

۶-۱۰ اهداف شیوه تحلیل همبستگی کانونی

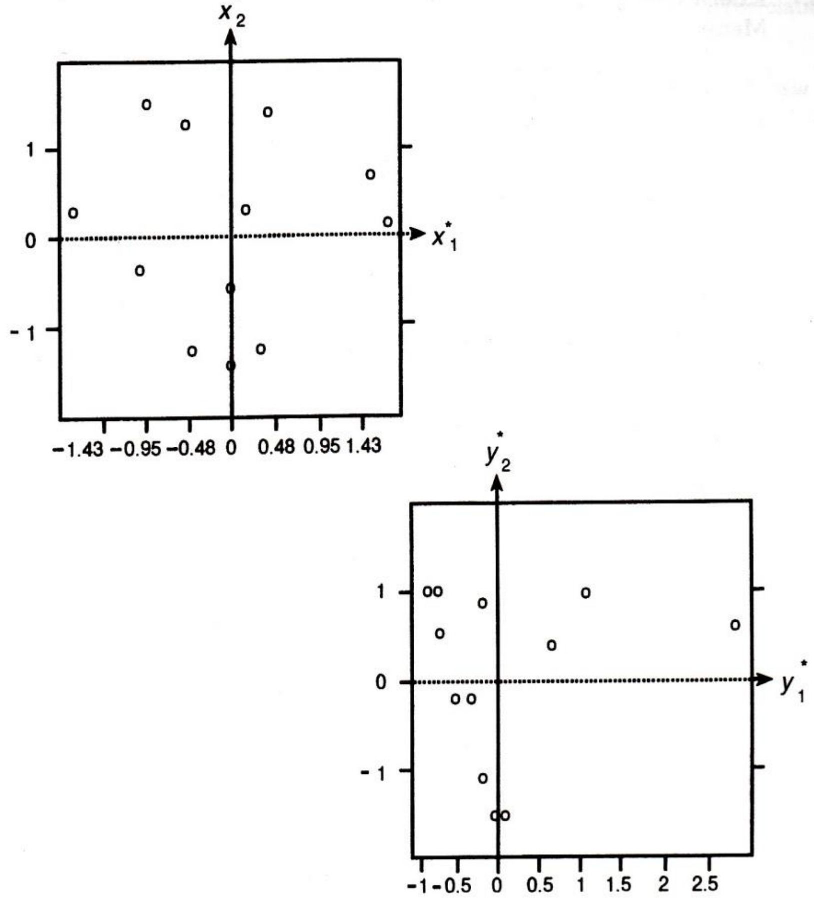
در تحلیل همبستگی کانونی، سه هدف دنبال می شود. با در نظر گرفتن مطالعه راست، این اهداف را به شرح زیر می‌توان بیان کرد:



شکل ۴- ۱۰ دستگاه مختصات که متغیرهای کانونی محورها هستند

۱- ما به جستجوی یک جفت اولیه ترکیب خطی می‌پردازیم، یکی از مجموعه متغیرهای اقتصادی و یکی از مجموعه متغیرهای سیاسی، به گونه‌ای که همبستگی بین هر دو ترکیبات خطی، حداکثر

باشـــد. بعد به جســـتجوی یک جفت ترکیب خطی ثانویه می‌پردازیم که آن‌ها هم با یکدیگر حداکثر



شکل ۵-۱۰

همبســـتگی را داشـــته و با جفت اولیه ناهمبســـته باشـــند. این کار را تا جایی که متغیری در مجموعه کوچکتر وجود داشته باشد تکرار می‌کنیم. این ترکیبات خطی را متغیرهای کانونی می‌نامیم. وزن‌های مربوطه به نام «وزن‌های کانونی» معروفند. بیشـــترین همبســـتگی‌ها «همبســـتگی کانونی» خوانده می‌شوند. براساس وزن‌های کانونی، ما سعی می‌کنیم همبستگی‌های بین مجموعه‌ها را تعبیر و تفسیر کنیم. همچنین می‌توان سعی نمود برای هر متغیر کانونی در یک جفت، نامی تعیین کرد.

۲- نمرات متغیرهای کانونی با استفاده از وزن‌های کانونی محاسبه می‌شوند. اغلب همبستگی بین متغیرهای اولیه و متغیرهای کانونی، امکان تفسیر بهتری را فراهم می‌کنند. این ها را «همبستگی‌های ساختار» می‌نامند.

۳- ما بررسی می‌کنیم تا ببینیم آیا همبستگی‌های بین دو مجموعه قابل تعمیم به جامعه کشورها هستند یا نه. این کار را با آزمودن همبستگی‌های کانونی از لحاظ معناداری انجام می‌دهیم. این کار برای تمام همبستگی‌های کانونی با همدیگر یا به طور جدا جدا برای هر همبستگی کانونی یا زیر گروه‌های آن‌ها قابل انجام است. از آن جا که اولین همبستگی کانونی بیشترین مقدار بوده و همبستگی‌های بعد از آن کوچک و کوچکتر می‌شوند، بهتر است این ها را به طور جداگانه آزمون کنیم و تنها آن‌هایی را مورد تفسیر قرار دهیم که بیشترین مقدار معناداری را به دست می‌دهند.

۷- ۱۰ بررسی ساختار ویژه ماتریس $\mathbf{R}_{yy}^{-1}\mathbf{R}'_{xy}\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy}$

در بالا گفته شد که یک رویکرد تحلیل رگرسیون چندگانه، می‌تواند در تشریح منطق تحلیل همبستگی کانونی مفید باشد. اکنون می‌خواهیم به این موضوع بپردازیم. مجموعه Y را به عنوان متغیر وابسته در نظر می‌گیریم (این تمرین را به راحتی با مجموعه X هم می‌توان صورت داد.) ما از علائم ماتریسی و بردار استفاده خواهیم کرد. برای رعایت سادگی اجازه دهید متغیرهای X و Y را به عنوان متغیرهای استاندارد شده فرض کنیم و به جای علائم وقت‌گیر نمرات Z مثل Z_x و Z_y، حروف کوچک x و y را به کار ببریم.

ما ترکیب خطی $y^* = yb$ را در نظر می‌گیریم؛ این ترکیب بر مبنای این فرض است که بردار $\mathbf{b}$ معلوم است و مجموعه کلی متغیرهای y را با یک متغیر y^* می‌شود جایگزین کرد، طوری که تحلیل رگرسیون چندگانه با یک متغیر وابسته (کانونی) y^* و چندین متغیر مستقل x قابل اجرا باشد.

مرحله اوّل، محاسبه ضرایب همبستگی متغیر وابسته y^* با متغیرهای x است، بدین شرح:

$$\text{همبستگی } R_{xy^*} = \frac{\text{کوواریانس } (x,y^*)}{(\text{انحراف معیار } y^*)(\text{انحراف معیار } x)}$$

آنچه که ما نیاز داریم، کوواریانس بین هر x_i و y^* و نیز انحراف معیار x_i و y^* است. در شکل علائم ماتریسی و برداری کوواریانس بین متغیرهای مستقل x_i و متغیر y^* معادل $\mathbf{X}'\mathbf{y}^*/(n-1) = \mathbf{X}'\mathbf{y}\mathbf{b}/(n-1) = \mathbf{R}_{xy}\mathbf{b}$ است که در آن n تعداد واحدها (در این جا کشورها) است.

واریانس متغیرهای x معادل $\mathbf{X}'\mathbf{X}/(n-۱)$ و انحراف معیار آن ها برابر $[X'X/(n-۱)]^{۱/۲}$ است. اگر متغیرهای x استاندارد شده باشند، همه این‌ها برابر ۱ هستند. این مطلب در مورد متغیرهای y نیز صادق است، امّا در مورد ترکیب خطی y^* صدق نمی‌کند.

واریانس y^* چنین خواهد بود:

$$= \frac{۱}{n-۱} Y^{*\prime} Y^* = \frac{۱}{n-۱} (Yb)'(Yb)$$

$$= \frac{۱}{n-۱} b'Y'Yb = b'R_{yy}b$$

انحراف معیار y^* برابر

$$= (\mathbf{b}'\mathbf{R}_{\mathbf{yy}}\mathbf{b})^{۱/۲}$$

اکنون ماتریس همبستگی‌های مرتبه صفر متغیر کانونی y^* و هر یک از متغیرهای x را می‌توان بنا نهاد (تذکر: اگر تنها متغیر کانونی y^* مورد مشاهده قرار گیرد، دیگر یک ماتریس نخواهد بود، بلکه یک بردار است؛ حالت چند متغیر کانونی که در یک بردار y^* جمع شده‌اند، این‌ها در یک ماتریس جمع می‌شوند):

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y^*x}} = (\mathbf{R}_{\mathbf{xy}}\mathbf{b})/(\mathbf{b}'\mathbf{R}_{\mathbf{yy}}\mathbf{b})^{۱/۲}$$

مرحله بعدی محاسبه ضریب همبستگی چندگانه R مربوط به متغیر Y^* روی تابع مجموعه متغیرهای x است. این ضریب همبستگی کانونی خواهد بود. در تحلیل رگرسیون چندگانه چنین است که ضریب تعیین چندگانه $R^۲$ (مجذور ضریب همبستگی چندگانه) برابر است با: $R^۲ = \mathbf{r}'(y)\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^{-۱}\mathbf{r}(y)$، که $\mathbf{r}(y)$ برابر است با بردار ضرایب y با متغیرهای x و $\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^{۱}$ معادل وارون ماتریس همبستگی‌های بین متغیرهای x با یکدیگر است. در حالات پیچیده‌تر تحلیل همبستگی کانونی $r(y)$ با $\mathbf{R}_{\mathbf{y^*x}}$ جایگزین می‌شود، به طوری که یک همبستگی کانونی (مجذور شده) را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\rho^2 = \mathbf{R}^2_{\mathbf{y^*.x_1x_2....x_p}} = \mathbf{R}'_{\mathbf{y^*x}}\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^{-1}\mathbf{R}_{\mathbf{y^*x}} = [(\mathbf{R}_{\mathbf{xy}}\mathbf{b})/(\mathbf{b}'\mathbf{R}_{\mathbf{yy}}\mathbf{b})^{1/2}]'\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^{-1}[(\mathbf{R}_{\mathbf{xy}}\mathbf{b})/(\mathbf{b}'\mathbf{R}_{\mathbf{yy}}\mathbf{b})^{1/2}]$$

$$\boxed{\rho^2 = \frac{\mathbf{b}'\mathbf{R}'_{\mathbf{xy}}\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^{-1}\mathbf{R}_{\mathbf{xy}}\mathbf{b}}{\mathbf{b}'\mathbf{R}_{\mathbf{yy}}\mathbf{b}}}$$

ضرایب $\mathbf{b}$ آن‌ها ... ی مجذور همبستگی کانونی برای آن‌ها حداکثر باشد. برای به حداکثر رساندن این نسبت، مشتق‌های تفکیکی را بایستی به دست آورد و معادل صفر قرار داد. مشتق هر نسبت u/v برابر است با $(uv' - u'v)/v^۲$. اگر صورت صفر باشد مشتق صفر می‌شود، مثلاً اگر $uv' = u'v$ باشد. با اعمال کردن آن در نسبت $\rho^۲$ حاصل چنین خواهد بود:

$$(\mathbf{b}'\mathbf{R}_{xy}\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy}\mathbf{b})(2\mathbf{R}_{yy}\mathbf{b}) = (2\mathbf{R}'_{xy}\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy}\mathbf{b})(\mathbf{b}'\mathbf{R}_{yy}\mathbf{b})$$

$$\mathbf{R}'_{xy}\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{b}'\mathbf{R}'_{xy}\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy}\mathbf{b}}{\mathbf{b}'\mathbf{R}_{yy}\mathbf{b}}\mathbf{R}_{yy}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{R}'_{xy}\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy}\mathbf{b} = \rho^2\mathbf{R}_{yy}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{R}_{yy}^{-1}\mathbf{R}'_{xy}\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy}\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy}\mathbf{b} = \rho^2\mathbf{b}$$

$$\boxed{(\mathbf{R}_{yy}^{-1}\mathbf{R}'_{xy}\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy} - \rho^2\mathbf{I})\mathbf{b} = \mathbf{0}}$$

ما پیش از این با ساختار معادله آخری آشنا شدیم. این نوعی مسأله ساختار ویژه‌ای است، که در آن $\mathbf{b}$ بردارهای ویژه و ρ^2 ارزش‌های ویژه ماتریس $\mathbf{R}_{yy}^{-1}\mathbf{R}'_{xy}\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy}$ هستند.

در اغلب کتاب‌های آماری این ماتریس به طور ساده ارائه شده است. مقصود از توضیح جنبی فوق این بود که نشان داده شود این ماتریس از منطق طرح محاسبه تحلیل همبستگی کانونی تبعیت می‌کند، یعنی به حداکثر رساندن همبستگی بین‌گروهی ρ بین ترکیبات خطی x^* و y^* در تجزیه متغیر با کنترل همبستگی های درون‌گروهی هر مجموعه. این کنترل همبستگی درون‌گروهی را می‌توان از واورن $\boldsymbol{R}_{xx}$ و $\boldsymbol{R}_{yy}$ در فرمول ماتریس مختلط که ساختار ویژه آن بعداً مورد بررسی قرار خواهد گرفت، مشاهده کرد.

مطلب پیش را از طریق تحلیل رگرسیون چند متغیره توضیح داده‌ایم[1]. برای این کار، y را با ترکیب خطی y^* جایگزین کردیم. البته می‌توانستیم از جهت دیگری هم محاسبات را انجام دهیم، x^* را به عنوان نقطه انحراف گرفته و تحلیل رگرسیون x^* را روی تابع متغیرهای y بنا کنیم. آنگاه ماتریس $\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}'_{yx}\mathbf{R}_{yy}^{-1}\mathbf{R}_{yx}$، را می یافتیم که در آن x و y جا به جا شده‌اند. همبستگی های کانونی یکسان می‌بودند (ارزش های ویژه=ρ^2) و وزن ها، $\mathbf{b}$ نبوده بلکه $\mathbf{a}$ (بردارهای ویژه) می‌بودند.

صرف نظر از همبستگی کانونی (ρ^2)، پیدا کردن ساختار ویژه‌ی ماتریس مختلط $R_{yy}^{-1}R'_{xy}R_{xx}^{-1}R_{xy}$ تنها، بردار $\mathbf{b}$ وزن‌های متغیر کانونی y^* را به ما می‌دهد. لازم نیست برای محاسبه $\mathbf{a}$ تمام عملیات را از جهت دیگر انجام داد. زیرا با تعریف همبستگی کانونی به عنوان همبستگی ساده بین $\mathrm{X}^*=\mathrm{Xa}$ و $\mathbf{y}^*=\mathbf{yb}$ و از طریق قراردادن آن در فرمولی که برای ρ یافتیم،

۱- در بسیاری از کتاب‌ها روش دیگری دنبال می شود. تابعی تعریف می‌شود:

$$F = a'b_{xy}b - \frac{1}{2}P_1(a'R_{xx}a - 1) - \frac{1}{2}P_2(b'R_{yy}b - 1)$$

این تابع با معادل صفر قرار دادن مشتق‌های تفکیکی، به حداکثر می‌رسد. این شیوه به نام شیوه ضرب‌های لاگرانژ یا چند شرط همراه $a'R_{xx}a = 1$ و $b'R_{yy}b = 1$ در این جا به نتایج مشابهی منجر می‌شود، ولی به لحاظ منطق شیوه، پیچیده‌تر است.

و مشروط به این که $\mathbf{a'R_{xx}a}=1$ و $\mathbf{b'R_{yy}b}=1$ باشند (بدین معنا که x^* و y^* می‌بایستی استاندارد شده باشند)، به راحتی می‌توان محاسبه کرد که:

$$\mathbf{a}=\mathbf{R_{xx}^{-1}R_{xy}b}\frac{1}{\rho}$$

این فرمول را از دو فرمول مربوط به ρ^2، یکی از رگرســیون چندگانه y^* روی مجموعه x، و یکی از همبستگی مرتبه صفر x^* و y^* به دست می‌آوریم.

اولاً:

$$\rho^2=\frac{\mathbf{b'R'_{xy}R_{xx}^{-1}R_{xy}b}}{\mathbf{b'R_{yy}b}}$$

$$=\frac{\mathbf{b'}}{(\mathbf{b'R_{yy}b})^{1/2}}\mathbf{R'_{xy}R_{xx}^{-1}R_{xy}}\frac{\mathbf{b}}{(\mathbf{b'R_{yy}b})^{1/2}}$$

$$=\mathbf{b'R'_{xy}R_{xx}^{-1}R_{xy}b}\quad \text{with}\quad \mathbf{b}\ \text{normalized}$$

ثانیاً:

$$\rho=\frac{[(\mathbf{xa})'(\mathbf{yb})]/(\mathbf{n}-1)}{(\mathbf{a'R_{xx}a})^{1/2}(\mathbf{b'R_{yy}b})^{1/2}}$$

$$=\frac{\mathbf{a'}}{(\mathbf{a'R_{xx}a})^{1/2}}\mathbf{R_{xy}}\frac{\mathbf{b}}{(\mathbf{b'R_{yy}b})^{1/2}}$$

$\mathbf{a'R_{xy}b}$ با $\mathbf{b}$ نرمال شده

در نتیجه:

$$\mathbf{b'R'_{xy}R_{xx}^{-1}R_{xy}b}=\mathbf{pa'R_{xy}b}$$

$$\mathbf{a'}=\frac{1}{\rho}\mathbf{b'R'_{xy}R_{xx}^{-1}}$$

$$\mathbf{a}=\mathbf{R_{xx}^{-1}R_{xy}p}\frac{1}{\rho}$$

با بیش از یک همبستگی کانونی (در این جا دوتا) بردارهای $\mathbf{a}_i$ در ماتریس $\mathbf{A}$ به هم می‌پیوندند:

$$\boxed{\mathbf{A}=\mathbf{R_{xx}^{-1}R_{xy}B\Delta^{-1/2}}}$$

می‌توان این مطلب را وارسی کرد که $\mathbf{A'R_{xx}A}=\mathbf{I}$ است، بدین معنی که هر متغیر کانونی x^* استاندارد شده است.

۱۰-۸ بررسی ساختار ویژه‌ی داده‌های راسِت

اکنون اجازه دهید مطلب فوق را در مجموعه داده‌های اختصـــاری خود به کار ببریم. وظیفه ما پیدا کردن ساختار ویژه ماتریس $\mathbf{M} = \mathbf{R}_{yy}^{-1}\mathbf{R}'_{xy}\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy}$ است.

قبلاً گفتیم که با تجز یه مقادیر منفرد (SVD) هر ماتریس، می‌توان M را به عنوان حا صل ضرب سه ماتریس بیان کرد، $\mathbf{M{=}p\Delta U'}$، که درآن Δ ماتریس قطری ارزش‌های ویژه M است. از مطالعه ساختار ویژه ماتریس همبستگی $\mathbf{R}$ (در PCA) دانستیم که برای (مجذور) ماتریس‌های متقارن این مطلب صادق است که $\mathbf{P{=}U}$ و مساوی با ماتریس بردارهای ویژه است. ماتریس فوق $\mathbf{M}$، مجذور هســـت، اما متقارن نیســـت. در چنین حالتی به جای $\mathbf{M = U\Delta U'}$ رابطه $\mathbf{M = U\Delta\Delta^{-1}}$ صـــدق می‌کند. به عبارت دیگر $\mathbf{U}$ لزوماً متعامد نیســـت (زیرا در حالت متعامد داریم $\mathbf{U^{-1} = U'}$).

در نتیجه ما به ســادگی می‌توانیم ســاختار ویژه M را در روش ســنتی با ضــرایب لاگرانژ آزمایش کنیم. فقط نتیجه SVD تفاوت اندکی با ماتریس‌های متقارن خواهد داشت.

معادله ماتریس همان است که در بالا به دست آمد. ارزش‌های ویژه ρ^2 اینک به صورت λ و بردارهای ویژه به صورت $\mathbf{u}$ نشان داده خواهند شد:

$$(\mathbf{R}_{yy}^{-1}\mathbf{R}'_{xy}\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0} \;\; or \;\; (\mathbf{M} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

ضرایب لامبدأ از طریق معادله ویژه معلوم می‌شوند:

$$\left|\mathbf{R}_{yy}^{-1}\mathbf{R}'_{xy}\mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xy} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}\right| = \mathbf{0} \;\text{ or }\; \left|\mathbf{M} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}\right| = \mathbf{0}$$

چیزی‌که ابتدا نیاز داریم ماتریس همبستگی $\boldsymbol{R}$ است که به ماتریس‌های فرعی $\boldsymbol{R}_{xx}$، $\boldsymbol{R}_{xy}$ و $\boldsymbol{R}_{yy}$ تقسیم شده است. برای مجموعه داده‌های اختصاری ما n=۱۲ کشور، ماتریس $\boldsymbol{R}$ بدین‌گونه است:

$$\mathbf{R} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1.0000 & 0.0027 & 0.4643 & 0.5348 \\ 0.0027 & 1.000 & -0.1526 & 0.5388 \\ \hline 0.4643 & -0.1526 & 1.0000 & 0.4663 \\ 0.5348 & 0.5388 & 0.4663 & 1.0000 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{R_{xx}} & \mathbf{R_{xy}} \\ \mathbf{R_{xy}} & \mathbf{R_{yy}} \end{bmatrix}$$

ابتدا R_{yy}^{-1} و R_{yy}^{-1} را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbf{R}_{yy}^{-1}=\begin{bmatrix}1.000 & 0.466\\ 0.466 & 1.000\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{0.783}\begin{bmatrix}1.000 & -0.466\\ -0.466 & 1.000\end{bmatrix}'$$
$$=\begin{bmatrix}1.278 & -0.596\\ -0.596 & 1.278\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{xx}^{-1}=\begin{bmatrix}1.000 & 0.003\\ 0.003 & 1.000\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{0.999}\begin{bmatrix}1.000 & -0.003\\ -0.003 & 1.000\end{bmatrix}'$$
$$=\begin{bmatrix}1.000 & -0.003\\ -0.003 & 1.000\end{bmatrix}$$

حالا ماتریس مختلط $\mathbf{M}=\mathbf{R}_{\mathbf{yy}}^{-1}\mathbf{R}'_{\mathbf{ny}}\mathbf{R}_{\mathbf{xn}}^{-1}\mathbf{R}_{\mathbf{ny}}$ را حساب می‌کنیم:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1.278 & -0.596\\ -0.596 & 1.278\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.464 & -0.153\\ 0.535 & 0.539\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.000 & -0.003\\ -0.003 & 1.000\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.464 & 0.535\\ -0.153 & 0.539\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0.207 & -0.131\\ 0.069 & 0.636\end{bmatrix}$$

آنگاه معادله ویژه چنین است:

$$|\mathbf{M}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}|=\begin{vmatrix}0.207-\lambda & -0.131\\ 0.069 & 0.636-\lambda\end{vmatrix}=0$$
$$(0.207-\lambda)(0.636-\lambda)-(0.069)(-0.131)=0$$
$$\lambda^2-0.843\lambda+0.141=0$$
$$\lambda_i=\frac{0.843\pm(0.710-0.563)^{1/2}}{2}$$

دو ارزش ویژه عبارتند از $\lambda_1=$ ۰/۶۱۴ و $\lambda_2=$ ۰/۲۲۹.

بردارهای ویژه $\mathbf{M}$ از معادله ماتریس $(M-\lambda\mathrm{I})u=$ ۰ به دست می‌آیند.

ابتدا $\lambda=$ ۰/۲۱۴ را وارد می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0.207-0.614 & -0.131 \\ 0.069 & 0.636-0.614 \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(0.207-0.614)_{u1} - 0.131_{u2} = 0$$
$$0.069_{u1} + (0.636-0.614)_{u2} = 0$$
$$-0/407_{u1} - 0.131_{u2} = 0$$
$$0.069_{u1} + 0.022_{u2} = 0$$
$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.131 \\ 0.407 \end{bmatrix} \quad normalized: \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.986 \\ -0.168 \end{bmatrix}$$

سپس $\lambda = ۰/۲۲۹$ را در معادله ماتریس وارد می‌کنیم:

$$U = \begin{bmatrix} -0.306 & 0.986 \\ 0.952 & -0.168 \end{bmatrix}$$

دو ارزش ویژه در قطر ماتریس Δ به هم می‌پیوندند:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0.614 & 0 \\ 0 & 0.229 \end{bmatrix}$$

خواننده می‌تواند بررسی کند که $\mathbf{M} = U\Delta U^{-۱}$.

۹-۱۰ ماتریس‌های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ وزن‌های کانونی

ارزش‌های ویژه $\mathbf{M}$ مجذور ضرایب همبستگی کانونی می‌باشند. البته بردارهای ویژه هنوز بردارهای $\mathbf{b}$ مربوط به ضرایب b نیستند، زیرا این شرط الحاقی که $\mathbf{b'R_{yy}b} = ۱$، برآورده نشده است، یعنی هر متغیر کانونی Y^* بایستی استاندارد شده باشد. برای این که این شرط شامل گردد، هر بردار ویژه $\mathbf{u}$ از $\mathbf{M}$، بر انحراف معیار نظیر آن تقسیم می‌شود، $(\mathbf{u'R_{yy}u})^{\frac{1}{2}}$. برای بردار ویژه اول $\mathbf{u'R_{yy}u}$ برابر است با :

$$\mathbf{u}_1'\mathbf{R}_{\mathbf{yy}}\mathbf{u}_1 = [-0.306 \quad 0.952]\begin{bmatrix}1 & 0.466\\ 0.466 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.306\\ 0.952\end{bmatrix} = 0.728$$

بدین

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{(0.728)^{1/2}}\begin{bmatrix}-0.306\\ 0.952\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.359\\ 1.116\end{bmatrix}$$

ترتیب:

برای بردار ویژه دوم $\mathbf{U}'\mathbf{R}_{\mathbf{yy}}\mathbf{u}$ برابر است با :

$$\mathbf{u}_1'\mathbf{R}_{\mathbf{yy}}\mathbf{u}_2 = [0.986 \quad -0.168]\begin{bmatrix}1 & 0.466\\ 0.466 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.986\\ -0.168\end{bmatrix} = 0.846$$

از این رو:

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{(0.84)^{1/2}}\begin{bmatrix}0.986\\ -0.168\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1.072\\ -0.182\end{bmatrix}$$

دو بردار $\mathbf{b_i}$، در ماتریس $\mathbf{B}$ مربوط به ضرایب b جمع شده‌اند:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}-0.359 & 1.072\\ 1.116 & -0.182\end{bmatrix}$$

ما ثابت می‌کنیم که $\mathbf{B}'\mathbf{R}_{\mathbf{yy}}\mathbf{B} = \mathbf{I}$ است، طوری‌که هر Y^* استاندارد شده است.

به منظور محاسبه ماتریس $\mathbf{A}$ مربوط به ضرایب a، می‌توانیم شیوه طولانی مشابه آنچه در مورد B به کار گرفتیم را دنبال کنیم. در قسمت فوق فرمولی برای $\mathbf{A}$ حاصل شد، با به کار بردن اطلاعات مربوط به $\mathbf{B}$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_{\mathbf{xx}}^{-1}\mathbf{R}_{\mathbf{xy}}\mathbf{B}\boldsymbol{\Delta}^{-1/2}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & -0.003\\ -0.003 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.464 & 0.535\\ -0.153 & 0.539\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.359 & 1.072\\ 1.116 & -0.182\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}1/(0.614)^{1/2} & 0\\ 0 & 1/(0.229)^{1/2}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0.547 & 0.837\\ 0.836 & -0.549\end{bmatrix}$$

ما ثابت می‌کنیم $\mathbf{B'R_{xx}A = I}$، بدین معنی که متغیر کانونی X^* استاندارد شده است.

۱۰-۱۰ متغیرهای کانونی X^* و Y^*

حال که ماتریس‌های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را محاسبه کردیم، می‌توانیم نمرات متغیرهای کانونی X^* و Y^* را تعیین کنیم. این نمرات را از معادلات $\mathbf{X^* = XA}$ و $\mathbf{Y^* = YB}$ به دست می‌آوریم (توجه داشته باشید که برای یک جفت از متغیرهای کانونی این یک نشانه‌ی برداری است: $X^* = Xa$ و $Y^* = Yb$).

به صورت جبری، این‌ها معادلات زیر را تشکیل می‌دهند:

$$X_1^* = 0.547X_1 + 0.836X_2$$
$$X_2^* = 0.837X_1 - 0.549X_2$$
$$X_1^* = -0.359Y_1 + 1.116Y_2$$
$$X_2^* = 1.072Y_1 - 0.182Y_2$$

در این جا X_1^* و Y_1^* اولین جفت از متغیرهای کانونی هستند که بالاترین همبستگی کانونی را نشان می‌دهند ($\sqrt{۰/۶۱۴}$). در این معادلات مشاهده می شود که بیشترین وزنی که به متغیرهای $X_۲$ و $Y_۲$ نسبت داده شده به ترتیب ۰/۸۳۶ و ۱/۱۱۶ است. بنابراین اولین جفت متغیرهای کانونی عمدتاً به رابطه بین درصد کشاورزان و سطح خشونت اشاره دارد.

جفت دوم، X_1^* و Y_1^*، وزن زیادی را به $X_۱$ و $Y_۱$ تخصیص می‌دهد. همبستگی بین‌گروهی میان شاخص جینی و ثبات رهبری به طور ویژه در این جفت نشان داده شده است.

اکنون از روی معادلات فوق، می‌توان نمرات متغیر های کانونی را محاسبه کرد. برای این کار ابتدا بایستی مقادیر $X_۱$، $X_۲$، $Y_۱$ و $Y_۲$ استاندارد شده باشند. مثلاً اولین واحد در ماتریس داده‌ها را در نظر بگیرید: یوگسلاوی. نمرات روی X_1 و $X_۲$ عبارتند از ۴۳/۷ و ۶۷، که در شکل نمرات استاندارد Z می‌شوند ۱/۲۵۳- و ۰/۷۷۶ . با جانشین کردن این مقادیر در معادله X_1^* نمره یوگسلاوی را در متغیر کانونی اوّل از مجموعه نخست به دست می‌آوریم: ۰/۰۳۷-=(۰/۷۷۶)۰/۸۳۶+(۱/۲۵۳-)۰/۵۴۷. به همین طریق می‌توان تمام نمرات متغیر کانونی را برای هر یک از ۱۲ کشور حساب کرد. برای نشان دادن این شیوه ابتدا ماتریس داده‌ها را به شکل نمرات Z ارائه می‌کنیم (جدول ۳-۱۰). از این نمرات، ماتریس نمرات متغیرهای کانونی را می‌توان به دست آورد (۴-۱۰).

جدول ۳-۱۰ نمرات z

Z_{x1}	Z_{x2}	Z_{y1}	Z_{y2}
-۱/۲۵۳	۰/۷۷۶	-۱/۶۶۰	-۰/۵۶۷
-۱/۱۸۵	۰/۳۲۶	-۰/۲۹۹	-۰/۵۴۳
-۱/۰۷۹	-۰/۴۳۹	-/۸۵۴	-۰/۵۶۷
-۰/۸۰۶	۰/۹۵۶	-۰/۱۸۰	-۰/۵۰۰
-۰/۵۸۵	۰/۴۱۶	۰/۵۸۲	۰/۸۲۳
-۰/۵۱۷	-۱/۶۵۳	-۰/۲۹۹	-۰/۵۶۷
۰/۵۱۳	-۱/۵۱۸	۰/۳۹۰	-۰/۵۶۷
۰/۵۵۰	۰/۰۱۱	-۱/۶۶۰	-۰/۵۶۶
۰/۶۷۱	-۰/۹۳۴	۰/۸۲۲	-۰/۵۶۶
۱/۰۸۱	۱/۴۰۶	۰/۹۳۴	۱/۰۷۰
۱/۲۲۸	-۰/۳۴۹	۰/۷۲۶	-۰/۰۳۹
۱/۳۸۱	۰/۰۰۱	۰/۷۹۰	۲/۵۸۹

در مرحله بعد، همبســـتگی بین متغیر های کانونی و متغیر های اولیه را می‌توان آزمود. این همبستگی‌ها را گاهی **همبستگی‌های ساختاری** می‌نامند. این‌ها امکان می‌دهند تفسیر بهتری از متغیرهای کانونی فراهم گردد. در جدول ۵-۱۰ ماتریس مربوط به تمام همبستگی‌ها بین چهار متغیر و دو جفت متغیر کانونی را می‌بینیم. گوشه بالا سمت چپ شامل ماتریس همبستگی‌های اصلی است.

جدول ۴-۱۰ متغیرهای کانونی

X_1^*	X_2^*	Y_1^*	Y_2^*
-۰/۰۴	-۱/۴۷	-۰/۰۴	-۱/۶۸
-۰/۳۸	-۱/۱۷	-۰/۵۰	-۰/۲۲
-۰/۹۶	-۰/۶۶	-۰/۹۴	۱/۰۲
۰/۳۶	-۱/۲۰	-۰/۱۴	-۱/۱۷
۰/۰۳	-۰/۷۲	۰/۷۱	۰/۴۷
-۱/۶۷	۰/۴۸	-۰/۵۳	-۰/۲۲
-۰/۹۹	۱/۲۶	-۰/۷۷	۰/۵۲
۰/۳۱	۰/۴۵	-۰/۰۴	-۱/۶۸
-۰/۴۱	۱/۰۷	-۰/۹۳	۰/۹۸
۱/۷۷	۰/۱۳	۰/۸۶	۰/۸۱
۰/۳۸	۱/۲۲	-۰/۳۰	۰/۷۹
۱/۵۹	۰/۶۱	۲/۶۱	۰/۳۸

جدول ۵-۱۰ تمام همبستگی‌ها

	x_1	x_2	y_1	y_2	x_1^*	x_2^*	y_1^*	y_2^*
x_1	۱/۰۰۰	-۰/۰۰۳	۰/۴۶۴	۰/۵۳۵	۰/۵۴۹	۰/۸۳۶	۰/۴۳۰	۰/۴۰۰
x_2	۰/۰۰۳	۱/۰۰۰	-۰/۱۵۳	۰/۵۳۹	۰/۸۳۷	-۰/۵۴۷	۰/۶۵۶	-۰/۲۶۲
y_1	۰/۴۶۴	۰/۱۵۳	۱/۰۰۰	۰/۴۶۶	۰/۱۲۶	۰/۴۷۳	۰/۱۶۱	۰/۹۸۷
y_2	۰/۵۳۵	۰/۵۳۹	۰/۴۶۶	۱/۰۰۰	۰/۷۴۲	۰/۱۵۲	۰/۹۴۸	۰/۳۱۸
x_1^*	۰/۵۴۹	۰/۸۳۷	۰/۱۲۶	۰/۷۴۲	۱/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۷۸۳	۰/۰۰۰
x_2^*	۰/۸۳۶	۰/۵۴۷	۰/۴۷۳	۰/۱۵۲	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۴۷۹
y_1^*	۰/۴۳۰	۰/۶۵۶	۰/۱۶۱	۰/۹۴۸	۰/۷۸۲	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۰۰۰
y_2^*	۰/۴۰۰	-۰/۲۶۲	۰/۹۸۷	۰/۳۱۸	۰/۰۰۰	۰/۴۷۹	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰

گوشه پایین سمت راست شامل همبستگی‌های بین متغیرهای کانونی است. در این بخش همبستگی‌های کانونی را می‌یابیم ($\sqrt{0/614}=0/783$ و $\sqrt{0/229}=0/479$). همچنین مشاهده می‌شود که جفت دوم در حقیقت با جفت نخست ناهمبسته است. گوشه پایین سمت چپ جدول (یا بالا سمت راست) حاوی همبستگی‌های ساختاری است. مشاهده می‌کنیم که جفت اول متغیرهای کانونی بالاترین همبستگی را با x_2 (درصد کشاورزان) و y_2 (میزان خشونت) دارد، در حالی که جفت دوم بیشتر به x_2 (شاخص جینی) و y_1 (ثبات رهبری) ارتباط دارد. این را قبلاً از ماتریس‌های وزن‌های استاندارد شده کانونی ($\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$) به دست آورده بودیم.

۱۱-۱۰ یک رویکرد علّی به تحلیل همبستگی کانونی

در سال ۱۹۶۸ استورات و لاو، یک شکل نامتقارن تحلیل همبستگی کانونی را ارائه کردند. البته همبستگی‌های کانونی محاسبه شده در بالا، ضرایب متقارن هستند. مثلاً ارزش ویژه $\lambda_1 = 0/614$ که مبین مجذور همبستگی بین جفت اول متغیرهای کانونی است را می‌توان به عنوان بخشی از واریانس در مجموعه y (ویژگی‌های سیاسی) تفسیر نمود که به وسیله مجموعه x (ویژگی‌های اقتصادی) تبیین می‌شود. البته اگر کسی مایل باشد می‌تواند راه دیگری انتخاب کند: λ_1 نیز بخشی از واریانس عدم تعادل اقتصادی است که توسط عدم ثبات سیاسی تبیین می‌شود. به بیان دیگر بین متغیرهای مستقل و وابسته یعنی علّت و معلول تمایزی قائل نمی شود. به این خاطر، استورات و لاو یک «**شاخص اضافی**»[1] را پیشنهاد کرده‌اند. این شاخص حد قابلیت بازسازی مجموعه y براساس اطلاعات منحصر به x را اندازه می‌گیرد. چنین به نظر می‌رسد که این شاخص معادل میانگین

1. Index of redundancy

حسابی تمام ضرایب تعیین چندگانه است که بوسیله تحلیل‌های رگرسیون چندگانه با یک متغیر y که به طور مکرر روی تابع مجموعه کلی x به عمل می‌آید، حاصل می‌شود.

۱۲-۱۰ آزمون‌های معناداری

به‌منظور آزمون اینکه آیا همبستگی‌های کانونی معنادار هستند یا نه، آزمون لامبدای ویلکز (Λ) را بکار می‌بریم، این مقیاس، درست شبیه t استودنت، T هاتلینگ و F فیشر است که نسبت پراکندگی بین‌گروهی و درون‌گروهی را تحت شرایط فرض صفر از روی نمونه مقایسه می‌کند. Λ ویلکز همتای چند متغیره این نسبت به شکل کلی‌تر است، طوری که t، T و F، موارد خاصی از Λ هستند. ازاین‌رو، این مقیاس برای شیوه‌های تحلیل چند متغیره ی پیچیده‌تر مانند تحلیل افتراقی چندگانه، تحلیل واریانس و کوواریانس چند متغیره (نگاه کنید به بخش زیر) و تحلیل همبستگی کانونی به کار می‌رود.

در تحلیل همبستگی کانونی Λ ویلکز به عنوان حاصل ضرب واریانس‌های خطا قابل محاسبه است که واریانس‌های خطا با کسر ارزش‌های ویژه (یعنی مجذور همبستگی‌های کانونی که بخشی از واریانس تبیین کننده است) از ۱ تعیین می‌شوند. در مثال ما:

$$\Lambda = \prod_{i=1}^{2}(1-\lambda_i)$$

$$=(۱-۰/۶۱۴)(۱-۰/۲۲۹)=۰/۲۹۸$$

بارتلت یک مقیاس V ساخت که توزیع آن به صورت مجذور خی با pq درجه آزادی است که p و q تعداد متغیرهای مجموعه x و مجموعه y را نشان می‌دهند:

$$V = -[n-1-(p+q+1)/2]\ln\Lambda$$

$$= -[۱۲-۱-(۲+۲+۱)/۲]\ ln\ ۰/۲۹۸$$

$$=۱۰/۲۹$$

برای pq=۴ درجه آزادی، این مقدار، کمی بزرگتر از مقدار بحرانی $x^۲$ یعنی ۹/۴۸۸ است که تحت فرض صفر برای سطح معناداری ۰/۰۵ =∞ یافت می شود. بنابراین، همبستگی معناداری بین عدم تعادل اقتصادی و عدم ثبات سیاسی کشورها برقرار است. فرض دی توکوویل و راسِت به طور تجربی مورد تأیید قرار می‌گیرد.

مقیاس V را می‌توان به طور افزایشی هم تقسیم (نصف) کرد، چنان که می‌توان یک آزمون جداگانه به عمل آورد تحت این عنوان که آیا بین ویژگی‌های اقتصادی و سیاسی برای همبستگی کانونی دوّم (که عمدتاً شاخص جینی و ثبات سیاسی را به هم ربط می‌دهد) نیز همبستگی معناداری

وجود دارد. برای این منظور همبستگی کانونی اوّل را از لامبدای ویلکز کنار می‌گذاریم، طوری که در این مثال اختصاری فقط $(1-\lambda_2)$ باقی می‌ماند:

$$V_2 = -[۱۲-۱-(۲+۲+۱)/۲] ln\ (۱-۰/۲۲۹) = ۲/۲۱$$

برای ۱=(۱-q)(۱-P) درجه آزادی این مقدار معنادار نیست. در مثال اختصاری ما که به خاطر مقدار کم مشکل داریم، همبستگی کانونی دوم معنادار نمی‌شود.

این موضوع را با مرور جداگانه تحلیل‌های رگرسیون چندگانه نیز می‌توان دید که در آن یک متغیر y به طور مکرر روی مجموعه x مورد تحلیل قرار می‌گیرد. از این طریق معلوم می شود که تنها y_2 (میزان خشونت) همبستگی معناداری با ویژگی‌های اقتصادی دارد، در حالی که در مورد y_1 (ثبات رهبری) چنین نیست. به این خاطر، این متغیر سیاسی y_1 است که عمدتاً ساختار کانونی ایده‌ال را به هم می‌زند، چنان که با هیچ‌یک از متغیرهای اقتصادی همبستگی معناداری نداشته (همبستگی بین‌گروهی خیلی پایین است) و بیشتر با متغیر سیاسی دیگر همبسته است (همبستگی درون‌گروهی بالاست).

۱۳-۱۰ نتایج حاصل از نرم افزار SPSS ویندوز از تحلیل همبستگی کانونی

هنگام به دست آوردن نتایج تحلیل همبستگی کانونی در SPSS یک مشکل بروز می‌کند. SPSS قبلاً مجبور بود برای انجام تحلیل همبستگی کانونی نرم افزار جداگانه‌ای تحت عنوان 'CANCORR' به کار ببرد. در سال ۱۹۸۶ با تبدیل به SPSSX، 'CANCORR' از این مجموعه حذف شد و امروزه به کاربران گفته می‌شود که آن‌ها می‌توانند تحلیل همبستگی کانونی را با زیر برنامه 'MANOVA' (تحلیل چند متغیره واریانس و کوواریانس) اجرا کنند. MANOVA برای چندین متغیر وابسته در سطح سنجش فاصله‌ای و همچنین عامل‌های سطوح سنجش پایین‌تر و کوواریانس سطح سنجش فاصله‌ای تجهیز شده است. وقتی‌که عامل‌ها درخواست نشوند، بلکه تنها متغیرهای وابسته و کوواریه‌ها درخواست شوند، به طرح 'CANCORR' دست می‌یابیم. همه این‌ها را در فصل بعد با مرور MANOVA روشن خواهیم کرد. ما از هر نوع تشویش ذهنی که متأسفانه از این تصمیم طراحان SPSS برای حذف برنامه CANCORR از SPSS قدیم پیش آمده پوزش می‌طلبیم. این برنامه از ظرافت و فشردگی خاصی برخوردار بود. برای این که یکپارچگی فصل‌های کتاب حفظ شود، مایل نیستیم SPSS را با برنامه دیگری مثل SAS و BMDP جایگزین کنیم.

انتخاب یا ساختن فایل داده‌ها

نحوه باز کردن SPSS و انتخاب یا ساختن و ذخیره کردن یک فایل داده‌ها در فصل ۴ نشان داده شده است.

اجرای شیوه آماری

روی واژه Analyze، ســـپس روی واژه ANOVA Models و بعد Multivariate کلیک کنید. با این کار دریچه محاوره‌ای تحلیل واریانس چند متغیره گشـــوده می‌شـــود. برای اجرای یک تحلیل کانونی، شما عامل‌ها را انتخاب نخواهید کرد بلکه تنها متغیرهای وابسته و کوواریه‌ها را بر می‌گزینید. روی $Y_۱$ و $Y_۲$ در قســمت Source Variable list و ســپس کلید ▹ مربوط به متغیرهای وابســته کلیک کنید. روی $x_۱$ و $x_۲$ در قسمت فهرست متغیرها کلیک کنید و سپس روی کلید ▹ قسمت Covariates کلیک نمایید.

روی واژه Model کلیک کنید. Discriminant Analysis را انتخاب کنید: این عمل به یک تحلیل همبســـتگی کانونی منجر خواهد شـــد. Egenvalues (ارزش‌های ویژه) را انتخاب کنید. نگران اثرات تعاملی نباشید وقتی‌که عامل‌ها انتخاب نشده باشند، این‌ها محاسبه نخواهند شد (البته مگر این که حاصل‌ضرب‌های کوواریه را با دستورات محاسباتی تعریف کرده باشید). روی واژه continue کلیک کنید تا به دریچه محاوره‌ای اصـــلی برگردید. روی واژه ok کلیک کنید. اکنون SPSS شـــیوه آماری مورد نظر را اجرا می‌کند و نتایج مربوط به تحلیل همبستگی کانونی پدیدار خواهد شد.

ذخیره کردن نتایج را فراموش نکنید. روی واژه file، ســـپس save as کلیک کرده، آنگاه نام مورد نظر را با پسوند lst. تایپ کرده و روی ok کلیک کنید.

چنانچه قبل از این گفتیم نتایج SPSS را با باز کردن یک دریچه دســـتورات و تایپ دســـتورات SPSS نیز می‌توان بدســـت آورد. روی واژه File ســـپس New و بعد SPSS Syntax کلیک کنید. دســـتورات را تایپ کرده آنگاه مکان‌نما را به خط اول انتقال دهید و روی علامت ▹ در خط نشـــانه کلیک کنید.

دستورات عبارتند از:

```
1  MANOVA y1 y2 with x1  x2
2   /DISCRIM STANDARD CORRELATIONS ALPHA (1)
3  /PRIN SIGNIF (EIGEN)
4  /DESIGN.
```

عبارت 'MANOVA' در جمله ۱ تحلیل چند متغیره واریانس را درخواست می‌کند. متغیرهای وابسته $y_۱$ و $y_۲$ هستند. این که واژه 'By' به کار نرفته، نشان دهنده این است که عاملی با سطح سنجش پایین وجود ندارد، واژه 'with' نشـان می‌دهد که کوورایه‌ها با سـطح سـنجش فاصـله‌ای از پی خواهد آمد، این ها $x_۱$ و $x_۲$ هستند.

در جمله ۲، یک تحلیل همبستگی کانونی با دستور 'DISCRIM' درخواست شده است. دستور STANDARD بدین معناست که می‌خواهیم وزن‌های کانونی استاندارد شده را داشته باشیم. با دستور CORRELATIONS همبستگی‌های بین متغیرهای اصلی و متغیرهای کانونی را درخواست می‌کنیم؛ این‌ها همبستگی‌های ساختاری هستند. با دستور 'ALPHA' سطح معناداری متغیرهای کانونی را تعیین می‌کنیم. پیش گزینه سیستم ۰/۱۵ است. با تنظیم حداکثر ۱ ((۱)ALPHA) می‌توانیم اطمینان حاصل کنیم که تمام متغیرهای کانونی، حتی آن‌هایی که معنادار نیستند در تحلیل حضور خواهند داشت.

دستور جمله ۳ ارزش‌های ویژه (مجذورات ضرایب همبستگی کانونی) را درخواست می‌کند. این جمله در حقیقت ضروری نیست چون ارزش‌های ویژه خود به خود در این تحلیل چاپ خواهند شد.

مشکلی که با MANOVA داریم این است که پیش‌گزینه سیستم به‌گونه‌ای تنظیم شده که مقادیر زیادی اطلاعات در خروجی بدست می‌دهد که برای تحلیل همبستگی کانونی لازم نیستند، زیرا همبستگی‌های درون‌گروهی و بین‌گروهی خانه‌های جدول را به دست می‌دهد، در حالی که این جا خانه‌ای وجود ندارد، چون عاملی وجود ندارد. در ادامه این نتایج را حذف کرده‌ایم. همچنین خواننده بهتر است از هر گونه اطلاعات وابسته به خانه‌ها (cells) و تحلیل واریانس (analysis of variance designs) چشم‌پوشی نماید. نتایج به این شرح است:

** ANALYSIS Of VARIANCE—DESIGN 1 * *
EFFECT .. WITHIN CELLS Regression
Multivariate Tests of Significance (S=2 N=3)

Test Name	Value	Approx.F	Hypoth. DF	Error DF	Sig.of F
Pillais	.84278	3.27723	4.00	18.00	.035
Hotellings	1.88474	3.29829	4.00	14.00	.042
Wilks	.29789	3.32878	4.00	16.00	.036
Roys	.61349				

Eigenvalues and Canonical Correlations

Root No.	Eigenvalue	Pct.	Cum. Pct.	Canon cor.	Sq. cor
1	1.587	84.215	84.215	.783	.613
2	.298	15.785	100.000	.479	.229

** ANALYSIS OF VARIANCE –DESIGN 1 * *
EFFECT .. WITHIN CELLS Regresssion (CONT.)
Univariate F-tests with (2.9) D. F.

Variable Sq.Mul. R Mul.R Adj. R-sq. Hypoth. MS Error MS

Y1 .23929 .48917 .07024 51.32790 36.26121
Y2 .57477 .75814 .48027 139502.6540
22935.17716

Variable	F	Sig. Of F
Y1	1.41550	.292
Y2	6.08248	.021

* * ANALYSIS OF VARIANCE –DESIGN 1 * *
Standardized Canonical Coefficients for DEPENDENT Variables
Function No.

Variable	1	2
Y1	-.359	1.072
Y2	1.116	-.182

Correelations between DEPENDENT and Canonical Variables
Function No.

Variable	1	2
Y1	.161	.987
Y2	.948	.317

* * ANALYSIS OF VARIANCE –DESIGN 1 * *
Variance explained by Canonical Variables of DEPENDENT Variables

CAN. VAR.	Pct Var DE	Cum Pct DE	Pct Var Co	Cum Pct Co
1	46.262	28.381	28.381	28.381
2	53.738	100.000	12.321	40.703

Standardized Canonical Coefficients for COVARIATES
CAN. VAR.

COVARIATES	1	2
X1	.547	.837
X2	.836	-.549

* * ANALYSIS OF VARIANCE –DESIGN 1 * *
Standardized Canonical Coefficients for DEPENDENT Variables
Function No.

Covariate	1	2
X1	.549	.836

X2	.837	-.547

Variance explained by Canonical Variables of the COVARIATES

CAN. VAR.	Pct Var DE	Cum Pct DE	Pct Var Co	Cum Pct Co
1	30.749	30.749	50.122	50.122
2	11.436	42.186	49.878	100.000

* * ANALYSIS OF VARIANCE –DESIGN 1 * *

Regression analysis for WITHIN CELLS error term(CONT.)

Dependent Variable .. Y1 Stability of Leadership

COVARIATE	B	Beta	Std. Err.	t-Value	Sig. of t
X1	.15259	.46476	.095	1.599	.144
X2	-.04322	-.15384	.082	-.529	.610

COVARIATE	Lower -95%	CL-UPPer
X1	-.063	.369
X2	-.228	.142

* * ANALYSIS OF VARIANCE –DESIGN 1 * *

Regression analysis for WITHIN CELLS error term(CONT.)

Dependent Variable .. Y2 Violence

COVARIATE	B	Beta	Std. Err.	t-Value	Sig. of t
X1	5.89064	.53339	2.401	2.454	.037
X2	5.07855	.53734	2.054	2.472	.035

COVARIATE	Lower -95%	CL-UPPer
X1	.460	11.321
X2	.431	9.726

فصل ۱۱

شیوه‌های آماری مربوط به چند متغیر وابسته

در این فصل پایانی کتاب، دو شیوه‌ی تحلیل با متغیرهای وابسته چندگانه مورد بحث قرار می‌گیرد. تحلیل واریانس چند متغیره (MANOVA) نوعی بسط طرح آنوا است که در آن به جای یک متغیر وابسته چندین متغیر وابسته با سطح سنجش فاصله‌ای وجود دارد. به همین ترتیب تحلیل کوواریانس (ANCOVA) نیز به تحلیل چند متغیره کوواریانس (MANCOVA) تغییر می‌یابد.

مثال تحقیقاتی ما مسأله‌ای از روال نارول[۱] با عنوان دستورات اخلاقی (۱۹۸۲) است که در آن می‌پرسد: بهترین جا برای زندگی روی زمین کجاست؟

شیوه‌ی دوم تحلیل، تحلیل افتراقی چندگانه است (MDA)، که بسط تحلیل افتراقی دو گروهی است، چون به جای دو گروه، چندین گروه مورد تحلیل قرار می‌گیرد. در حالت کدگذاری دامی، این روش به وارد کردن بیش از یک متغیر دامی وابسته، منجر می‌شود.

مثال تحقیقاتی مربوط به این شیوه، مطالعه کنت ال ویلسون[۲] (۱۹۸۰) است که در آن پس از تحلیلی از نواحی مهاجرنشین کوبایی در میامی یک مدل بازار کار توصیه شده است.

در آخر، ما بار دیگر نشان خواهیم داد که چگونه شیوه‌های سنتی تحلیل چند متغیره، یک خانواده را تشکیل می‌دهند. متغیرهای دامی وابسته به تحلیل افتراقی چندگانه به عنوان مجموعه‌ای از متغیرهای وابسته در نظر گرفته می‌شوند، متغیرهای مستقل (متمایز کننده) نیز به عنوان یک مجموعه در نظر گرفته شده و یک تحلیل همبستگی کانونی بین این دو مجموعه به عمل خواهد آمد. نتایج با نتایج حاصل از تحلیل افتراقی چندگانه یکسان خواهد بود. به همین ترتیب می‌توان تحلیل واریانس چندمتغیره را هم به تحلیل همبستگی کانونی پیوند داد و علت حذف تحلیل همبستگی کانونی از spss/ pc و قرار گرفتن آن تحت عنوان MANOVA دقیقاً همین نکته است.

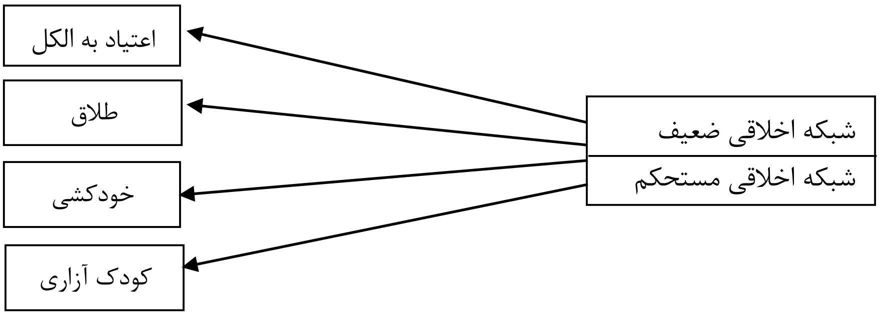
1. Raoul Naroll
2 . Kenneth l. Wilson

۱-۱۱ تحلیل واریانس چند متغیره: بهترین جا برای زندگی روی زمین کجاست؟

۱-۱-۱۱ مسأله تحقیق و طرح علّی مربوط به آن

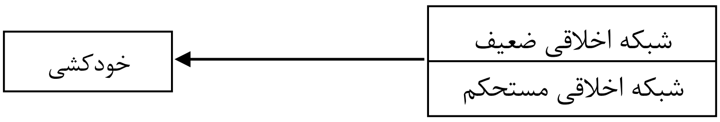
روال نارول در کتاب خود با عنوان دستورات اخلاقی (۱۹۸۲) داده‌های آماری پیرامون بیماری روانی، اعتیاد به الکل، طلاق، خودکشی، سوءاستفاده از کودکان، آدم‌کشی و مشکلات دیگر را از تعداد زیادی از کشورها جمع آوری کرد. او به این نتیجه رسید که این مشکلات را از طریق «شبکه‌های اخلاقی» کامل می‌توان کاهش داد. منظور او از «شبکه اخلاقی» یک گروه اولیه است که به عنوان گروه هنجاری مرجع عمل می‌کند. یکی از انواع شبکه‌های اخلاقی خانواده گسترده است. از نظر نارول تاریخچه نظریه شبکه اخلاقی به حضرت موسی (ع) و کنفسیوس بر می‌گردد، امّا آن‌ها هیچکدام نمی‌توانستند بفهمند که برای این نظریه چه مقدار دلیل و برهان وجود دارد.

مسأله تحقیقی که در این جا ارائه شد دارای ساختار زیر است؛ واحدهای تحلیل، کشورها هستند. تعداد زیادی متغیر وابسته در سطح سنجش فاصله‌ای (مصرف الکل، نرخ طلاق و غیره) و یک متغیر مستقل دو بخشی وجود دارد (شبکه‌های نیرومند در مقابل شبکه‌های ضعیف اخلاقی). طرح مربوطه در شکل ۱-۱۱ نشان داده شده است.



شکل ۱-۱۱ طرح تحلیل واریانس چندمتغیره

اگر فقط یک متغیر وابسته، مثلاً خودکشی را بگیریم در این صورت یک طرح تحلیل واریانس (آنوای) یک‌طرفه خواهیم داشت. و از آن جا که متغیر مستقل یک متغیر دو بخشی است، آزمون F به یک آزمون ساده t برای تفاوت بین دو میانگین تنزّل می‌یابد (نگاه کنید به فصل ۴)، چنان که در شکل ۲-۱۱ نشان داده شده است.

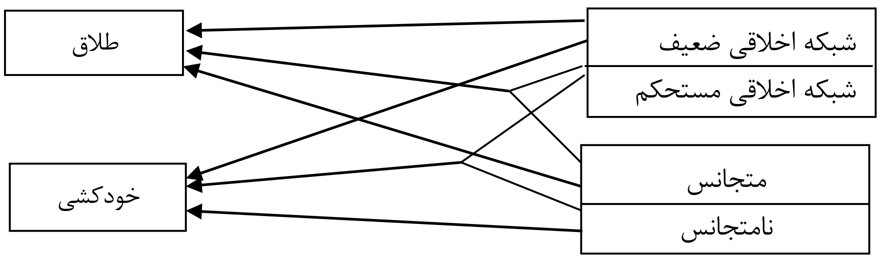


شکل ۲-۱۱ ساختار یک طرح تحلیل واریانس یک طرفه

از آنجاکه در نظریه شبکه اخلاقی متغیرهای وابسته منحصر به خودکشی نبوده و متغیرهای وابسته بیشتری وجود دارد، ما به جای آنوا (ANOVA) از مانوا (MANOVA) صحبت می‌کنیم. M نشان دهنده‌ی چند متغیر وابسته است که در سطح سنجش فاصله‌ای اندازه‌گیری شده‌اند.

از این لحظه متغیر مستقل اسمی یا رتبه‌ای دیگری وارد می‌شود (علاوه بر متغیر مستقل که از قبل حضور داشته است). همچون حالت آنوا ما فقط از طرح یک سویه به دو سویه تغییر وضعیت می‌دهیم. نمونه‌ای از چنین متغیری تجانس است. طبق نظر نارول چنانچه کشورها از لحاظ مذهب، نژاد و زبان تفاوت چندانی نداشته باشند، متجانس خواهند بود و اگر برعکس آن باشد نامتجانس هستند. بلژیک و نترلند ملل نامتجانس هستند، اوّلی به دلیل ناهمسانی زبانی و دومی به دلیل ناهمسانی مذهبی نامتجانس است. دانمارک، نروژ و سوئد نمونه‌هایی از ملل متجانس هستند.

با فرض این که نه تنها شبکه‌های اخلاقی، بلکه عدم تجانس نیز برای بروز مسائل اجتماعی توضیح‌دهنده هستند، ما یک طرح دو سویه با دو متغیر مستقل داریم. علاوه بر عامل‌های شبکه اخلاقی و تجانس، چنین طرحی اثرات تعاملی ممکن را هم می‌تواند نشان دهد. بنابراین ما یک طرح دو سویه مانوای ۲×۲ داریم: «دو سویه» به این دلیل که دو متغیر مستقل وجود دارد، و ۲×۲ چون دو بخشی هستند. با محدود کردن خود به دو متغیر از متغیرهای متعدد وابسته، یعنی نرخ طلاق و میزان خودکشی، ساختار این طرح مانوای دو سویه به صورت شکل ۳-۱۱ خواهد بود.



شکل ۳-۱۱ ساختار یک طرح دوطرفه مانوا (تحلیل واریانس چندمتغیره)

بدیهی ا ست این مدل می‌تواند از ب سیاری جهات پیچیده‌تر شود. نخ ست این که الزامی وجود ندارد که متغیرهای مستقل دو وجهی باشند. مثلاً توان شبکه‌های اخلاقی را می‌توان به صورت قدرت پیوندهای بین خانواده گسترده اندازه‌گیری کرد (که به عنوان گروه مرجع هنجاری عمل می‌کند)، یعنی به عنوان قدرت خانواده. برای این موضوع می‌توان بیش از دو مقوله فراهم کرد؛ مثلاً ضعیف، متوسط و قوی، که یک حالت سه وجهی به خود می‌گیرد. در چنین حالت چند وجهی، دامی‌های چندگانه (یکی کمتر از تعداد مقوله‌ها) مورد نیاز است که تحلیل را پیچیده‌تر می‌سازد. حالت دوم پیچیدگی زمانی پیش می‌آید که متغیرهای وابسته متعددی وجود دارد که با یکدیگر همبسته

هســـتند. تحلیل نه تنها شـــامل تغییرات واریانس‌های این متغیرها می‌شـــود، بلکه هم‌تغییری‌ها و کوواریانس‌های دو-در-دو را هم در بر می‌گیرد. در حالت ســـوم پیچیدگی، با وجود بیش از دو متغیر مستقل، لازم است تعاملات سطح بالاتر و همچنین تعاملات مرتبه دوّم را هم مدنظر قرار داد. این کار نه تنها نیازمند همبستگی پیچیده‌تر است، بلکه عموماً تفسیرهای نظری آن هم مشکل است و تلاش برای تشریح آن‌ها با مشکل مواجه می‌شود. حالت چهارم زمانی است که بعضی متغیرهای مستقل در ســطح ســنجش فاصــله‌ای اندازه‌گیری شــده باشــند، آنگاه ما یک تحلیل آنکوای (ANCOVA) چندمتغیری خواهیم داشـــت، یعنی تحلیل کواریانس چند متغیره (MANCOVA)، طرحی که از MANOVA پیچیده‌تر است.

۲-۱-۱۱ ماتریس داده‌ها

اصـول MANCOVA را اکنون با دو متغیر وابســته سـطح سـنجش فاصـله‌ای، نرخ طلاق (y_1) و نرخ خودکشـــی (y_2) و دو متغیر مســـتقل قدرت خانواده (A) دارای ســـه مقوله‌ی ۱، ۲، ۳ (۳= قوی) و تجانس (B) دارای دو مقوله ۱ و ۲ (۲= متجانس) نشـــان می‌دهیم. جدول تقاطعی که در آن مقادیر متغیرهای وابســـته (نه فراوانی‌ها) در خانه‌های آن جای داده شـــده‌اند در جدول ۱-۱۱ آمده اســـت. ماتریس داده‌های نظیر آن در جدول ۲-۱۱ ارائه شده است.

جدول ۱-۱۱ اندازه‌های متغیرهای وابسته

A \ B	۱			۲		
		Y_1	Y_2		Y_1	Y_2
۱	چکسلواکی	۲۱	۲۳۹	سوئد	۳۱	۲۱۵
	فنلاند	۱۸	۲۱۹	استرالیا	۱۳	۲۱۹
۲	بریتانیا	۲۰	۰۹۸	نوروژ	۱۲	۰۸۱
	سوئیس	۱۲	۱۷۳	هلند	۱۲	۱۱۲
۳	ندرلند	۱۳	۰۶۳	ایتالیا	۰۳	۰۵۵
	بلژیک	۱۱	۱۵۵	ایرلند	۰۳	۰۲۵

جدول ۲-۱۱ ماتریس داده‌ها

A	B	Y_1	Y_2
۱	۱	۲۱	۲۳۹
۱	۱	۱۸	۲۱۹
۱	۲	۳۱	۲۱۵
۱	۲	۱۳	۲۱۹
۲	۱	۲۰	۰۹۸
۲	۱	۱۲	۱۷۳
۲	۲	۱۲	۰۸۱
۲	۲	۱۲	۱۱۲
۳	۱	۱۳	۰۶۳
۳	۱	۱۱	۱۵۵

۳	۲	۰۳	۰۵۵
۳	۲	۰۳	۰۲۵

۳-۱-۱۱ اهداف این شیوه آماری

به منظور تو ضیح این که در MANCOVA محقق چه سؤالاتی را طرح می‌کند، به تحلیل واریانس با یک متغیر وابسته رجوع می‌کنیم که در مثال ما این متغیر، نرخ طلاق است. در یک طرح ANCOVA دو طرفه سؤال‌های تحقیق ما چنین است:

۱- آیا بین **میانگین** نرخ طلاق کشورهای با قدرت خانوادگی ضعیف، متوسط و قوی تفاوت معناداری وجود دارد؟ (عامل A)

۲- آیا بین **میانگین** نرخ طلاق کشـورهای متجانس و نامتجانس [از لحاظ فرهنگی] تفاوت معناداری وجود دارد؟ (عامل B)

۳- آیا اثر تعاملی معناداری وجود دارد، یعنی اثر توان خانوادگی بر نرخ طلاق در کشـــورهای دارای تجانس فرهنگی و عدم تجانس متفاوت است؟ یا، کدام یک به یکسان بودن گراییده‌اند، آیا اثر تجانس در کشورهای با توان خانوادگی ضعیف، متوسط و قوی متفاوت است؟(اثر $A \times B$)

در MANCOVA ما این سه سؤال را به روش زیر دنبال می‌کنیم. متغیر وابسته‌ی طلاق در این جا با دو (یا چند) متغیر وابســته طلاق و خودکشـــی جایگزین می‌شـود. بنابراین صــفت **میانگین** با **مرکزیت** جایگزین می‌شود که بردار چند میانگین است.

۴-۱-۱۱ t استیودنت، F فیشر، T هاتلینگ و ۸ ویلکز

برای پاسخ به این سؤال‌های MANCOVA، آزمون F از ANOVA با آزمون لامبدأی ویلکز جایگزین می شود. برای تو ضیح این که لامبدأی ویلکز (Λ) متـ ضمن چه چیزی ا ست، اجازه دهید مجدداً به سراغ t استیودنت، F فیشر و $T^۲$ هاتلینگ (یا $D^۲$ ماهالانوبیس) برویم.

برای یک متغیر و دو گروه از t اســتفاده می‌کنیم. مثال مربوط به آن در فصـل ۴ (طرح تجربی) قرارداد تجاری در گروه دارای شوخی و فاقد شوخی بود.

برای یک متغیر و چند گروه، آزمون F را به‌کار می‌بریم. مثال آن در فصـــل ۷ (تحلیل واریانس) انگیزش‌درونی در سه گروه جذابیت تکلیف بود.

برای چند متغیر و دو گروه آزمون $T^۲$ (یا $D^۲$) را به‌کار می‌بریم. در این مورد مثال فصـــل ۸ (تحلیل افتراقی دوگروهی) را داشتیم که وضعیت مالی و سطح خدمات در دو گروه شهروندان غنی و فقیر مورد بحث بود.

برای حالتی که چند متغیر و چند گروه وجود دارد Λ را بکار می‌بریم. در نتیجه t، T و F حالات خاصـی از Λ هسـتند (قبلاً در مبحث تحلیل همبسـتگی کانونی با لامبدأی ویلکز سـر و کار

داشته‌ایم. خواننده توجه خواهد داشت که برای این آزمون کاربردهای دیگری نیز وجود دارد). مطالب فوق در شکل ۴-۱۱ خلاصه شده‌اند (همچنین شکل ۸-۴ را مشاهده کنید).

		متغیرها یک	چند
گروه‌ها	دو	t استیودنت	T^2 هاتلینگ
	چند	F فیشر	لامبدأی ویلکز

شکل ۴-۱۱ آزمون‌ها در تحلیل چند متغیره

۵-۱-۱۱ محاسبات مقدماتی: ماتریس **W**، **B** و **T**

در شـــیوه MANCOVA آزمون $\mathbf{\Lambda}$ برای این به کار می‌رود که معلوم کند آیا مرکزیت‌های (بردار میانگین متغیرهای وابســته) متعلق به گروه‌های مختلف (که به وســیله مقولات متغیرهای وابســته تشکیل می‌شوند) با هم تفاوت معناداری دارند. در این جا همچنین در جستجوی بزرگترین پراکندگی ممکن در بین گروه‌ها هستیم. بنابراین لازم است همانند سایر شیوه‌های تحلیل، ماتریس‌های **W**، **B** و **T**، مثل ماتریس‌های واریانس و کوواریانس درون‌گروهی، بین‌گروهی و کل را محاســبه کنیم. این‌ها را گاهی ماتریس‌های SSCP (ماتریس‌های مجموع مجذورات و حا صل ضرب‌ها) می‌نامند. اجازه دهید مثل همیشه با ماتریس **W** شروع کنیم.

مثال ما درباره نظریه اخلاقی با متغیرهای A (توان خانوادگی) B (تجانس)، Y_1 (طلاق) و Y_2 (خودکشی)، یک طرح ۳×۲ با شش خانه‌ی A_1B_1، A_1B_2، A_2B_1، A_2B_2، A_3B_1 و A_3B_2 است. هر خانه حاوی مقادیر دو متغیر وابسته Y_1 و Y_2 است. البته تعداد مشاهدات در این مثال اختصاری خیلی کوچک است (تنها دو کشور در هر خانه)، از این رو خواننده بایستی فرض کند که ما با تعداد بزرگتری سر و کار داریم.

برای به دســـت آوردن **W** میانگین و پراکندگی (تغییرات) درون هر خانه را برای هر متغیر وابسته حساب می‌کنیم. مثلاً در خانه A_1B_1: $\bar{y}_1 =$ (۲۱+۱۸)÷۲=۱۹/۵ و

$$\sum(y_1-\bar{y}_1)^2 = (۲۱-۱۹/۵)^۲+(۱۸-۱۹/۵)^۲=۴/۵$$

در همین خانه، میانگین و پراکندگی Y_2 به ترتیب ۲۲۹ و ۲۰۰ اســـت. اما چیز بیشـــتری وجود دارد. چون بیش از یک متغیر وجود دارد، احتمال دارد این متغیرها با هم همبســـته باشـــند. همان طور که گفته شـد این موضـوع، MANOVA را از ANOVA پیچیده‌تر می‌سـازد و بسـیار مهم اسـت که این همبستگی به حساب آورده شود. معنایش این است که کوواریانس بین Y_1 و Y_2 نیز می‌بایست برای هر خانه محاسبه شود. برای خانه A_1B_1 این مقدار معادل:

$$\sum(y_1-\bar{y}_1)(y_2-\bar{y}_2) = (۲۱-۱۹/۵)(۲۳۹-۲۲۹)+(۱۸-۱۹/۵)(۲۱۹-۲۲۹)=۳۰$$

به طورخلاصه: ما دو میانگین برای هر خانه محاسبه می‌کنیم، یکی برای $Y_۱$ و یکی برای $Y_۲$ که با هم تشکیل یک مرکزیت یا بردار میانگین‌ها را می‌دهند. و برای هر خانه دو میزان تغییرات و یک کوواریانس می‌توان محاسبه کرد که در یک ماتریس SSCP– خانه که قطر آن متشکل از میزان تغییرات است جمع می شوند. برای خانه نخست $A_۱B_۱$ نتایج محاسبه شده در بالا در جدول ۳-۱۱ نشان داده شده است.

جدول ۳-۱۱

خانه $A_۱B_۱$		
مرکزیت	$(19.5 \quad 229)$	
ماتریس SSCP	$\begin{bmatrix} 4.5 & 30 \\ 30 & 200 \end{bmatrix}$	

اگر این عملیات را برای هر خانه انجام دهیم، جدول ۴-۱۱ حاصل می‌شود که برای محاسبه **W** طرح می‌شود.

جدول ۴-۱۱

	B_1	B_2
$A_۱$	$(۱۹.۵ \quad ۲۲۹)$ $\begin{bmatrix} ۴.۵ & ۳۰ \\ ۳۰ & ۲۰۰ \end{bmatrix}$	$(۲۲ \quad ۲۱۷)$ $\begin{bmatrix} ۱۶۲ & -۳۶ \\ -۳۶ & ۸ \end{bmatrix}$
$A_۲$	$(۱۶ \quad ۱۳۵.۵)$ $\begin{bmatrix} ۳۲ & -۳۰۰ \\ -۳۰۰ & ۲۸۱۲.۵ \end{bmatrix}$	$(۱۲ \quad ۹۶.۵)$ $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴۸۰/۵ \end{bmatrix}$
$A_۳$	$(۱۲ \quad ۱۰۹)$ $\begin{bmatrix} ۲ & -۹۲ \\ -۹۲ & ۴۲۳۲ \end{bmatrix}$	$(۰۳ \quad ۴۰)$ $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴۵۰ \end{bmatrix}$

ماتریس **W** که مربوط به میزان تغییرات درون‌گروهی و کوواریانس‌ها است، به سادگی به عنوان شش مجموع ماتریس خانه‌ای برای جدول ۴-۱۱ محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} ۲۰۰.۵ & -۳۹۸ \\ -۳۹۸ & ۸۱۸۳ \end{bmatrix}$$

اجازه دهید به سراغ محاسبه ماتریس **B** برویم. این ماتریس برای هر یک از سه سؤالی که در MANCOVA باید جواب دهیم متفاوت است (عامل A، عامل B و اثر تعاملی). سؤال ۱ عامل A را در نظر بگیرید. طبق فرض صفر، تفاوتی بین مرکزیت‌های کشورهای دارای پیوندهای خانوادگی ضعیف، متوسط و قوی وجود ندارد. اگر جدول تقاطعی با داده‌های اولیه را به عنوان نقطه شروع بگیریم، می‌توانیم میانگین‌ها را محاسبه کرده و آن‌ها را به طور ردیفی در مرکزیت ردیفی به شکل جدول ۵-۱۱ جمع کنیم.

جدول ۵-۱۱

		نمرات Y	$\hat{Y}$	مرکزیت ردیفی
$A_۱$	$Y_۱$ $Y_۲$	۱۳ ۳۱ ۱۸ ۲۱ ۲۱۹ ۲۱۵ ۲۱۹ ۲۳۹	۲۰/۷۵ ۲۲۳/۰۰	(۲۲۳ ۲۰/۷۵)
$A_۲$	$Y_۱$ $Y_۲$	۲۰ ۱۲ ۱۲ ۱۲ ۰۹۸ ۱۷۳ ۰۸۱ ۱۱۲	۱۴/۰۰ ۱۱۶/۰۰	(۱۱۶ ۱۴)
$A_۳$	$Y_۱$ $Y_۲$	۱۳ ۱۱ ۰۳ ۰۳ ۰۶۳ ۱۵۵ ۰۵۵ ۰۲۵	۷/۵۰ ۷۴/۵۰	(۷۴/۵۰ ۷/۵۰)

به منظور محاسبه تغییرات بین‌گروهی و کوواریانس‌ها، این سه مرکزیت ردیفی در اطراف مرکزیت کل نمونه قرارگرفته‌اند. این مقدار (۱۴/۰۸ ۱۳۷/۸۳) از طریق محاسبه میانگین کل $Y_۱$ و $Y_۲$ برای همه ۱۲ کشور به دست آمده است.

محاسبات ساده است، چون تنها سه مرکزیت ردیفی وجود دارد. ما بایستی آن را در یک عامل ۴ ضرب کنیم، زیرا از نظریه نمونه‌گیری آموخته‌ایم، پراکندگی میانگین‌های گروه‌های چهار مقدار، چهار برابر کوچکتر است (واریانس‌های $\sigma^2 / 4$ در برابر σ^2!).

تغییرات بین‌گروهی $Y_۱$ برابر است با:

$$۴[(۲۰/۷۵-۴/۰۸)^{۲}+(۱۴-۱۴/۰۸)^{۲}+(۷/۵۰-۱۴/۰۸)^{۲}]=۳۵۱/۱۷$$

تغییرات بین گروهی $y_۲$ برابر است با :

$$۴[(۲۲۳-۱۳۷/۸۳)^{۲}+(۱۱۶-۱۳۷/۸۳)^{۲}+(۷۴/۵۰-۱۳۷/۸۳)^{۲}]=۴۶۹۶۴/۶۷$$

تغییرات همگام بین‌گروهی $Y_۱$ و $Y_۲$ برابر است با :

$$[(۲۰/۷۵-۱۴/۰۸)(۲۲۳-۱۳۷/۸۳)+(۱۴-۱۴/۰۸)(۱۱۶-۱۳۷/۸۳)$$

+(۷/۵۰-۱۴/۰۸)(۷۴/۵۰-۱۳۷/۸۳)]=۳۹۴۶/۱۷

این نتایج در ماتریس **B** مربوط به تغییرات و تغییرات همگام بین‌گروهی گرد آمده است:

$$B = \begin{bmatrix} ۳۵.۱۷ & ۳۹۴۶.۱۷ \\ ۳۹۴۶.۱۷ & ۴۶۹۶۴.۶۷ \end{bmatrix}$$

خواننده می‌تواند وارسی کند که **T=W+B** .

۶-۱-۱۱ آزمون لامبدای ویلکز

آزمون $\mathbf{\Lambda}$ ویلکز به صورت نسبت دو دترمینان محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{\Lambda} = |\mathbf{w}|/|\mathbf{T}|$$

با توجه به این که **T=W+B** است، نسبت فوق را به شکل زیر هم می‌توان بازنویسی کرد:

$$\mathbf{\Lambda} = |\mathbf{W}|/|\mathbf{W} + \mathbf{B}|$$

بازنویسی **T** به صورت **W+B** اهمیت دارد، زیرا ماتریس **B** برای هر یک از سه سؤال پاسخ داده شده، به گونه متفاوتی خواهد بود (عامل A، B و اثر $A \times B$). در هر حال ماتریس **B** یک‌سان خواهد بود. محاسبات مقدماتی برای سؤال ۱ عامل توان خانوادگی در قسمت فوق انجام گرفت، بنابراین :

$$\mathbf{\Lambda} = \frac{|\mathbf{W}|}{|\mathbf{W} + \mathbf{B}|} = \frac{\begin{bmatrix} ۲۰۰.۵ & -۳۹۸ \\ -۳۹۸ & ۸۱۸۳ \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} ۵۵۱.۶۷ & ۳۵۴۸.۱۷ \\ ۳۵۴۸.۱۷ & ۵۵۱۴۷.۶۷ \end{bmatrix}} = ۰.۰۸۳$$

توجه داشته باشید که در این کسر (در مقایسه با نسبت F)، مقادیر «درون‌گروهی» در صورت و «مقادیر بین‌گروهی» در مخرج قرار دارند، و بنابراین یک $\mathbf{\Lambda}$ کوچکتر، نشـــان‌دهنده یک اختلاف مرکزیت بزرگتر است. یک نسبت ۱= $\mathbf{\Lambda}$ به این معنا ست که فرض صفر رد نشده است، زیرا در آن حالت **B** در مخرج به **W** چیزی اضافه نمی‌کند.

برای آزمون معناداری $\mathbf{\Lambda}$ از روش بارتلت پیروی می‌کنیم. او نشـــان داد که آماره زیر با علامت V توزیع $x^۲$ با درجه آزادی pd_B است:

$$V = [dw + d_B - (p + d_B + ۱)/۲] In\Lambda$$

در این جا p برابر است با تعداد متغیرهای وابسته، و d_B برابر با تعداد مرکزیت‌های مقایسه شده منهای یک، یعنی درجات آزادی بین‌گروهی است. مقدار d_W معرف تعداد درجات آزادی درون‌گروهی

ا ست. در هر خانه‌ی جدول، دو م شاهده را محا سبه می‌کنیم. بدین ترتیب (۱-۲) درجه آزادی در هر خانه داریم. شش خانه وجود دارد، در نتیجه ۶=(۱-۲)۶=d_W .

اکنون V بارتلت را می‌توان به دست آورد:

$$V = -[۶ + ۲ - (۲ + ۲ + ۱) / ۲]\ln(۰/۰۸۳) = ۱۳.۶۸$$

برای ۴=(۲)(۲)=pd_B این مقدار بزرگتر از مقدار بحرانی $x^۲$ (یعنی ۹/۴۹) اســت که تحت فرض صــفر برای ۰/۰۵ =∝ یافت شــده اســت. بنابراین بین میانگین طلاق و نرخ خودکشــی (بر روی هم و در حالت همبستگی دو سویه) در کشورهای با توان خانوادگی مختلف، تفاوت معناداری وجود دارد. فرض صفر مبنی بر این که مرکزیت‌ها یکسان هستند یا تفاوت آن‌ها ناشی از شانس است، رد می‌شود.

سؤال‌های (۲) و (۳) را نیز می‌توان به همین ترتیب پاسخ داد. ماتریس **W** یکسان می‌ماند. برای ماتریس **B** مرکزیت‌های ستونی (واقع در اطراف مرکزیت کل نمونه) جهت سؤال (۲) به کار می‌روند و برای ســؤال (۳) تفاوت بین مرکزیت‌های خانه‌ها و مرکزیت ردیفی نظیر آن (واقع در اطراف اختلاف بین مرکزیت‌های ستونی نظیر آن و مرکزیت کل نمونه) را به کار می‌بریم. نتایج در جدول ۶-۱۱ آمده است.

پاســـخ مثبت به ســـؤال (۱)، از نظریه شـــبکه اخلاقی نارول در مورد قدرت خانوادگی حمایت می‌کند. دو اثر دیگر (B و $A \times B$) معنادار نی ستند. تفاوت بین مرکزیت‌های ک شورهای متجانس و نامتجانس از لحاظ فرهنگی، چیزی غیر از عامل شـــانس نیســـت. همچنین اثر تعاملی معناداری هم وجود ندارد: تفاوت مرکزیت کشورهای دارای خانواده‌های با پیوندهای واگرا[1] در کشورهای متجانس و نامتجانس تفاوت معناداری ندارد. به عبارت دیگر ترکیب تجانس و قدرت خانوادگی، چیزی بر تو ضیح طلاق و خودکشی نمی‌افزاید.

جدول ۶-۱۱

	Λ	V	مقدار بحرانی $x^۲$	درجات آزادی(pd_B)
سؤال ۱ (اثر A)	۰/۰۸	۱۳/۶۸	۹/۴۹	۴
سؤال ۱ (اثر B)	۰/۴۸	۳/۶۶	۵/۹۹	۲
سؤال ۱ (اثر $A \times B$)	۰/۵۷	۳/۰۹	۹/۴۹	۴

۷-۱-۱۱ جایگزین‌های دیگری برای آزمون لامبدای ویلکز: تحلیل واریانس چند متغیره به عنوان معکوس تحلیل افتراقی

علاوه بر آزمون‌هایی که در ق سمت فوق برا ساس Λ ویلکز و V بارتلت تو ضیح داده شد، ملاک‌های آزمون دیگری تو سط مؤلفان مختلف ارائه شده ا ست. این ملاک‌ها همگی عملیاتی ا ست که برا ساس ارزش‌های ویژه از یک تحلیل ساختار ویژه ماتریس $\mathrm{W}^{-۱}\mathrm{B}$ حاصل می‌شود. اجازه دهید ابتدا به طور

1. divergent family ties

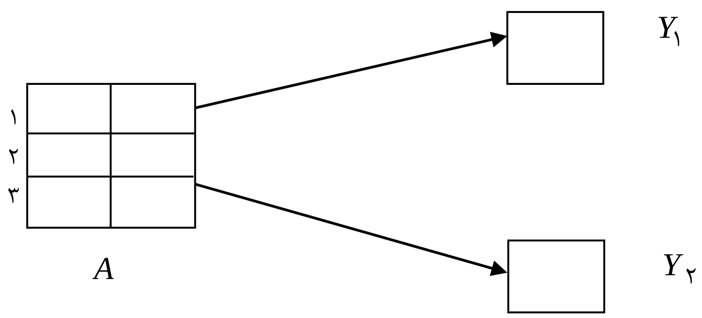
جداگانه این مو ضوع را مورد بحث قرار دهیم، یعنی محا سبه MANOVA که بر مبنای ا صول تحلیل متمایز کننده صورت می‌گیرد.

اگر به خاطر داشته باشید در فصل ۸ گفتیم که فیشر در دهه ۱۹۳۰ تحلیل افتراقی را به عنوان معکوس تحلیل واریانس در نظر گرفت، از این رو در تحلیل افتراقی متغیرهای مســـتقل در ســـطح سنجش فاصله‌ای و متغیر وابسته در سطح پایین‌تر سنجیده می‌شود. در تحلیل واریانس این وضعیت برعکس است. اگر مثال مربوط به نظریه شبکه اخلاقی را در نظر گرفته و مثل قسمت فوق، خود را به تأثیر قدرت خانوادگی (A) محدود نماییم، آنگاه طرح MANOVA یک طرفه همانند شـــکل ۵-۱۱ خواهد بود.

با معکوس کردن جهت کمان ها یک تحلیل افتراقی با $Y_۱$ و $Y_۲$ به عنوان متغیر های متمایزکننده و ســـه مقوله A به عنوان گروه‌ها حاصـــل می‌شـــود. چنین تحلیل افتراقی‌ای با آزمودن ســـاختار ویژه ماتریس $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{B}$ به عمل می‌آید، با این هدف که تســـت پراکندگی بین گروه‌ها و پراکندگی درون‌گروه‌ها حداکثر باشـــد (نگاه کنید به فصـــل ۸ و بخش دوم همین فصـــل). این دقیقاً همان تحلیل واریانس ا ست. به بیان محا سباتی، تفاوت نمی‌کند که جهت کمان‌های مدل به یک سو یا سوی دیگر باشد.

ماتریس‌های $\mathbf{W}$ و $\mathbf{B}$ در قســـمت فوق برای عامل قدرت خانوادگی (A) تهیه شـــد. حاصـــل‌ضـــرب $\mathrm{W}^{-۱}\mathrm{B}$ چنین است:

$$W^{-۱}B = \begin{bmatrix} ۲۰۰.۵ & -۳۹۸ \\ -۳۹۸ & ۸۱۸۳ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} ۳۵.۱۷ & ۳۹۴۶.۱۷ \\ ۳۹۴۶.۱۷ & ۴۶۹۶.۶۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲.۹۸۸ & ۳۴.۳۹۵ \\ ۰.۶۲۸ & ۷.۴۱۴ \end{bmatrix}$$



شکل ۵-۱۱ طرح MANOVA یک طرفه

ارزش‌های ویژه ریشه‌های معادله خصیصه‌ای هستند:

$$|W^{-1}B-\lambda \mathrm{I}|=۰$$

$$\begin{vmatrix} ۲.۹۹۸-\lambda & ۳۴.۳۹۵ \\ ۰.۶۲۸ & ۷.۴۱۴-\lambda \end{vmatrix}=۰$$

$$(۲.۹۹۸-\lambda)(۷.۴۱۴-\lambda)-(۰.۶۲۸)(۳۴.۳۹۵)=۰$$

$$\lambda^{۲}-۱۰.۴۱۲\lambda-۰.۶۲۱=۰$$

با g=۳ گروه و p=۲ متغیر، تعداد حداقل ۲= (g-۱ , p) تابع افتراقی را می‌توان محاسبه کرد. در نتیجه دو ارزش ویژه قابل دستیابی است که با حل معادله درجه دوم به دست می‌آیند: $\lambda_۱ = ۱۰/۳۵$ و $\lambda_۲ = ۰/۰۶$.

براساس این ارزش‌های ویژه، مؤلفین مختلف پیشنهادهایی را برای آزمون این فرض صفر طرح کرده‌اند که مرکزیت‌های کشورهای با پیوندهای خانواگی متفاوت یکسان است یا تفاوت آن‌ها صرفاً ناشی از شانس است.

نظر مؤلف اوّل، ویلکز، قبلا مورد بحث قرار گرفت. مقیاس $\mathbf{\Lambda}$ او به صورت نسبت $|\mathbf{W}|/|\mathbf{W}+\mathbf{B}|$ محاسبه شد و مقیاس برگرفته از آن، V بارتلت، به صورت $x^۲$ توزیع شد. $\mathbf{\Lambda}$ ویلکز همچنین یک تابع ارزش‌های‌ویژه $\mathrm{W}^{-۱}\mathrm{B}$ است، یعنی حاصل ضرب $۱/(۱+\lambda_i)$. در مثال ما با دو ارزش ویژه: ۰/۰۸۳=[۱/(۱+۰/۰۶)][۱/(۱+۱۰/۳۵)]= Λ، همان نتیجه‌ای که در بالا به دست آمد! همچنین قابل ذکر است که، علاوه بر بارتلت، رائو[1] نیز مقیاسی را بر مبنای $\mathbf{\Lambda}$ طرح کرد که از توزیع F نیز پیروی می‌کند. این را در نتایج نرم‌افزار کامپیوتری SPSS وارد کرده‌اند. هاتلینگ مجموع ارزش‌های ویژه λ_i را به عنوان ملاک گرفت که معادل مجموع ارزش‌های روی قطر اصلی $\mathrm{W}^{-۱}\mathrm{B}$ است. فیلای[2] مجموع $\lambda_i/(۱+\lambda_i)$ را مد نظر قرار داد. روی[3]، از نسبت $\lambda_i/(۱+\lambda_i)$، چیزی را که λ_i برای آن حداکثر باشد، برگزید.

تمام این ملاک‌های ویلکز، هاتلینگ، فیلای و روی قابل تبدیل به توزیع F می‌باشند. نتایج آن‌ها را در برنامه SPSS در نتایج استاندارد MANOVA می‌توان پیدا کرد.

۸-۱-۱۱ تحلیل واریانس چند متغیره، یک دنیای کامل

آنچه در قسمت فوق توضیح داده شد، تنها هسته MANOVA بود. با اطمینان می‌توان ادعا کرد که امکانات تحلیل بیشتر، خود یک دنیا کامل است. علاوه بر آزمون اثرات مجزا، برآوردهای هر اثر را می‌توان همراه با فواصل اطمینان مربوط به آن صورت داد. تحلیل باقی‌مانده‌ها با رسم نمودار نقطه‌ای امکان‌پذیر است (شبیه به تحلیل رگرسیون چندگانه). هر طرح ممکن را می‌توان با مشخص کردن موضوع اثرات در یک تحلیل، انجام داد. تحلیل‌های پایین‌رونده[4] با وارد کردن یکی یکی متغیرهای وابسته قابل انجام است.

---
1. Rao 2. Phillai 3. Roy 4. stepdown

همچنین برای طرح‌های ویژه، امکاناتی وجود دارد که با سنجش‌های مکرر، سنجش‌های غیر فراگیر، سنجش‌های گروه‌بندی شده (طرح بلوکی)، مرتبه‌بندی تسلسلی (طرح لانه‌ای) و شیوه‌های دیگر انجام می‌شود.

طرح‌های غیر متعامد را هم می‌توان به کار گرفت. در مثال ما تعداد مشاهدات در خانه‌ها یکسان بود. درا ین حالت متغیرهای مستقل A و B ناهمبسته هستند، به گونه‌ای که یک جدول تقاطعی با فراوانی برابر در خانه‌ها به دست می‌آید. در حالت تعداد مشاهدات نابرابر در خانه‌ها، صحبت از طرح‌های غیرمتعامد است. این طرح‌ها را با وارد کردن مقابله‌های خوب تعیین شده در قالب آنچه که طرح ماتریسی خوانده می‌شود می‌توان به کار گرفت.

۹-۱-۱۱ مفروضات

ما دو توصیه را به عنوان نتیجه مطرح می‌کنیم: استفاده از نمودارهای نقطه‌ای برای تحلیل باقیماندها و آزمون M باکس برای کنترل فرض تجانس (واریانس‌ها).

اولا، همان طور که در تحلیل رگرسیون عمل می‌شود، در MANOVA با این پیش‌فرض آغاز می‌کنند که باقی مانده‌ها به طور تصادفی توزیع شده‌اند. در غیاب یک اثر تعاملی معنادار، می‌توان جمله تعاملی را به جمله باقی‌مانده اضافه کرد. یک نمودار نقطه‌ای مقادیر باقی مانده‌ی استاندارد شده در مقابل مقادیر مورد انتظار از مدل، اندیشه خوبی را از درستی این فرض هنجار بودن به دست می‌دهد. بایستی نسبت به هر الگوی منظم بدگمان بود.

ثانیاً، درست مثل ANOVA در این جا هم‌واریانسی[1] [پراکندگی یکسان در هر خانه] را بایستی آزمود. در MANOVA عامل افزوده‌ای وجود دارد که با متغیرهای وابسته چندگانه‌ای که با یکدیگر همبسته هستند، سر و کار دارد. این هم‌تغییری‌ها نباید در هر خانه چندان با یکدیگر فرق کنند. آزمون M باکس این‌همانی تغییرات درون‌گروهی و کوواریانس‌ها را می‌آزماید. کامپیوتر، یک مقدار F همراه با سطح معناداری تجربی آن را چاپ می‌کند. مقدار p نباید از یک احتمال از قبل تعیین شده $\alpha = ۰/۰۵$ کمتر باشد، طوری که تغییرات و هم تغییری‌ها نباید تفاوت معناداری داشته باشند تا مدل MANOVA معتبر باشد. بنابراین منطق آزمون معناداری در این جا برعکس است!

البته در مثال ما تعداد، خیلی کم (فقط دو مشاهده در هر خانه) است که این آزمون را اجرا کنیم.

1.homoscedasticity

۱۰-۱-۱۱ نتایج تحلیل واریانس چند متغیره حاصل از نرم‌افزار SPSS ویندوز

کاربرد MANOVA پیش از این در قسمت تحلیل همبستگی کانونی مورد بحث قرار گرفت. به‌منظور اجرای یک تحلیل واریانس چند متغیره در این جا کوواریه را انتخاب نمی‌کنیم، بلکه عامل‌ها و متغیرهای وابسته را انتخاب می نماییم.

انتخاب یا ساختن فایل داده‌ها

برای توضیح درباره نحوه انتخاب یا ساختن فایل داده‌ها به توضیحات فصل ۴ رجوع کنید.

اجرای شیوه آماری

روی عبارت Analyze کلیک کنید. سپس روی ANOVA Models کلیک کنید تا دریچه محاوره‌ای تحلیل واریانس چند متغیره باز شود. در قسمت source variable list روی Y_1 و Y_2 کلیک کنید. سپس روی علامت دکمه ▹ متغیرهای وابسته کلیک کنید. روی A و دکمه فشاری ▹ عامل‌ها کلیک کنید. روی عبارت Define Range کلیک کرده و مقدار کمینه ۱ را وارد کنید. روی Maximum کلیک کنید و عدد ۳ را وراد نمایید. روی واژه continue کلیک کنید. روی B و دکمه فشاری ▹ کلیک کنید. روی عبارت Define Range کلیک کرده مقدار حد پایین را وارد کنید. روی واژه Maximum کلیک کرده و عدد ۲را وارد کنید و سپس روی واژه continue کلیک کنید.

روی واژه Models کلیک کنید. مشاهده خواهید کرد که آزمون‌های چند متغیره و یک متغیره انتخاب شده‌اند. از این رو مدل تماماً عاملی است، روی عبارت Eigenvalues کلیک کنید. سپس روی واژه continue کلیک کنید تا به دریچه محاوره‌ای اولیه برگردید. روی واژه OK کلیک کنید. اکنون SPSS شیوه آماری مورد نظر را اجرا کرده و یک دریچه نتایج همراه با نتایج تحلیل واریانس چند متغیره ظاهر می‌شود.

ذخیره کردن نتایج را فراموش نکنید: روی واژه File و سپس روی save as کلیک کنید و نام فایل را با پسوند lst. وارد کرده، آنگاه روی واژه ok کلیک کنید.

چنان که می‌دانیم، نتایج کامپیوتری را به وسیله یک دریچه دستورات و تایپ دستورات SPSS هم می‌توان به دست آورد. روی واژه File کلیک کنید. سپس روی New و بعد روی SPSS Syntax کلیک کنید و دستورات را وارد کرده مکان‌نما را به خط اوّل دستورات ببرید و روی نشانه ▹ خط نشانه‌ها[1] کلیک کنید.

دستورات مربوطه عبارتند از:

```
1-MANOVA Y1 Y2= BY A (1.3) B(1.2)
2-    /Print SIGNIF (EIGEN)
3       /METHOD NOCONSTANT
4       /DESIGN.
```

1. I can bar

دستور MANOVA در جمله ۱ نشان می‌دهد که یک تحلیل چند متغیره واریانس به اجرا در می‌آید. متغیرهای وابسته $Y_۱$ و $Y_۲$ هستند. عدم وجود کلمه WITH نشان می‌دهد که کوواریه‌ای وجود ندارد. کلمه BY نشان می‌دهد که عامل‌ها در سطح سنجش پایین اندازه‌گیری شده به دنبال آن می‌آیند. عامل A دارای سه مقوله ۱، ۲، ۳ است. پایین‌ترین و بالاترین مقوله در داخل پرانتز ذکر می‌شوند. عامل B دارای دو مقوله است.

دستور جمله ۲ ارزش‌های ویژه را درخواست می‌نماید.

دستور جمله ۳ مدل خاصی را مشخص می‌کند که بدون ضریب ثبات باشد، از این رو همه جزئیات در آن گنجانده نشده است.

خلاصه نتایج به شرح زیر است:

```
*  *  ANALYSIS OF VARIANCE – DESIGN  1 *  *
EFFECT .. A  BY  B
Multivariate Tests of Significance (S=2 .M=-1/2. N=1 1/2)
Test Name       Value    Approx.F Hypoth .DF  Error DF   Sig.of F
Pillais         .43339   .82993        4.00     12.00       .531
Hotellings    .76266   .76266        4.00     8.00        .578
Wilks           .56707   .81989        4.00     10.00       .541
Roys            .43233

Eigenvalues and canonical Correlations

Root No.       Eigenvalue      Pct.   Cum.pct.    canon cor.
          1           .762          99.861    99.861      .658
          2           .001           .139       100.000   .033
*  *  ANALYSIS OF VARIANCE – DESIGN  1 *  *
EFFECT .. A BY B(CONT.)
Univariate F-tests With (2.6) D. F.

Variable  Hypoth. SS   Error.SS  Hypoth .MS  Error MS  F Sig.of F
Y1      66.50000     200.50000   33.25000   33.41667  .99501  .423
Y2   1626.00000  1883.00000  813.00000  1363.83333  .59611  .581

*  *  ANALYSIS OF VARIANCE – DESIGN  1 *  *
EFFECT .. B
Multivariate Tests of Significance (S=1 .M=0. N=1 1/2)
Test Name       Value    Approx.F Hypoth .DF  Error DF   Sig.of F
Pillais          .51870     2.69422          2.00          5.00        .161
Hotellings    1.07769     2.69422          2.00          5.00        .161
Wilks           .48130     2.69422          2.00          5.00       .161
Roys            .51870

Eigenvalues and canonical Correlations

Root No.       Eigenvalue      Pct.   Cum.pct.    canon cor.
         1              1.078      100.000   100.000      .720
```

* * ANALYSIS OF VARIANCE – DESIGN 1 * *
EFFECT .. B(CONT.)
Univariate F-tests With (1.6) D. F.

Variable	Hypoth. SS	Error.SS	Hypoth .MS	Error MS	F	Sig.of F
Y1	36.75000	200.50000	36.75000	33.41667	1.09975	.335
Y2	4800.0000	8183.00000	4800.00000	1363.83333	3.51949	.110

* * ANALYSIS OF VARIANCE – DESIGN 1 * *
EFFECT .. A
Multivariate Tests of Significance (S=2 .M=-1/2. N=1 1/2)

Test Name	Value	Approx.F	Hypoth .DF	Error DF	Sig.of F
Pillais	.96848	2.81667	4.00	12.00	.074
Hotellings	10.41037	10.41037	4.00	8.00	.003
Wilks	.08312	6.17149	4.00	10.00	.009
Roys	.91190				

Eigenvalues and canonical Correlations

Root No.	Eigenvalue	Pct.	Cum.pct.	canon cor.
1	10.350	99.424	99.424	.955
2	.060	.576	100.000	.238

* * ANALYSIS OF VARIANCE – DESIGN 1 * *
EFFECT .. A(CONT.)
Univariate F-tests With (2.6) D. F.

Variable	Hypoth. SS	Error.SS	Hypoth .MS	Error MS	F	Sig.of F
Y1	351.16667	200.50000	175.58333	33.41667	5.25436	.048
Y2	46964.6667	8183.00000	23482.3333	1363.83333	17.21789	.003

۲- ۱۱ تحلیل افتراقی چندگانه: نواحی[1] کوبایی‌نشین میامی: مدل نیروی کار سه‌گانه

تحلیل افتراقی از جنبه فنی آن حالت خاصی از MANOVA (بخش اول این فصل) و بسط یافته تحلیل افتراقی دو گروهی است (فصل ۸). اطلاع از مطالب دو فصل مذکور را فرض می‌گیریم. همچنین ارتباط آن را با تحلیل همبستگی کانونی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱-۲-۱۱ مسأله تحقیق و طرح علّی

تحلیل افتراقی چندگانه (MDA) را در مثال زیر می‌توان به‌خوبی نشان داد. کنت ال. ویلسون[2] (۱۹۸۰) نسبت به مدل بازار کار[3] دوگانه واکنش نشان داد که طبق آن، دو بازار جداگانه وجود دارد؛ یک بازار اولیه با خصیصه‌های مثبت مثل با ثبات بودن، فرصت ترفیع، دستمزد بالا و شرایط کاری مطلوب، و بازار دوم با خصیصه‌های منفی مثل شیفت کاری، عدم وجود نظام ترفیع، دستمزد پایین و شرایط کاری نامطلوب.

این نظریه دوگانگی همچنین در مورد مهاجرین کشورهای توسعه یافته نیز کاربرد دارد. طبق این نظریه، دسته‌های مهاجرین قانونی شامل درصد زیادی از کارگران دارای تحصیلات فنی و

1. enclaves　2. Kenneth L. Wilson　3. Labour Market

تخصصی می‌شود که به بازار کار اولیه راه یافته‌اند و در مورد آن‌ها فرصت (ترفیع) و عدم تبعیض معمول است. از سوی دیگر مهاجرین غیرقانونی و غیرمجاز اصولاً از کارگران غیرماهر که خود را در بازار کار ثانویه یافته‌اند، تشکیل شده که دارای دستمزد کم و شرایط کاری نامناسب هستند.

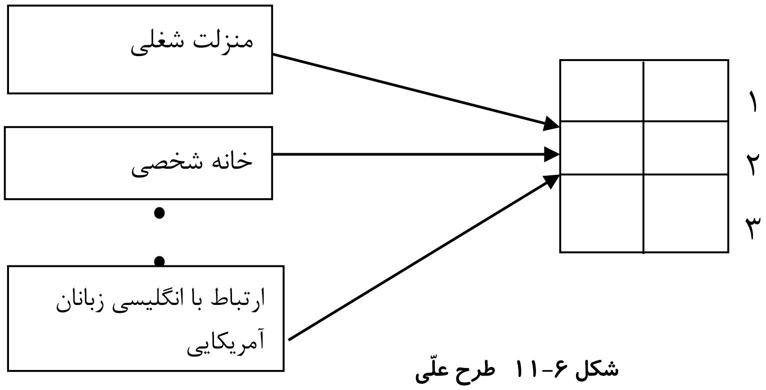
از نظر ویلسون، نظریه‌پردازان بازار کار دوگانه، خود را منحصراً (به طور نادرستی) به مقوله دوم مهاجرین در شرایط ثانویه محدود کرده‌اند. او مدعی است که مهاجرین را نمی‌توان به دو دسته شرایط محدود دانست. از نظر او بازار سومی هم وجود دارد، شامل کسانی‌که در نواحی مهاجرنشین زندگی می‌کنند و به طور تجربی می‌توان آن‌ها را از بازار کار اولیه و ثانویه متمایز نمود.

کارگران نواحی مهاجرنشین و کارگران مربوط به مناطق اولیه در اصل دارای یک بازگشت مشترک و مهم اقتصادی از گذشته‌ی سرمایه‌داری هستند. چنین بازگشتی در بازار کار «باز» ثانویه وجود ندارد. نمونه‌ای از این بازار سوم، رستوران‌های چینی در نترلند و منابع الماس یهودیان در آنتورپ هستند. مثال ویلسون در مورد نواحی مهاجرنشین در میامی فلوریدا است. داد و ستدهای مناطق کوبایی‌نشین در میامی به لحاظ اندازه کوچک، اما بسیار پرمنفعت هستند. آن‌ها به تجارت منسوجات چرم، اثاثیه، سیگار، صنایع بسته‌بندی و بانکداری مشغولند. بخش خدمات رستوران‌ها، سوپرمارکت‌ها، درمانگاه‌های خصوصی، برگزاری مراسم و مدارس خصوصی را شامل می‌شود.

به منظور آزمایش مفاهیم مورد نظر خود، ویلسون یک تحلیل افتراقی سه گروهی را به کار برد. مهاجرین کوبایی براساس اطلاعات مربوط به میانگین درآمد، اندازه داد و ستد و برنامه پیشرفت شرکت، به دو بازار کار اولیه یا ثانویه دسته‌بندی شدند. مهاجرین نواحی کوبایی‌نشین، در بازار کار سوم قرار گرفتند. به‌منظور ارزیابی این که آیا در عمل بین این سه بازار کار تفاوتی وجود دارد یا نه، یک مجموعه متغیرهای متمایزکننده انتخاب شدند: منزلت شغلی، خانه شخصی به عنوان یک مقیاس ثبات اقتصادی، تعداد بستگان در ایالات متحده، دانشنامه از آمریکا، رضایت از درآمد، اراده تغییر شغل، اراده مراجعت به کشور خود، نقشه رفتن به کشور دیگر، آمادگی برای رفتن به ایالات متحده در صورت فرصت، تجربه و درک تبعیض، فرصت ارتباط پیدا کردن با انگلیسی زبانان آمریکایی.

طرح علّی مربوط به این تحلیل افتراقی سه‌گروهی در شکل ۶-۱۱ نمایش داده شده است. متغیرهای مستقل، ۱۲ خصیصه متمایزکننده هستند. متغیر وابسته به سه دسته بازار کار تقسیم‌بندی شده است. چنانچه جهت کمان‌ها معکوس باشد، ما با یک MANOVAی یک طرفه سر و کار داریم که همانطور که در بالا گفته شد، می‌تواند به عنوان معکوس تحلیل افتراقی تلقی شود. در محاسبات ما، همین روش یعنی یک تحلیل ساختار ویژه ماتریس $W^{-1}B$ دنبال می‌شود.

منطق کار، مشابه تحلیل افتراقی دوگروهی است. تنها تفاوت این است که در این جا سه گروه به جای دو گروه وجود دارد و این که آزمون F تفاوت‌های مرکزیت، اکنون با لامبدای ویکلز جایگزین می‌شود، درست مثل MANOVA.



شکل ۶-۱۱ طرح علّی

۲-۲-۱۱ ماتریس داده‌ها

به عنوان یک مثال، مدل بازار کار سه گانه ویلسون را در نظر می‌گیریم، امّا برای سادگی بیشتر اجازه دهید به دو متغیر متمایز کننده، اکتفا کنیم: $X_۱$ تعداد بستگان در ایالات متحده و $X_۲$ رضایت از درآمد. برای هر دو متغیر، اندازه‌ها از ۱ تا ۱۰ تغییر می‌کنند. متغیر وابسته یک متغیر سه بخشی، شامل سه مقوله مهاجرین کوبایی از بازار کار اول، دوم و سوم (با کدهای ۱، ۲ و ۳) است.

ماتریس داده‌ها در جدول ۷-۱۱ ارائه شده است.

جدول ۷-۱۱ ماتریس داده‌ها

	Y	$X_۱$	$X_۲$
بازار کار اولیه	۱	۲	۶
	۱	۴	۹
	۱	۱	۸
	۱	۲	۹
بازارکار ثانویه	۲	۴	۳
	۲	۲	۴
	۲	۳	۵
	۲	۲	۱
نواحی کوبایی‌نشین	۳	۹	۷
	۳	۶	۸
	۳	۸	۹
	۳	۸	۷

جدول۸-۱۱

گروه ۱	(۸ ۲،۲۵)	مرکزیت
	$\begin{bmatrix} ۴.۷۵ & ۲ \\ ۲ & ۶ \end{bmatrix}$	ماتریس SSCP

گروه ۲	$(۲.۷۵ \quad ۳.۲۵)$	مرکزیت
	$\begin{bmatrix} ۲.۷۵ & ۱.۲۵ \\ ۱.۲۵ & ۸.۷۵ \end{bmatrix}$	ماتریس SSCP
گروه ۳	$(۷.۷۵ \quad ۷.۲۵)$	مرکزیت
	$\begin{bmatrix} ۴.۷۵ & -۱.۲۵ \\ -۱.۲۵ & ۲.۷۵ \end{bmatrix}$	ماتریس SSCP
کل	$(۴.۲۵ \quad ۶.۳۳)$	مرکزیت کل
	$\begin{bmatrix} ۸۶.۲۵ & ۲۷ \\ ۲۷ & ۷۴.۶۷ \end{bmatrix}$	ماتریس SSCP

۳-۲-۱۱ آزمون لامبدای ویلکز

برای اجرای آزمون لامبدای ویلکز، بایستی نسبت دترمینان **w**، ماتریس تغییرات درون‌گروهی و هم تغییری‌ها، و دترمینان **T**، ماتریس تغییرات و تغییرات همگام کل را محاسبه کنیم. برای به دست آوردن **W** همانند MANOVA، میانگین ارزش‌های $X_۱$ و $X_۲$ هر گروه که با هم، مرکزیت دو گروهی را شکل می‌دهند و همچنین ماتریس تغییرات و هم تغییری‌های SSCP را حساب می‌کنیم. نتایج در جدول ۸-۱۱ آمده است. ماتریس **W** مجموع سه ماتریس درون‌گروهی SSCP است:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} ۱۲.۲۵ & ۲ \\ ۲ & ۱۷.۵۰ \end{bmatrix}$$

ماتریس **T** ماتریس تغییرات و تغییرات همگام کل نمونه است که در پایین جدول نشان داده شده، با کنار گذاشتن گروه‌هایی که مد نظر نبودند:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} ۵۶.۲۵ & ۲۷ \\ ۲۷ & ۷۴.۶۷ \end{bmatrix}$$

ماتریس **B** تغییرات و تغییرات همگام بین‌گروهی را می‌توان با محاسبه مرکزیت‌های گروهی در رابطه با مرکزیت کل به دست آورد. امّا با توجه به معادله **T=W+B**، **B** را همچنین از تفاضل **T** و **W** هم می‌توان به دست آورد:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} - \mathbf{W} = \begin{bmatrix} ۷۴ & ۲۵ \\ ۲۵ & ۵۷.۱۷ \end{bmatrix}$$

لامبدای ویلکز را اکنون به سه طریق می‌توان محاسبه کرد. ساده‌ترین فرمول $\mathbf{\Lambda} = |\mathbf{W}|/|\mathbf{T}|$ است. روش دوّم، آزمون ساختار ویژه $W^{-۱}B$ است که Λ برابر است با حاصل‌ضرب $۱/(۱+\lambda_i)$.

تمام این کار شبیه شیوه محاسبه MANOVA است. راه سوّم بر اساس اصول محاسبه همبستگی کانونی است که بعداً توضیح داده خواهد شد.

اجازه دهید اینک این سه رویکرد را دنبال کنیم. با به کار بردن لامبدای ویکلز می‌خواهیم ببینیم آیا سه بازار کار را در میان مهاجرین کوبایی در میامی فلوریدا می‌توان به طور تجربی از هم تشخیص داد. در مثال اختصاری ما معنایش این است که آیا بین مرکزیت‌های سه گروه تفاوت معناداری وجود دارد، درحالی‌که هر مرکزیت شامل میانگین تعداد بستگان و میانگین رضایت درآمد با همدیگر و در نظر گرفتن پراکندگی آن‌ها و همبستگی با یکدیگر است.

۴-۲-۱۱ لامبدای ویکلز به عنوان نسبت $|\mathbf{W}|/|\mathbf{T}|$

طبق فرمول اول، لامبدای ویکلز برابر است با :

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{W}|}{|\mathbf{T}|} = \frac{\begin{vmatrix} ۱۲.۲۵ & ۲ \\ ۲ & ۱۷.۵۰ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۸۶.۲۶ & ۲۷ \\ ۲۷ & ۴۷.۶۷ \end{vmatrix}} = \frac{۲۱۰.۳۸}{۵۷۱۱.۲۹} = ۰/۰۳۷$$

از بخش مربوط به MANOVA دریافتیم که هر چه لامبدا کوچکتر باشد، تفاوت مرکزیت بیشتر است:

با V بارتلت می‌توانیم بیازماییم که آیا تفاوت مرکزیت معنادار است یا نه:

$$V = -[dw + d_B - (P + d_B + ۱)/۲]\ln\Lambda$$

که

p = تعداد متغیرهای متمایز کننده=۲

dB = تعداد مرکزیت‌های مقایسه منهای یک =۲=۱-۳

d_W = تعداد مشاهدات هر گروه منهای یک ضرب در تعداد گروه‌ها =۹= (۱-۴)۳.

V= -[۹+۲-(۲+۲+۱)/۲] ln ۰/۰۳۷ = ۲۸/۰۶

این مقدار به صورت $x^۲$ با pd_B= (۲)(۲)=۴ درجه آزادی توزیع می‌شود. این مقدار از مقدار بحرانی $x^۲$ (۴/۴۹) تحت شرایط فرض صفر با α=۰/۰۵ بزرگتر است. بنابراین بین سه بازار کار مهاجرین کوبایی در میامی تفاوت معناداری وجود دارد. نظریه بازار کار دوگانه توسط ویلسون رد می‌شود. میانگین‌های متغیرهای متمایزکننده (تعداد بستگان و رضایت از درآمد، با هم در حالت تداعی متقابل) درحقیقت از تفاوت تصادفی بین سه گروه بیشتر می‌نماید.

۵-۲-۱۱ آزمون لامبدای ویکلز از روی ساختار ویژه $W^{-1}B$

طریقه محاسبه قبلی Λ ویکلز بیشتر معمول است. آزمون مربوط با تفاوت‌های مرکزیت به این نتیجه منتهی می شود که بین سه بازار کار تفاوت وجود دارد، امّا چیزی که هنوز نمی‌دانیم این است که آیا نواحی کوبایی‌نشین، از روی بازارهای کار اولیه و ثانویه به نحوی تشخیص داده می شوند. طریقه دوم محاسبه از طریق آزمون ساختار ویژه $W^{-1}B$ (کاملاً شبیه به تحلیل افتراقی دوگروهی و MANOVA در جهت معکوس) برای ما فرصت انجام تکلیف موشکافانه‌تری را فراهم می‌کند.

$$W^{-1}B=\begin{bmatrix} ۱۲.۲۵ & ۲ \\ ۲ & ۱۷.۵۰ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۷۴ & ۲۵ \\ ۲۵ & ۵۷.۱۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵/۹۲ & ۱.۵۴ \\ ۰.۷۵ & ۳.۰۹ \end{bmatrix}$$

ارزش‌های ویژه، ریشه‌های معادله مشخصه[1] هستند:

$$|W^{-1}B-\lambda I|=0$$

$$\begin{vmatrix} ۵.۹۲-\lambda & ۱.۵۴ \\ ۰.۷۵ & ۳.۰۹-\lambda \end{vmatrix}=۰$$

$$(۵.۹۲-\lambda)(۳.۰۹-\lambda)-(۰.۷۵)(۱.۵۴)=۰$$

$$\lambda^{۲}-۹.۰۱\lambda+۱.۱۴=۰$$

ریشه‌ها عبارتند از:

$$\lambda_1=۶/۲۸ \quad \text{و} \quad \lambda_2=۲/۷۳$$

چیزی که در بالا به عنوان مقدار لامبدای ویلکز محاسبه شده، $|\mathbf{W}|/|\mathbf{T}|$ برابر با حاصل $(۱+\lambda_۲)$ ۱/ نیز می‌باشد:

$$\Lambda=[1/(1+6.28)][1/(1+2.73)]=0.037$$

تا این جا چیز تازه‌ای نبود. در هر صورت مزیت این آزمون ساختار ویژه، در مقایسه با شیوه معمول قبلی این است که اکنون می‌توانیم یک تجزیه انجام دهیم. این تجزیه بدین شرح است:

$$\Lambda=[۱/(۱+\lambda_۱)][۱/(۱+\lambda_۲)]$$

بنابراین $۱/\Lambda=(۱+\lambda_۱)(۱+\lambda_۲)$ است. با لگاریتم گرفتن از طرفین معادله خواهیم داشت:

$$\ln ۱/\Lambda=\ln[(۱+\lambda_۱)(۱+\lambda_۲)]=\ln ۱+\lambda_۱)+\ln ۱+\lambda_۲)-\ln\Delta=\sum \ln ۱+\lambda_i)$$

فرمول V بارتلت را اکنون می‌توان اصلاح کرد:

$$V=-[d_w+d_B-(p+d_B+۱)/۲]\ln\Lambda$$

$$=[d_w+d_B-(p+d_B+۱)/۲]\sum \ln(۱+\lambda_i)$$

---
[1] .charactristic equation

اکنون ما تجزیه را می‌یابیم. ابتدا آزمون عمومی را با وارد کردن هر دو ارزش ویژه λ_1 و λ_2 در فرمول V اجرا می‌کنیم:

$$V = [9 + 2 - (2 + 2 + 1)/2][\ln(1 + 6.28) + \ln(1 + 2.73)] = 28.06$$

این مقدار همان مقدار بالاست. این به صورت x^2 با pd_B=۴ درجه آزادی توزیع شده است و در نتیجه بین سه نوع بازار کار تفاوت معناداری وجود دارد. اکنون تجزیه مورد نظر را اعمال می‌کنیم: دو تابع افتراقی وجود دارد. لازم به یادآوری اســـت که تعداد توابع افتراقی معادل حداقل (P, ۱-g) با ۳=g گروه و ۲=p متغیر ا ست. تابع دوم واب‌سته به بخ‌شی ا ست که ارزش ویژه دوم ارائه می‌کند. این بخش را می‌توان به طور جداگانه به دلیل ویژگی‌های تجزیه و تحلیل افزایشـــی x^2 آزمود. بنابراین در فرمول مربوط به V (که به صورت x^2 توزیع می‌شود)، می‌توانیم λ_2 را به طور جداگانه وارد می‌کنیم. این روش می‌آزماید که آیا تابع افتراقی ثانویه هم تفاوت مرکزیت معناداری نشان می‌دهد:

$$V = [9 + 2 - (2 + 2 + 1)/2]\ln(1 + 2.73) = 11.19$$

با درجات آزادی ۱=(۲-۳)(۱-۲)=(۲-g) (۱-p)، این مقدار معنادار است، چون مقدار بحرانی x^2 برای $\alpha = ۰/۰۵$ و ۱=d_f برابر ۳/۸۴ است که از ۱۱/۱۹ کمتر است.

اکنون بینش بی‌شتری حا صل کرده‌ایم. نه تنها معلوم شده ا ست که تفاوت معناداری بین سه گروه وجود دارد، بلکه دو تفاوت خاص هم وجود دارد که توسط دو تابع افتراقی بیان می‌شود. ازاین‌رو خوب است علاوه بر دو ارزش ویژه، خود دو تابع هم مورد آزمون قرار گیرند. برای این منظور بردارهای ویژه را محاســـبه خواهیم کرد. مقادیر ۶/۲۸=λ_1 و ۲/۷۳=λ_2 را یکی یکی وارد معادله ماتریس $(\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{B} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{K} = 0$ می‌کنیم و معادلات را برای تبیین وزن‌های $\mathbf{K}$ حل می‌کنیم. این وزن‌ها بهنجار شده و دو تابع افتراقی را به دست می‌دهند (تمرینی برای خواننده):

$$t_1 = 0.973x_1 + 0.23x_2$$
$$t_2 = -0.391x_1 + 0.920x_2$$

علت اختلاف کمی‌که بین نتایج کامپیوتری و این نتایج مشـــاهده می‌شـــود آن اســـت که شـــیوه استاندارد کردن به کار رفته است (که درجات همبستگی زیاد بین پیش‌بینی‌کننده‌ها اهمیت دارد). می‌توان مشاهده نمود که تابع اوّل وزن زیادی را به متغیر x_1 (تعداد بستگان) و تابع دوّم به x_2 (رضایت از درآمد) تخصیص می‌دهد.

چنانچه مرکزیت گروهی را هم ملاحظه کنیم. نســـبت به داده‌ها بینش بهتری کســـب می‌کنیم. میانگین‌های متغیر x_1 به ترتیب ۲/۲۵، ۲/۷۵ و ۷/۷۵ اســـت. برای این متغیر که وزن زیادی از تابع افتراقی نخست را به خود اختصاص داده است، مهاجرین کوبایی دو بازار کار، به دقت متمایز می‌شوند. مهاجرین بازار کار اولیه و ثانویه در این تابع ت‌شخی‌صی به سهولت از یکدیگر متمایز نمی‌شوند، اما به لحاظ تجربی از مهاجرین نواحی کوبایی‌نشین متفاوت هستند.

تابع تشخیصی دوّم، گروه‌ها را به گونه‌ی دیگری مرتب می سازد. میانگین‌های متغیر x_2 که وزن زیادی از تابع تشخیصی دوم را به خود اختصاص می‌دهند به ترتیب ۸، ۳/۲۵ و ۷/۷۵ هستند. در این بعد دوّم که غالباً توسط رضایت از درآمد تعیین می‌شود، بازار کار دوّم از دو مورد دیگر به خوبی متمایز می‌گردد. مهاجرین نواحی کوبایی‌نشین تشابه زیادی با افراد حوزه نخست نشان می‌دهند.

۱۱-۲-۶ طبقه بندی

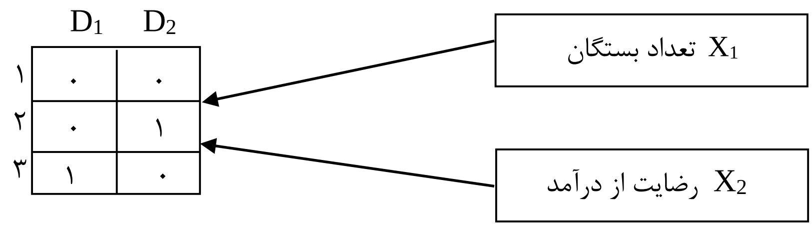
از نتایج کامپیوتری می‌توان مشاهده کرد که طبقه‌بندی هر یک از ۱۲ نفر در سه گروه به صورت کامل و بدون همپوشی صورت گرفته است. برای توضیح بیشتر در این باره به فصل ۸ بخش تحلیل افتراقی دوگروهی مراجعه کنید.

۱۱-۲-۷ هم‌واریانسی

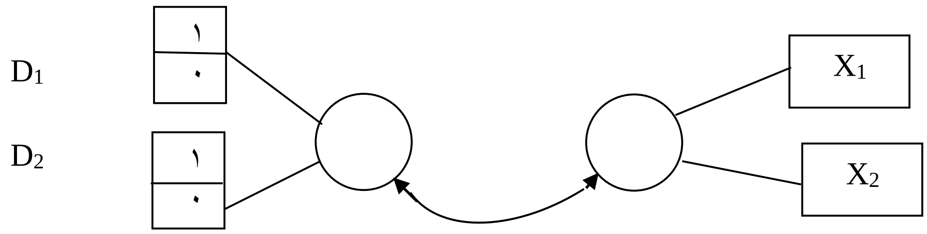
اجازه دهید بازبینی آزمون M باکس را از یاد نبریم. ماتریس‌های کوواریانس درون‌گروهی نبایستی از یکدیگر تفاوت معناداری داشته باشند. این واقعیت که این حالت برقرار است (سطح معناداری تجربی p=۰/۹۶۴۵ از ۰/۰۵ خیلی بیشتر است) بدین معناست که ما مجاز هستیم این شیوه را به کار ببریم.

۱۱-۳ تحلیل متمایزکننده چندگانه به عنوان تحلیل همبستگی کانونی

بنا به وعده‌ای که در بالا دادیم، اکنون رویکرد دیگری را پیرامون اصول محاسبه کانونی مورد بحث قرار می‌دهیم. به دلایل زیر تحلیل افتراقی چندگانه را می‌توان با استفاده از تحلیل همبستگی کانونی هم محاسبه کرد. اجازه دهید مثال اختصاری خود درباره مهاجرین کوبایی را دوباره مرور کنیم. ساختار مسأله تحقیق مانند شکل ۷-۱۱ است. سه گروه نیروی کار با هم یک متغیر سه بخشی با مقوله‌های ۱، ۲ و ۳ را تشکیل می‌دهند. متغیر سه بخشی را می‌توان با دو متغیر دامی D_1 و D_2 به صورتی که در شکل نشان داده شده است، جایگزین کرد. در پرتو این کار ساختار شیوه تحلیل همبستگی کانونی مانند شکل ۸-۱۱ در می‌آید.



شکل ۷-۱۱ ساختار طرح تحقیق



شکل ۸-۱۱ طرح تحلیل همبستگی کانونی

به دنبال آن بایستی ماتریس داده‌های دیگری غیر از آنچه در بالا داده شد به کامپیوتر بدهیم. اکنون به جای سه متغیر، چهار متغیر وجود دارد (جدول ۹-۱۱).

اینک بر می‌گردیم به تحلیل همبستگی کانونی (فصل ۱۰). محاسبات تمرینی برای خواننده است. نتایج را به صورت اختصاری بیان می‌کنیم.

جدول ۷-۱۱ ماتریس داده‌ها

	$D_۱$	$D_۲$	$X_۱$	$X_۲$
بازار کار اولیه	۰	۰	۲	۶
	۰	۰	۴	۹
	۰	۰	۱	۸
	۰	۰	۲	۹
بازارکار ثانویه	۰	۱	۴	۳
	۰	۱	۲	۴
	۰	۱	۳	۵
	۰	۱	۲	۱
نواحی محاط	۱	۰	۹	۷
	۱	۰	۶	۸
	۱	۰	۸	۹
	۱	۰	۸	۷

نقطه شروع ماتریس همبستگی است:

$$R=\left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & -۰.۵۰ & ۰.۹۲ & ۰.۴۰ \\ -۰.۵۰ & ۱ & -۰.۴۰ & -۰.۸۷ \\ \hline ۰.۹۲ & -۰.۴۰ & ۱ & ۰.۳۴ \\ ۰.۴۰ & -۰.۸۷ & ۰/۳۴ & ۱ \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{R}_{xx} & \boldsymbol{R}_{xy} \\ \hline \boldsymbol{R}_{yx} & \boldsymbol{R}_{yy} \end{array}\right]$$

ماتریسی که ساختار ویژه آن مورد آزمون قرار می‌گیرد $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{R}_{yy}^{-۱}\boldsymbol{R}'_{xy}\boldsymbol{R}_{xx}^{-۱}\boldsymbol{R}_{xy}$ است:

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰.۳۴ \\ ۰.۳۴ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۰.۹۲ & -۰.۴۰ \\ ۰.۴۰ & -۰.۸۷ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۰.۵۰ \\ -۰.۵۰ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱}$$

$$\begin{bmatrix} ۰.۹۲ & ۰.۴۰ \\ -۰.۴۰ & -۰.۸۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰.۸۴۹ & ۰.۰۶۱ \\ ۰/۰۲۶ & ۰.۷۴۵ \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه $|\mathbf{M}-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}|=\mathbf{0}$ ارزش‌های ویژه زیر را به ما می‌دهد: $\lambda_۱=۰/۸۶۳$ و$\lambda_۲=۰/۷۳۲$. این دو ارزش ویژه به ترتیب مجذور همبســـتگی کانونی بین جفت اوّل و دوّم متغیرهای کانونی هستند. هر دو همبستگی کانونی بزرگ هستند. در اینجا هم می‌بینیم که تمایز سه بازار کار از طریق یک بعد منفرد صورت نمی‌گیرد، بلکه براساس دو بعد است (مقایسه کنید با توابع تشخیصی).

ارزش‌های ویژه مربوط به $\mathbf{M}$ معادل ارزش‌های ویژه‌ای که قبلاً برای $W^{-1}B$ محاسبه شد (۶/۲۸ و ۲/۷۳) نیستند. البته می‌توان نشان داد که بین هر دو رابطه ثابتی وجود دارد. اگر ارزش‌های ویژه تحلیل همبستگی کانونی را با λ_{cc} نشان دهیم آنگاه؛ $\lambda_{cc}=\lambda/(\lambda+۱)$ و $\lambda=\lambda_{cc}/(۱-\lambda_{cc})$ در حقیقت: (۱+۶/۲۸)/۶/۲۸=۰/۸۶۳ و (۱+۲/۷۳)/۲/۷۳=۰/۷۳۲

لامبدای ویلکز در قسمت فوق به صورت حاصل ضرب $۱+(۱+\lambda_i)$ محاسبه گردید. از روابط ثابت فوق نتیجه می‌گیریم که $۱-\lambda_{cc}=۱/(۱+\lambda)$. در نتیجه Λ ویلکز نیز حاصـــل‌ضـــرب ارزش‌های $۱-\lambda_{cc}$ است: $\Lambda=\prod(1-\lambda_{cc})=$ (۱-۰/۸۶۳)(۱-۰/۷۳۲)=۰/۰۳۷.

در نظر داشته باشید که $۱-\lambda_{cc}$ تفسیر جالبی دارد. با توجه به این که λ_{cc} مجذور همبستگی کانونی اســت، یعنی بخشـــی از واریانس در یک مجموعه که با بخش دیگر تبیین می‌شـود، $۱-\lambda_{cc}$ بخش تبیین نشـــده یعنی واریانس باقی مانده اســـت. بنابراین لامبدای ویلکز حاصـــل‌ضـــرب این واریانس‌های باقی مانده است.

مراحل بعدی تحلیل مثل قبل اســت. با به کار بردن V بارتلت، Λ ویلکز نشــان می‌دهد که بین سه گروه، تفاوت معناداری وجود دارد. دو همبستگی کانونی را به طور جداگانه می‌توان آزمود و هر دو معنادار ظاهر می‌شوند.

ماتریس بردارهای ویژه را می‌توان محاســـبه کرد و به کمک آن، ضـــرایب متغیرهای کانونی (به عنوان ترکیب‌های خطی متغیرها از یک مجموعه) را تعیین کرد. لطفاً جهت دیدن ضـــرایب به نتایج کامپیوتری رجوع کنید. در این جا نیز به نظر می‌رســـد بعد اوّل (جفت اوّل متغیرهای کانونی) غالباً توســط تعداد بســتگان ($X_۱$) تعیین می‌شــود و تفاوت بین نواحی کوبایی‌نشــین و بازارهای کار دیگر (دامی $D_۱$) را ســبب می‌شـود. جفت دوّم ضـرایب بالایی را در رابطه با رضـایت شـغلی ($X_۲$) نشــان می‌دهد و اختلاف بین بازار کار ثانویه و سایر بازارهای کار(دامی $D_۲$) را سبب می‌شود.

نتایج مشابهی از شیوه محاسبات دیگر قبلاً به دست آمده است.

۱۱-۳-۱ نتایج تحلیل افتراقی چندگانه حاصل از نرم افزار SPSS ویندوز

نتایج کامپیوتری همانند تحلیل متمایزکننده دوگروهی ا ست، تنها تفاوت در این ا ست که در این جا به جای دو گروه، سه تا وجود دارد.

برگزیدن یا ساختن فایل داده‌ها

نحوه باز کردن SPSS و گرفتن فایل داده‌ها یا اگر فایل وجود نداشـــته باشـــد، نحوه ی وارد کردن داده‌ها، نام، نوع و برچسب متغیرها و ذخیره سازی فایل داده‌ها با پسوند sav. در فصل ۴ نشان داده شد.

اجرای تحلیل افتراقی

روی عبارت statistic کلیک کنید. سپس روی Classify و بعد روی Discriminant کلیک کنید. آنگاه روی متغیر Y در قسمت Source variable List در سمت چپ کلیک کرده و روی دکمه فشاری ⊳ مربوط به Grouping variable و ســپس روی عبارت Define Range کلیک کنید. مقدار حداقل ۱ را وارد کنید. روی مقدار حداکثر نیز کلیک کردن و مقدار ۳ را وارد کنید. روی واژه Continue کلیک کنید. اکنون شما به دریچه محاوره‌ای تحلیل افتراقی بر می‌گردید. در ق سمت فهر ست متغیرها روی $X_۱$ و $X_۲$ (یا به طور جداگانه یا به طور همزمان با روش گرفتن دکمه و موس، و کشــیدن روی هر دو متغیر تا آن‌ها انتخاب شوند) و سپس روی دکمه ⊳ متغیرهای مستقل کلیک کنید.
روی عبارت statistic کلیک کنید.دریچه محاوره‌ای آماره تحلیل افتراقی پدیدار خواهد شد. ابتدا روی Box' M و سپس روی Continue کلیک کنید.

نیازی نیست روی واژه Method کلیک کنید، زیرا نمی‌خواهیم تحلیل مرحله‌ای را انتخاب کنیم. روی واژه Classify کلیک کنید. یک دریچه محاوره‌ای مربوط به دســـته‌بندی تحلیل افتراقی ظاهر می‌شود، مشاهده خواهید کرد که زیر عبارت Prior Probabilities عبارت All Groups Equal انتخاب شده ا ست. شما می‌توانید در ق سمت Group Sizes روی Compute کلیک کنید و یک دکمه ن سبت نشـــان خواهد داد که شـــما این گزینه را انتخاب کرده‌اید، امّا اکنون این کار نتیجه را تغییر نمی‌دهد، زیرا گروه‌ها به لحاظ اندازه یکســـان هســـتند. می‌توانید چند نمودار و گزینه را هم انتخاب کنید. روی واژه Continue کلیک کنید.

اگر اکنون روی واژه OK در دریچه محاوره‌ای تحلیل افتراقی کلیک کنید، SPSS شیوه آماری را اجرا خواهد کرد و نتایج در دریچه مربوطه ظاهر خواهند شد.

ذخیره کردن نتایج را از یاد نبرید: روی واژه File و سپس save as کلیک کنید و نام مورد نظر را با پسوند lst. وارد کنید و روی واژه ok کلیک کنید.

اجرای این شیوه آماری با دستورات SPSS

چنانکه می‌دانید شما می‌توانید شیوه آماری قبل را با بازکردن دریچه دستورات و نوشتن دستورات spss نیز به اجرا درآورید. برای این کار روی واژه File و سپس واژه New و بعد SPSS Syntax کلیک کنید و دستورات را تایپ کنید، آنگاه مکان نما را به خط اوّل منتقل کرده و روی نشانه ⊳ کلیک کنید.

دستورات کوتاه به شرح زیر است:

1Discriminant/Groups y (1.3)
2 /variables x_1 x_2 ۲
3 /statisties mean Boxm Table.

عبارت Discriminant در جمله نخست یک تحلیل افتراقی را درخواست می‌کند و عبارت Groups=Y(۱.۳) نشان می‌دهد که متغیر وابسته Y گروه‌ها را ارائه می‌کند (گروه اول توسط نمره حداقل ۱ و گروه آخر توسط نمره حداکثر ۳ نشان داده شده است).

در دستور ۲ متغیرهای متمایزکننده $X_۱$ و $X_۲$ مشخص شده‌اند. این ها در سطح سنجش فاصله‌ای اندازه‌گیری شده‌اند .

در جمله ۳ عبارت 'Statistics=Mean Box' M Table' سه چیز را درخواست می‌کند: میانگین گروهی آزمون M باکس برای تجانس ماتریس‌های کوواریانس (آزمون هم‌واریانسی) و جدول ٪ درست طبقه‌بندی.

نتایج به شرح زیر است:

-----------------DISCRIMINANT ANALYSIS----------
On groups defined by Y labour market
12 (unweighted)cases were processed.
0 of these were excluded from the analysis.
12(unweighted)cases will be used in the analysis.
Number of cases by Group

	Number of cases		
Y	unweighted	weighted	Label
1	4	4.0	
2	4	4.0	
3	4	4.0	
Total	12	12.0	

Group Means	X1	X2
Y	2.25000	8.00000
1	2.75000	3.25000
2	7.75000	7.75000
Total	4.25000	6.33333

On groups defined by Y labour market
Analysis number 1
Direct method: All variables Passing the tolerance test are entered.

Minimum Tolerance Level ………..00100
Canonical Discriminant Functions
Maximum number of Functions………..2
Minimum Cumulative Percent of variance …100.00
Maximum Significance of Wilk's Lambda….1.0000
Prior Probability for each group is .33333

Canonical Discriminant Functions

Fcn	Eigenvalue	Pct of Variance	Cum Pct	Canonical Corr		After Fcn	Wilk's Lambda	Chisquare	DF	Sig
					:	0	.0368	28.061	4	.0008
1*	6.2803	69.71	69.71	.9288	:	1	.2682	11.187	4	.0000
2*	2.7288	30.29	100.00	.8555	:					

*marks the 2 Canonical Discriminant Functions remaining in the analysis

Standardized Canonical Discriminant Functions Coefficients

	FUNC 1	FUNC 2
X1	.92988	-.39285
X2	.26215	.97483

Structure Matrix:
Pooled-Within-groups Correlations between discriminating variables and Canonical Discriminant Functions
(variables ordered by size of correlation within Functions)

Group	FUNC 1	FUNC 2
X1	.96569*	-.25969
X2	.38917	.92117*

Canonical Discriminant Functions evaluated at Group Means (Group centroids)

Group	FUNC 1	FUNC 2
1	-1.28076	1.83860
2	-1.77522	-1.65043
3	3.05598	-.18817

Test of equality of group covariance matrices using BOX's M
The ranks and natural logarithms of determinants printed are those of the group covariance matrices.

Group Label	Rank	Log Determinant
1	2	1.001449
2	2	.916291
3	2	.245122
Pooled-Within-groups Covariance Matrix	2	.9544442

BOX's M	Approximate F	Degrees of freedom		Significance
2.1014	.23677	6,	2018.8	.9645

Classification Results –

Actual Group	N0. of Cases	predicted Group Membership 1	2	3
----------------	--------	------	------	-------

Group	1	4	4	0	0
			100.0%	.0%	.0%
Group	2	4	0	4	0
			.0%	100.0%	.0%

Percent of ,grouped, cases correctly classified : 100.00%

۱۱-۳-۲ نتایج SPSS ویندوز پیرامون تحلیل افتراقی چندگانه به عنوان تحلیل همبستگی کانونی

اینک ماتریس دیگری را به کامپیوتر ارائه می‌کنیم. دو متغیر متمایز کننده X_1، تعداد بستگان در ایالات متحده و X_2 رضایت از درآمد، یکسان می‌مانند. متغیر وابسته سه‌وجهی با دو متغیر دامی D_1 و D_2 جایگزین شده است. برای درخواست یک تحلیل همبستگی کانونی، خواننده به فصل ۱۰ ارجاع داده می‌شود. جملاتی که در دریچه دستورات تایپ می‌شوند، به این شرحند:

```
1  MONOVA D1 D2 with X1 X2
2   /DIScrim
3  /Print Signif(Eigen)
4   /Design.
```

در جمله ۱ و ۲، یک تحلیل همبستگی کانونی و در جمله ۳ ارزش‌های ویژه درخواست شده‌اند. نتایج که بخشی از آن‌ها حذف شده است، به شرح زیر است:

* * ANALYSIS OF VARIANCE – DESIGN 1 * *
EFFECT WITHIN CELLS Regression
Multivariate Tests of Significance (S=2 .M=-1/2. N=3)

Test Name	Value	Approx.F	Hypoth .DF	Error DF	Sig.of F
Pillais	1.59446	17.69261	4.00	18.00	.000
Hotellings	9.00911	15.76594	4.00	14.00	.000
Wilks	.03684	16.84102	4.00	16.00	.000
Roys	.86264				

Eigenvalues and canonical Correlations

Root No.	Eigenvalue	Pct.	Cum.pct.	canon cor.	Sq. cor
1	6.280	69.711	69.711	.929	.863
2	2 .729	30.289	100.000	.855	.732

* * ANALYSIS OF VARIANCE – DESIGN 1 * *
EFFECT .. WITHIN CELLS Regression (CONT.)
Univariate F-tests With (2,9) D. F.

Variable	sq.Mul.R	Mul.R	Adj.R-sq	Hypoth.MS	Error MS
D1	86151	.92818	.83074	1.14868	.04103
D2	.77558	.88067	.72571	1.03411	.06649

Variable F Sig. of F

D1	27.99374	.000
D2	15.55179	.001

* * ANALYSIS OF VARIANCE – DESIGN 1 * *

Function No.

Variable	1	2
D1	1.913	1.356
D2	-.218	2.335

Standardized Canonical Discriminant Functions Coefficients for DEPENDENT variables

Function No.

Variable	1	2
D1	.942	.668
D2	-.107	1.150

Correlations between DEPENDENT and Canonical Variables

Function No.

Variable	1	2
D1	.996	.093
D2	-.578	.816

Variance explained by Canonical variables of DEPENDENT Variables

CAN. VAR.	pct Var DE	Cum Pct DE	Pct Var CO	Cum Pct Co
1	66.294	66.294	57.188	57.188
2	33.706	100.000	24.667	81.855

* * ANALYSIS OF VARIANCE – DESIGN 1 * *

Raw Canonical Coefficients for COVARIATES

Function No.

COVARIATE	1	2
X1	.327	.193
X2	.077	-.400

Standardized Canonical Coefficients for COVARIATES

CAN. VAR.

COVARIATE	1	2
X1	.914	.540
X2	.201	-1.043

* * ANALYSIS OF VARIANCE – DESIGN 1 * *

Correlations between COVARIATES and Canonical Variables

CAN. VAR.

COVARIATE	1	2
X1	.982	.189
X2	.508	-.861

Variance explained by Canonical variables of the COVARIATES

CAN. VAR.	pct Var DE	Cum Pct DE	Pct Var CO	Cum Pct Co
1	52.738	52.738	61.135	61.135
2	28.442	81.180	38.865	100.000

Regression analysis for WITHIN CELLS error term
* * ANALYSIS OF VARIANCE – DESIGN 1 * *
Regression analysis for WITHIN CELLS error term (CONT)
Dependent Variable .. D1 dummy 1

COVARIATES	B	Beta	Std. Err.	T-Value	Sig.of t
X1	.15625	.88861	.023	6.746	.000
X2	.01939	.10261	.025	.779	.456

COVARIATE	Lower -95%	CL –Upper
X1	.104	.209
X2	-.037	.076

* * ANALYSIS OF VARIANCE – DESIGN 1 * *
Regression analysis for WITHIN CELLS error term (CONT)
Dependent Variable .. D2 dummy 2

COVARIATES	B	Beta	Std. Err.	T-Value	Sig.of t
X1	-.02014	-.11452	.029	-.683	.512
X2	-.15790	-.83551	.032	-4.983	.001

COVARIATE	Lower -95%	CL –Upper
X1	-.087	.047
X2	-.230	-.086

پیوست

اطلاعات ریاضی و آماری مورد نیاز

الف-۱ جبر مقدماتی

اطلاع از **نظریه اعداد** در زمینه‌های زیر لازم است: اعداد طبیعی، اعداد صحیح، اعداد گویا، اعداد حقیقی، عملیات حسابی (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، توان)، خواص (شرکت‌پذیری، تعویض‌پذیری، توزیع‌پذیری)، مفهوم قدرمطلق (۹=|۹-|)؛ **نظریه مجموعه‌ها** (مجموعه، زیرمجموعه، اجتماع، اشتراک، متمم، ترکیب)، **لگاریتم‌ها** (مبنای ۱۰، مبنای e، قواعد)؛ **حل معادلات** (معادلات درجه دوم و چند جمله‌ای‌های درجه nام) و نظام‌های معادلات؛ **جایگشت‌ها**، **ترکیب‌ها** و **تغییرپذیری**، قضیه دوجمله‌ای نیوتن، **نظریه توابع** (تابع خطی، تابع درجه دوم، چند ضلعی، تابع نمایی، تابع لگاریتمی)؛ سری‌های اعداد: تصاعدی‌های ریاضی و هندسی؛ **مجموعه‌ها** یا **علامت سیگما** (محاسبات و قواعد)؛ **مشتق‌گیری** و **انتگرال‌گیری** (تعیین اپتیمم، ماکزیمم و مینیمم).

الف-۲ آماره‌های مقدماتی

از آنجا که در این کتاب فقط با شیوه‌های کلاسیک سر و کار داشته‌ایم، در حالی که متغیرها یا در سطح فاصله‌ای اندازه‌گیری شده‌اند یا با عملیات دامی، می‌توان آن‌ها را در سطح فاصله‌ای در نظر گرفت. از این‌رو به آماره‌هایی بسنده می‌کنیم که به هدف‌های ما مربوط هستند: میانگین، میانگین وزن داده شده، تغییرپذیری، واریانس، همبستگی، و علاوه بر آن به نظریه‌ی نمونه‌گیری و نظریه‌ی آزمون: تقسیم واریانس به مؤلفه‌های درون‌گروهی و بین‌گروهی و همچنین کوواریانس، هنجارسازی، نظریه نمونه‌گیری شامل تمایز بین توزیع جمعیت، توزیع نمونه‌گیری از نمونه و توزیع نمونه گیری؛ خطای نوع اول و خطای نوع دوم، برآورد کردن و آزمون یک فرضیه، آزمون t و اعمال درجات آزادی، توزیع احتمالات Z، t، X^2 و F.

اجازه دهید از مقیاس‌های گرایش مرکزی شروع کنیم.

الف-۲-۱ اندازه‌های گرایش مرکزی ($\bar{X}$ و $\bar{X}_g$)

در همه مطالعات، معقول است که بررسی جداگانه‌ای روی هر متغیر، جدای از بقیه متغیرها صورت گیرد. توزیع فراوانی یک متغیر بایستی پراکندگی کافی داشته باشد. این توزیع ممکن است تک‌نمایی، دونمایی یا چندنمایی باشد. در بسیاری مواقع تک‌نمایی بودن مورد نیاز است و گاهی با تشکیل فواصل طبقه‌ای غنی‌تر می‌شود. یک توزیع می‌تواند به حالت چوله یا متقارن باشد. توزیع‌های متقارن می‌توانند برآورد خوبی از توزیع نرمال (بهنجار) باشند، اما در عین حال ممکن است از حالت نرمال فاصله داشته باشند؛ اگر بیش از منحنی نرمال اوج بگیرند، به عنوان کشیده[1] به حساب می‌آیند و اگر تخت‌تر از حالت نرمال باشند، مسطح (پهن)[2] گفته می‌شوند. در بعضی مواقع برآورد یک توزیع نرمال ضرورت دارد و آزمون نرمال بودن که برای این منظور طرح شده است متأسفانه در بسیاری اوقات نادیده گرفته می‌شود.

یکی از نخستین اندازه‌هایی که در بررسی یک متغیر به طور منفرد محاسبه می‌شود، اندازه گرایش مرکزی است: میانگین حسابی، نما، میانه و موارد دیگر. نما فقط در حالت توزیع یک‌نمایی مفید است. نما نمره (ارزشی) است که بیشترین فراوانی را دارد. میانه مقدار واحد میانی است، یعنی نیمی از واحدها از آن کوچکتر و نیمی از آن بزرگتر هستند.

در این کتاب که عموماً متغیرها در سطح سنجش فاصله‌ای اندازه‌گیری شده‌اند، ما بیشتر با محاسبه میانگین حسابی سر و کار داشته‌ایم. میانگین حسابی ($\overline{X}$ برای نمونه تصادفی، μ برای جمعیت) معدل مجموع تمام ارزش‌ها تقسیم بر تعداد آن‌هاست : $\Sigma X / n$.

وقتی‌که یک توزیع فراوانی به طبقاتی تقسیم می‌شود، نقطه میانی هر طبقه (X_{mi}) معرف طبقه خواهد بود و در تعداد عناصر (f_i) آن طبقه ضرب می‌شود: $(\sum fiXmi)/n = (\sum fiXmi)/\sum fi$.

چنین عملیاتی شبیه محاسبه میانگین وزن‌داده‌شده است، شیوه‌ای که مرتباً به آن بر می‌خوریم. اگر n عنصر در گروه‌هایی متفاوت توزیع شوند و اگر به گروه‌ها وزن‌های متفاوتی داده شود (g_i برای iامین گروه)، آنگاه میانگین وزن یافته عبارت است از $\overline{X}_g = (\sum giXi)/\sum gi$. در حالت توزیع فراوانی دارای داده‌های طبقه‌بندی شده، فراوانی‌های طبقه‌ای f_i وزن‌ها هستند، و مجموع تعداد کل عناصر n آن‌ها $\sum fi$ است.

الف-۲-۲ اندازه‌های پراکندگی

یک توزیع فراوانی بایستی پراکندگی را نشان دهد. متغیر باید دارای تغییراتی باشد. وقتی‌که تمام افراد یک کشور دین یکسانی داشته باشند، پیوندجویی دینی در آن کشور برای بررسی آماری باز نیست. خارج از آن کشور می‌توان این کار را انجام داد، زیرا در مقایسه با سایر کشورها که دارای ادیان دیگری

---
[1] .leptokurtic
[2] .platykurtic

هستند، گوناگونی و تغییر وجود دارد. اندازه‌های پراکندگی درست مثل اندازه‌های گرایش مرکزی، وابسته به سطح سنجش متغیرها هستند. در ترکیب با میانه، فاصله چارکی یا صدک‌های ۹۰-۱۰ گاهی به کار گرفته می‌شود، زیرا میانه با چارک دوم و صدک پنجاهم برابر است. اندزه‌هایی که برای اهداف ما از اهمیت خاصی برخودارند، آن‌هایی هستند که در ترکیب با میانگین حسابی به کار برده می‌شوند: تغییرپذیری، واریانس و انحراف معیار.

تغییرپذیری[1] که به آن مجموعه مجذورات (SS) هم گفته می‌شود، حاصل‌جمع مجذورات انحراف نمرات از میانگین است: $SS = \sum (X - \overline{X})^{۲}$. مجذور نمودن، این خاصیت را دارد که پراکندگی مثبت می‌شود، زیرا مجذور یک عدد همیشه مثبت است. به جای مجذور می‌توان قدر مطلق را نیز گرفت تا قدر مطلق انحراف از میانگین به دست آید: $AA = \sum \left| X - \overline{X} \right|$، امّا مجذور انحراف SS فرصت تفسیر جالب‌تری را فراهم می‌کند، زیرا امکان دسته‌بندی افزایشی به مؤلفه‌های درون‌گروهی و بین‌گروهی را می‌دهد که برای تحلیل چندمتغیره اهمیت حیاتی دارند، چنان که در بررسی بسیاری شیوه‌های گوناگون آماری معلوم گردید.

واریانس $S^{۲}$ به طور ساده معادل نسبت تغییرپذیری به تعداد درجات آزادی (تعداد موارد منهای ۱) یعنی $S^{۲} = SS / (n - ۱)$ است. علت این که به جای تقسیم بر تعداد نمونه (n)، بر (n-۱) تقسیم می‌کنیم، این است که میانگین نمونه ثابت است و بنابراین یک درجه آزادی کنار گذاشته می‌شود.

انحراف معیار S معادل جزر واریانس است: $S = [\sum (X - \overline{X})^{۲} / (n - ۱)]^{۱/۲}$. سه مفهوم واریانس، تغییرپذیری و انحراف معیار، در انجام هر یک از شیوه‌های تحلیل چندمتغیره نقش اساسی دارند. این موضوع را حتی در یک تحلیل دو متغیره هم می‌توان مشاهده کرد که مفاهیم کوواریانس، هم‌تغییری و همبستگی، با مفاهیم واریانس، تغییرپذیری و انحراف معیار یکسان هستند. این مفاهیم در هر یک از موارد بسط یافته و موشکافی شده‌ی زیر نقش بنیادی دارند. از این رو یک مطالعه همه جانبه از پیچ و خم‌های این مفاهیم لازم است. اگر چه توجه به جنبه‌های زیربنایی مستلزم صرف وقت است، امّا نتیجه آن، جبران این صرف وقت را خواهد کرد.

الف-۳-۲ اندازه‌های همبستگی

هنگامی‌که ما با بیش از یک متغیر شروع می‌کنیم، مسأله همبستگی، مثل رابطه بین درآمد و مصرف پدیدار می شود. باید دانست که مطالعه همبستگی بین دو متغیر به طور ضمنی بر مطالعه هر متغیر منفرد با میانگین و پراکندگی آن دلالت دارد. تعداد قابل‌توجهی از مقیاس‌های همبستگی، بسته به سطح سنجش متغیرها طرح شده است. اغلب این شیوه‌ها را می‌توان در کتاب تاک (۱۹۷۷، ۱۹۸۰) مرور کرد. برای مقصود ما، اندازه‌های گرایش مرکزی($\overline{X}$) و پراکندگی (s ،s²،SS) برای متغیرهای

1. variation

مورد سنجش در سطح فا صله‌ای کافی ا ست. در رابطه با تغییرپذیری (SS)، واریانس ($S^۲$) و انحراف معیار (S)، ما هم‌تغییری (SS_{xy})، کوواریانس (S_{xy}) و همبســـتگی (r_{xy}) را به ترتیب مورد بحث قرار می‌دهیم.

هم‌تغییری[۱] SS_{xy} مجموع حا صل ضرب‌های انحرافات مقادیر X از میانگین شان در انحرافات مقادیر Y از میانگین آن‌ها ست: $SS_{xy} = \sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$. وقتی‌که X و Y م ساوی با شند، هم‌تغییری به صورت تغییرپذیری در می‌آید.

کوواریانس s^2_{xy} برابر با نسبت تغییرپذیری به تعداد درجات آزادی، یعنی تعداد موارد منهای ۱ است، بنابراین: $S^2_{XY} = [\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})]/(n-1)$.

همبستگی r_{ny} معادل هم‌تغییری متغیرهای X و Y در شکل ا ستاندارد شده آن‌ها ست. برای تو ضیح بی شتر چگونگی ا ستاندارد کردن نمرات یک متغیر را از نظر می‌گذرانیم. یک متغیر X با کم کردن هر مقدار X از میانگین (به طوری که میانگین مقادیر ۰ می‌شود) و تقسیم حاصل آن بر انحراف معیار به طوری که انحراف معیار ۱ می‌شود) استاندارد می‌شود. بدین ترتیب مقدار استاندارد شده Z_X چنین ا ست: $Z_x = (X - \mu)/\sigma$. در مورد Z_y هم همین گونه ا ست. بنابراین همبستگی بین این دو متغیر بدین‌گونه ا ست: $r_{XY} = (\sum Z_X Z_Y)/(n-1)$. این همان ضریب همبستگی گشتاوری معروف پیرســن اســت که می‌توان آن را به صــورت نســبت هم‌تغییری بر ریشــه دوم حاصــل ضــرب تغییرپذیری نیز نوشت:

$$r_{XY} = \frac{\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{[\sum (X - \bar{X})^2 \sum (Y - \bar{Y})^2]^{1/2}}$$

این فرمول که نشان می‌دهد همبستگی معادل کوواریانس متغیرهای استاندارد شده است $r_{xy} = (\sum Z_x Z_y)/(n-۱)$ اساس بسیاری از محاسبات در تحلیل‌های چند متغیره را تشکیل می‌دهد. خوب است که فرمول را به خاطر بسپاریم. برای این منظور مثالی ذکر می‌کنیم تا به خاطر سپردن آن را تسهیل نماید.

بعضی اشخاص که وقت زیادی را به تفریح در خارج از منزل می‌گذرانند (X) کمتر می‌خوابند (Y). اگر این متغیرها را کمّی فرض کنیم، خواهیم داشت X= تعداد بعداز ظهرهایی که هر هفته خارج از منزل سپری شده، و Y= تعداد ساعات خواب در شب. اجازه دهید میانگین بعدازظهرهای خارج از منزل سپری شده n نفر را ۳ و انحراف معیار آن را ۱/۵ فرض کنیم. میانگین میزان ساعات خواب در منزل نیز ۸ و انحراف معیار آن ۲ باشد. نمرات z را برای تمام مقادیر X و Y حساب می‌کنیم. یعنی هر مقدار را از میانگین کم کرده بر انحراف معیار تقسیم می‌کنیم. آنگاه کسی با ۸ ساعت خواب در شب،

1. covariation

نمره ۰ ، با ۶ ساعت خواب ۱- =۲/(۸-۶)، با ۱۲ ساعت نمره ۲ را به دست می‌آورد و الی‌آخر. این نمرات z تعداد انحراف معیاری است که هر مقدار از میانگین کسر شده است: فردی با ۱۲ ساعت خواب، ۲ انحراف معیار بالای میانگین ۸ است. برای هر فرد حاصل‌ضرب نمره z خارج از منزل و نمره z مدت خواب محاسبه می‌شود. آنگاه این حاصل‌ضرب‌ها را با هم جمع کرده و حاصل‌جمع را بر تعداد افراد منهای ۱ تقسیم می‌کنیم. این به عددی بین ۱- و ۱ می‌انجامد، معمولاً به شکل دیگری به عنوان ضریب همبستگی شناخته می‌شوند.

ذکر این نکته مهم است که، با وجود این‌که ضریب همبستگی را تنها برای متغیرهای فاصله‌ای می‌توان محاسبه کرد، متغیرهای دو وجهی از این قاعده مستثنی هستند. امّا با اعمال کدگذاری دامی، مثلاً برای جنسیت: مرد=۰ و زن =۱، فرمول ضریب همبستگی باز هم قابل استفاده است. در این صورت مقیاس همبستگی را «ضریب همبستگی نقطه‌ای چهار وجهی» می‌نامند.

الف-۴-۲ تقسیم بندی واریانس

یک اصل مهم که تقریباً در هر تحلیل چندمتغیره‌ای اعمال می‌شود، تقسیم‌بندی واریانس به مؤلفه بین‌گروهی و درون‌گروهی است. ما این اصل را در این جا با عنوان تقسیم‌بندی تغییرپذیری (مجموعه مجذورات SS) نشان خواهیم داد. برای واریانس‌های نسبی، بایستی به سادگی آن را بر درجات آزادی به شیوه‌ای تعدیل شده، تقسیم کرد.

به این مجموعه نمرات متغیر X توجه کنید:

۲ ۲ ۳ ۴ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹

میانگین برابر ۵ و **تغییرپذیری کل** معادل ۵۴ است. حال اجازه دهید این ده نمره را به دو گروه پنج‌تایی تقسیم کنیم.

گروه اول عبارتند از :

۲ ۲ ۳ ۴ ۴

میانگن آن‌ها ۳ و تغییرپذیری ۴ می‌باشد.

گروه دوم عبارتند از :

۵ ۶ ۷ ۸ ۹

میانگن آن‌ها ۷ و تغییرپذیری ۱۰ می‌باشد.

حاصل‌جمع تغییرپذیری درونی گروه اول و تغییرپذیری درونی گروه دوم، **تغییرپذیری درون‌گروهی**[1] نامیده می‌شود و برابر است با ۱۴=۱۰+۴.

میانگین ۳ در گروه اوّل و میانگین ۷ در گروه دوّم با هم، یک مجموعه دو نمره‌ای را تشکیل می‌دهند که محاسبه تغییرپذیری «بین گروهی» را امکان‌پذیر می‌سازد. این مجموعه عبارتند از :

۳ ۷

1. within-group variation

میانگین این مجموعه ۵ و تغییرپذیری آن ۸ می‌باشد. البته این تغییرپذیری بر مبنای میانگین محاسبه شده است، نه براساس نمره افراد. در واقع باید گفت از سطح فردی به سطح گروهایی با پنج نفر پریده‌ایم. احتمال پراکندگی این گروه‌ها پنج برابر کوچکتر از پراکندگی اعضای آن‌هاست. میزان تغییرپذیری ۸ نیز به طور اغوا کننده‌ای کوچک است. برای این‌که مقایسه در سطح همسانی که واقعی باشد صورت گیرد، این عدد را در اندازه‌ی گروه ۵ ضرب کرده و خواهیم داشت: ۴۰=۵ x ۸. این مقدار همان **تغییرپذیری بین‌گروهی**[1] است. این تغییرپذیری بین میانگین‌های دو گروه است که به لحاظ شکل ساختگی احتمال پراکندگی کم آن در مقایسه با افراد، تصحیح شده است.

یادآور می‌شود:

کل میزان تغییرپذیری	SST = ۵۴
تغییرپذیری درون‌گروهی	SSW =۱۴
تغییرپذیری بین‌گروهی	SSB = ۴۰

و می‌بینیم که ۵۴=۱۴+۴۰ یا SST=SSW+SSB .

بنابراین تغییرپذیری کل را می‌توان به طور افزایشی به تغییرپذیری بین‌گروهی و درون‌گروهی تقسیم کرد.

این اصل را به صورت جبری به شکل زیر می‌شود بیان کرد. نمره هر فرد را به صورت X، میانگین کل با $\overline{X}$ و میانگین‌های گروهی را با $\overline{X}_i$ برای هر گروه iام نشان می‌دهیم. بنابراین:

$$X-\overline{X}=X-\overline{X}$$

$$X-\overline{X}=X-\overline{X}_i+\overline{X}_i-\overline{X}$$

$$(X-\overline{X})^2=(X-\overline{X}_i)^2+(\overline{X}_i-\overline{X})^2+2(X-\overline{X}_i)(\overline{X}_i-\overline{X})$$

$$\sum(X-\overline{X})^2=\sum(X-\overline{X}_i)^2+\sum(\overline{X}_i-\overline{X})^2+2\sum(X-\overline{X}_i)(X_i-\overline{X})$$

جمله آخر معادل صفر می‌شود، زیرا برای هر گروه i ، $\overline{X}_i-\overline{X}$ یک مقدار ثابت به حساب می‌آید و $\sum(X-\overline{X}_i)=0$. بنابراین:

$$\sum(X-\overline{X})^2=\sum(X-\overline{X}_i)^2+\sum(X_i-\overline{X})^2$$

جمله آخر بایستی در اندازه گروه ضرب شود، چون Σ مجموع نمرات افراد j است نه گروه‌های i:

$$\sum(X-\overline{X})^2=\sum(X-\overline{X}_i)^2+n_i\sum(X_i-\overline{X})^2$$

$$SST=SSW+SSB$$

1. between-group variation

الف-۵-۲ نظریه نمونه‌گیری

از نظریه نمونه‌گیری می‌بایست اطلاعات مقدماتی درباره بعضی مفاهیم مهم داشته باشیم: جمعیت، نمونه تصادفی، توزیع نمونه‌گیری، نظریه احتمالات (برآورد)، آزمون یک فرضیه بویژه آزمون t تفاوت بین میانگین‌ها، خطای نوع I، خطای نوع II ، درجات آزادی و بعضی اطلاعات مربوطه به توزیع‌های احتمالی کم. آنچه که در ادامه می‌آید شرح بسیار مختصری از مطالبی است که با این کتاب بیشتر مرتبط هستند.

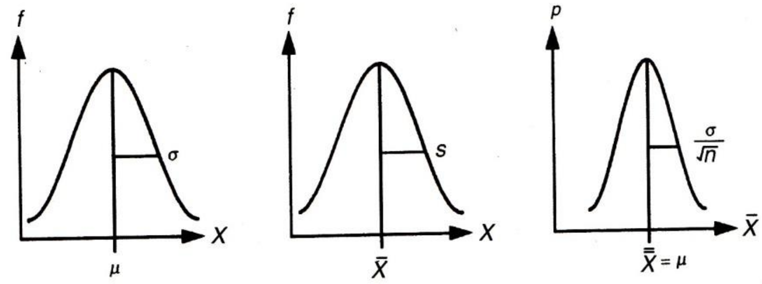
وقتی‌که یک نمونه تصادفی n=۲۰۰۰ عنصری از یک جمعیت N عنصری (اگر N زیاد باشد، دانستن تعداد دقیق لازم نیست) گرفته شده باشد، سه نوع توزیع در آن وجود دارد: توزیع جمعیت، توزیع نمونه و توزیع نمونه‌گیری. اگر یک متغیر کمّی مثل سن X را در نظر بگیریم و فرض کنیم که توزیع سن در جمعیت شکل بهنجار دارد، آنگاه سه نوع توزیع مطابق شکل (الف- ۱) خواهیم داشت.

توزیع سن در نمونه بسیار شبیه به توزیع جمعیت است. روی محور X مقادیر سن و روی محور Y تعداد افراد (فراوانی‌های F) را مشاهده می‌کنیم. میانگین و انحراف معیار جمعیت با حروف یونانی (μ وσ) نشان داده می‌شوند. که در مورد نمونه فرق دارند ($\overline{X}$ وS). میانگین نمونه ($\overline{X}$) یک برآوردکننده غیر اریب از میانگین جمعیت (μ) است. این موضوع در مورد واریانس جمعیت از ظرافت بیشتری برخوردار است. واریانس جمعیت به صورت $\sum(X-\mu)^{۲}/N$ محاسبه می‌شود. به طور شهودی انتظار داریم واریانس نمونه $S^{۲}=\sum(X-\overline{X})^{۲}/n$، برآورد خوبی از واریانس جمعیت باشد. ولی به هرحال این برآورد روی حد پایین است. با توجه به این که در نمونه‌گیری تصادفی سوگیری به سمت گزینش مقادیر نزدیک‌تر به میانگین است، تا حدود انتهایی، واریانس نمونه، اندکی کوچک‌تر خواهد بود. با قرار دادن n-۱ به جای مقدار n در مخرج، این اشکال اصلاح می‌شود. به این ترتیب مقدار $s^2=S^2[n/(n-1)]$ یک برآورد غیر اریب از واریانس جمعیت σ^2 است. علت این که مخرج بایستی دقیقاً n-۱ باشد، در محاسبات آماری کاملاً ثابت شده است.

توزیع نمونه‌گیری، با دو توزیع اخیر تفاوت زیادی دارد. در این جا عناصر، افراد با یک سن X نیستند، بلکه نمونه‌های زیادی با اندازه n هستند که از جمعیت واحدی نمونه‌برداری شده‌اند. لذا روی محور X میانگین‌های سنی که در هر نمونه یافت شده‌اند، و روی محور Y نسبت‌های نمونه‌ها (P) قرار دارند که به هر میانگین تعلق دارند. این نسبت‌های نمونه‌ها (P) به عنوان میزان احتمالات (p) در نظر گرفته می شوند، طوری که توزیع نمونه‌گیری در واقع یک توزیع احتمالات است، در این مورد یک توزیع بهنجار است. میانگین آن، میانگین تمام نمونه‌هاست که با دو خط تیره روی X نشان داده می‌شود. مقدار مورد انتظار آن μ است. انحراف معیار توزیع نمونه‌گیری نیز به عنوان خطای معیار شناخته می شود و با انحراف معیار جمعیت σ ، مساوی نیست، بلکه $\sqrt{n}$ کوچکتر است. به صورت محاسباتی می‌توان نشان داد که $\sigma^2_{\overline{\overline{X}}}=\sigma^2/n$. دلیل اینکه پراکندگی توزیع نمونه‌گیری، چنان که

در نمودار مشـاهده می‌شـود، از پراکندگی دو توزیع دیگر کوچکتر اسـت، همین نکته اسـت. به لحاظ شهودی این بدان معناست که میانگین‌های گروهی شانس پراکندگی کمتری نسبت به مقادیر منفرد (X) دارند. در تقسیم‌بندی واریانس نیز با همین موضوع سر و کار داریم: در گروهی با اندازه n احتمال پراکندگی، n بار کمتر است.

این سه توزیع نشان می‌دهند که جمعیت، نمونه و توزیع نمونه‌گیری اساس تمام آماره‌های استنباطی را تشکیل می‌دهند. هر بار که درباره جمعیت از روی داده‌های نمونه استنتاجی به عمل می‌آید، باید این توزیع‌ها را برای هر متغیر به طور جداگانه در نظر گرفت.



توزیع نمونه‌گیری   توزیع نمونه   توزیع جمعیت

شکل الف-۱ منحنی‌های توزع بهنجار

با این مقدمه، اینک به نظریه نمونه‌گیری می‌پردازیم. این مبحث را به دو بخش می‌توان تقسیم کرد: **نظریه برآورد**[۱] و **نظریه آزمون**[۲].

مثال زیر نمونه‌ای از **برآورد آماری** ا ست. یک هفته قبل از انتخابات ریا ست جمهوری فراذ سه یک پیمایش با نمونه تصادفی نشان می‌دهد که رقابت دو نامزد انتخاباتی ژیگارد‌ستن و میتران بسیار به هم نزدیک اســـت: ۴۸٪ و ۵۲٪ . چنان‌چه برآورد ۵۲٪ برای میتران که براســـاس پیمایش ۲۰۰۰ رأی‌دهنده واجد شـــرایط صـــورت گرفته بود، یک فاصـــله اطمینان ۵۴-۵۰ ایجاد کند، آنگاه با یک احتمال از قبل تعیین شـده مثلاً ۹۹٪ می‌توانیم پیش‌بینی کنیم که میتران پیروز خواهد شـد. با یک فاصــله اطمینان بیشــتر ۵۶-۴۸ یا یک ســطح اطمینان کمتر ۹۰٪، پیش‌بینی ما از اطمینان کمتری برخودار ا ست. همی شه عدم قطعیت وجود خواهد دا شت. چنان که یک میزان احتمال از قبل تعیین شده کمتر، مثلاً ۹۰٪، را در نظر بگیریم، بی‌شترین میزان شانس موفقیت را دارد. همچنین می‌توانیم از خواننده بپر سیم آیا آمادگی خواهد دا شت د ست خود را در کی‌سه‌ای که حاوی ۹۰ مارماهی و ۱۰ مار زنگی سمی ا ست، ببرد. چون این احتمالی ا ست که با آن سروکار داریم. اگر شرط دقت خود را

[1] .estimation theory
[2] . test theory

۹۹٪ بگیریم، آنگاه برای این که فا صله ۵۶-۴۸ را به یک فا صله م ساعدتر ۵۴- ۵۰ ارتقاء دهیم، باید نمونه را از ۲۰۰۰ به ۵۰۰۰ نفر برسانیم که هزینه‌اش بیش از دو برابر است.

بنابراین مسأله برآورد آماری، تلاش برای تعمیم آماره نمونه (یک میانگین نمونه‌ای یا نسبت نمونه‌ای) به کل جمعیت است. آمیزه‌ای از تردیدها در این جا درگیر است. اندازه فاصله اطمینان i، احتمال از قبل تعیین شده P $(= 1-\alpha)$ و اندازه نمونه n، سه مشکل عمده هستند.

در بالا یک فاصله اطمینان، به عنوان حاشیه عدم قطعیت پیرامون نسبت آراء میتران (۵۲٪) در نظر گرفته شده، امّا می‌توان آن را برای هر تعدادی از نمونه‌ی مورد نظر، محاسبه کرد: یک میانگین (برای یک متغیر اندازه‌گیری شده در سطح سنجش فاصله‌ای)، یک ضریب همبستگی (برای دو متغیر فاصله‌ای)، یک ضریب اتا[1] (برای دو متغیر، یکی فاصله‌ای و یکی اسمی) و غیره.

نظریه برآورد آماری همچنین ارتباط نزدیکی با نظریه آزمون آماری دارد. آزمون آماری یک فرضیه، به عنوان یک برآورد آماری نیز می‌تواند در نظر گرفته شود و حتی می‌توان ثابت کرد که دومی از اوّلی اطلاعات بیشتری را به دست می‌دهد. ما ابتدا به مرور کوتاهی درباره آزمون آماری می‌پردازیم.

آزمون آماری باید با آزمودن یک فرضیه انجام شود. چنین فرضیه‌ای می‌تواند شامل یک متغیر باشد، مثلاً این فرض که میتران بیش از نیمی از آراء را در فرانسه به دست خواهد آورد ($H{:}\pi > ۰/۵۰$ متغیر رفتار رأی‌دهی). امّا معمولا چنین فرضیه‌ای بیش از یک متغیر را در بر می‌گیرد، مثلاً این فرض که افراد کم‌درآمد، بیشتر احتمال دارد به میتران رأی دهند، تا افرادی که از درآمد بالاتری برخوردارند (متغیرهای رفتار رأی‌دهی و درآمد). در این کتاب فرضیاتی که شامل بیش از دو متغیر بودند مورد بررسی قرار گرفتند، اما فرضیات دو متغیری، عموماً نقطه آغازین به حساب می‌آیند و به منظور توضیح تعدادی از مفاهیم، خطای نوع I و نوع II، ما حتی مجبوریم به فرضیات یک متغیره برگردیم. اجازه دهید ابتدا این کار را انجام دهیم.

دوباره این فرض یک متغیری و روشن را در نظر بگیرید که میتران بیش از نیمی از آراء را در فرانسه کسب خواهد کرد ($H : \pi > ۰/۵۰$). آزمودن چنین فرضیه‌ای یک جزء از یک *برهان خلف*[2] است. ما با این پیش‌فرض شروع می‌کنیم که در خطا هستیم؛ به عبارت دیگر، میتران تنها می‌تواند از حمایت ۵۰٪ از جمعیت رأی دهندگان برخوردار باشد. این را فرض صفر می‌نامیم ($H_0{:}\ \pi > ۰/۵۰$). ما با آغاز کردن با این پیش فرض، استدلال را فراتر برده، در این کار از دانش خود درباره نمونه‌گیری تصادفی و توزیع احتمالات استفاده می‌کنیم.

چنان‌چه در رابطه با فرض H_o به عنوان یک نقطه حرکت، تعداد زیادی از نمونه‌های n=۲۰۰۰ نفری را از جمعیت فرانسه بگیریم و بخشی که به میتران رأی می‌دهند را تعیین کنیم، در این صورت یک توزیع نمونه‌گیری از نسبت‌ها به‌دست می‌آید که شکل توزیع احتمالات دو جمله‌ای را خواهد داشت. با در نظر گرفتن این واقعیت که n، بزرگ و $\pi = ۰/۵۰$است، درمی‌یابیم که چنین توزیع

1-Eta-Coefficient
2-*reductio ad absurdum*

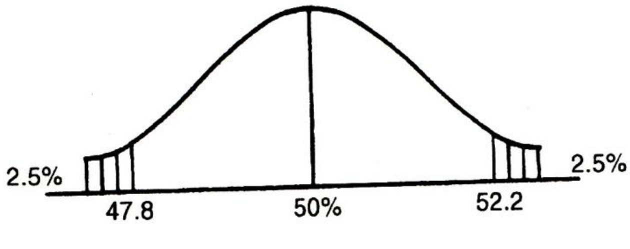
دوجمله‌ای متمایل به توزیع نرمال با میانگین $\mu = \pi$ و خطای معیار $\sigma_p = [\pi(1-\pi)/n]^{1/2}$، خواهد بود، بنابراین $\mu =$ ۰/۵۰ و $\sigma_p =$ ۰/۰۱۱۲ است. برای نسبت‌ها، به جای درصدها، اندازه ۱۰۰ برابر می‌شود و خواهیم داشت: $\mu =$ ٪۵۰ و $\sigma_p =$ ٪۱/۱۲.

از روی ویژگی‌های توزیع نرمال می‌توانیم استنباط کنیم که ٪۹۵ سطح زیر منحنی، یعنی ٪۹۵ نمونه‌ها بین ۱/۹۶σ_p در سمت راست میانگین μ و ۱/۹۶σ_p در چپ آن واقع شده‌اند. در نتیجه ٪۹۵ نمونه‌ها باید یک بخش بین ۴۷/۸ و ۵۲/۲ را در بر گیرد.

به منظور تحقق 'برهان خلف' بایستی ٪۱۰۰ نمونه‌ها را مورد مشاهده قرار دهیم، اما اجازه دهید به ٪۵ خطا رضایت دهیم. این خطا را **خطای نوع I** می‌نامند. دلیل این کار به شرح زیر است:

با درست دانستن فرض صفر و این که نمونه ما درصدی از رأی دهندگان به میتران، مثلاً ٪۶۰ را به دست می‌دهد در این صورت، این نتیجه همراه با نتایجی حتی در حدود انتهایی‌تر، تحت فرض صفر شانس چنان ناچیزی خواهد داشت که با احتمال خطای ٪۵ ناگزیر از رد فرض صفر خواهیم بود. ولی اگر ٪۵۱ را در نمونه پیدا کنیم، آنگاه این نتیجه همراه با نتایج حدود انتهایی‌تر، شانس نسبتاً خوبی تحت فرض صفر خواهد داشت، طوری که نمی‌توان آن را رد کرد.

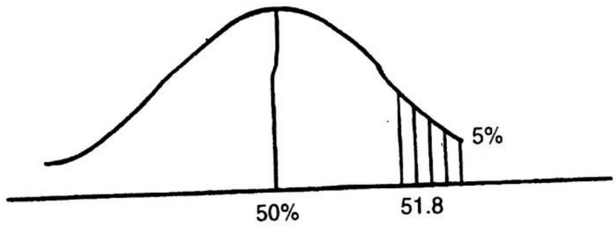
ما در مثال خود میزان ٪۵۲ را یافتیم، به گونه‌ای‌که با یک احتمالِ خطای از قبل تعیین شده نوع I که به میزان ٪۵ در نظر گرفته‌ایم، خیلی نزدیک به رد فرض صفر هستیم؛ زیرا ٪۹۵ از نمونه بخشی را حد فاصل ۴۷/۸ و ۵۲/۲ در بر می‌گیرند و رقم ۵۲ دقیقاً در این فاصله واقع می‌شود (نگاه کنید به شکل الف- ۲). بنابراین شانس یافتن نتیجه ۵۲ یا یک نتیجه انتهایی‌تر تحت فرض صفر کمی بیش از ٪۵ است و به اندازه‌ای است که نمی‌توان فرض صفر را رد کرد.



شکل الف- ۲

اگر ما کاملاً یقین کنیم که میتران کمتر از نیمی از آراء را به دست نخواهد آورد و تنها بخواهیم سمت راست ٪۵۰ را بیازماییم، در این صورت یک آزمون یک‌دامنه را اجرا می‌کنیم. در این حالت ٪۵ احتمال خطای نوع I، روی دو حد توزیع نمونه‌گیری توزیع نخواهد شـــد، بلکه می‌تواند به طور کامل در جا نب راســـت توزیع تعیین گردد، یعنی در ۱/۶۵σ_p به ســـمت راســـت م یانگین μ، ۵۱/۸=(۱/۱۲)(۱/۶۵)+۵۰. در حالتی که ما به هر دلیل، کاملاً اطمنیان داریم که میتران نمی‌تواند

بازنده با شد و ما فقط مطمئن نی ستیم که آیا موفقیت معناداری خواهد دا شت یا این که یک شانس ا ست، آنگاه *می‌توانیم* فرض صفر مربوط به انحرافات صرفاً ت صادفی از ٪۵۰ را رد کنیم. برای پی‌آمد نمونه‌ای ما از ٪۵۲، همراه با پی‌آمدهای بالاتر، اندکی کمتر از ٪۵ شـــانس تحت فرض صـــفر وجود خواهد داشت (شکل الف -۳).



شکل الف -۳

حال اجازه دهید از این مرور کوتاه یک فرض «خاص» که در آن مفهوم «خطای نوع I از قبل تعیین شده» توضیح داده شد، به این معنی که فرض صفر به اشتباه رد شود فراتر برویم.

به منظور توضیح «خطای نوع II» باید مسأله را باز هم محدودتر سازیم تا به لحاظ آموزشی آسان‌تر باشد.

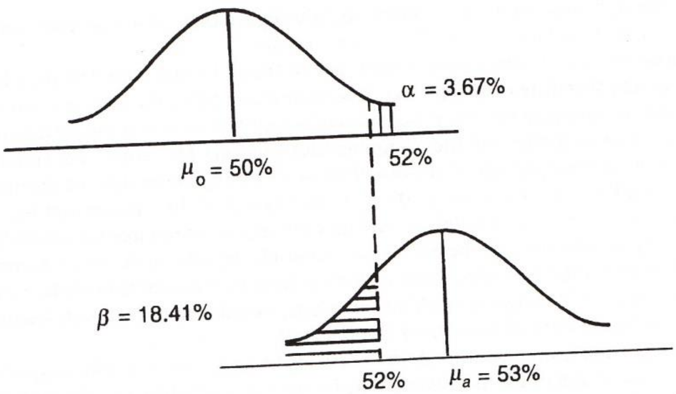
فرض یک‌متغیری مبنی بر این که میتران بیش از نیمی از آراء را خواهد برد ($H:\pi$ ⟨ ٪۵۰)، که فرض صفر $H_0:\pi =$ ٪۵۰ است، زمینه بسیاری حالات دیگر، از جمله مقادیر بیش از ٪۵۰ تا ٪۱۰۰ را باز می‌گذارد. در این میان، یک مورد را به عنوان مثال انتخاب می‌کنیم: $H_a:\pi =$ ٪۵۳. این فرض خیلی ویژه حدود انتهایی H_a، باید اکنون با فرض صفر H_0 که یک حالت ویژه است رقابت کند. با فرض درست بودن H_0 تعداد زیادی از نمونه با حجم n=۲۰۰۰ را مشاهده کردیم که روی هم توزیع نمونه‌گیری «بهنجار» را با $\mu_0 = 50\%$ و $\sigma_P = [(50)(50)/2000]^{1/2} = 1/12$ تشکیل می‌داد. اکنون همین کار را می‌توانیم برای H_0 با $\mu_a = 53\%$ و $\sigma_P = [(53)(47)/2000]^{1/2} = 1/12$ انجام دهیم.

در بحث بالا پیرامون خطای نوع I، پی‌آمد نمونه ٪۵۲ تحت شرایط توزیع H_0 قرار داشت. یک آزمون یک‌دامنه با میزان خطای نوع I *از قبل تعیین شده*، نشان داد که مقدار معناداری ٪۵۲ با ٪۵۰ متفاوت است، چنانکه احتمال یافتن این مقدار یا حتی مقادیر بالاتر از آن، کمتر از ٪۵ است. این احتمال با استفاده از جداول سطح زیر منحنی نرمال محاسبه می‌شود. در ٪۵۲، نمره z مربوط ۱/۷۹=۱/۱۲/(۵۰-۵۲) است و سطح زیر منحنی ٪۳/۶۷ می‌باشد. اکنون به همین صورت فرض مخالف را بررسی می‌کنیم. حالا پی‌آمد نمونه ٪۵۲ تحت فرض H_a قرار دارد. اینک احتمال یافتن ٪۵۲ یا مقادیر کمتر از آن محاسبه می‌شود. در احتمال ٪۵۲، نمره z مربوطه۰/۹۰-=۱/۱۲(۵۳-۵۲) است و سطح زیر منحنی معادل ٪۱۸/۴۱ است. حالت اخیر، احتمال **خطای نوع II** است. این میزان احتمالی

است که فرض صفر به خطا پذیرفته شود در حالی که فرض مخالف درست است؛ یعنی، احتمال خطا در پذیرفتن فرض صفر (پذیرش فرض صفری که نادرست است). این موضوع در شکل الف-۴ نشان داده شده است.

احتمال خطای نوع I در اینجا با نماد α و احتمال خطای نوع II با نماد β نشان داده می‌شود. دو توزیع تحت H_0 و H_a زیر هم قرار داده شده‌اند، چون تجربه نشان داده که دانشجویان همیشه نمی‌توانند آن‌ها را از یکدیگر تشخیص دهند. توجه داشته باشید که در این حالت α خطای مرسوم از قبل تعیین شده نوع I ‎٪۵ نیست، بلکه سطح واقعاً تحقق یافته ‎٪۳/۶۷ در جهت راست نتیجه نمونه تحت H_0 می‌باشد. این را می‌توان درست نمایی[1] هم نامید.

با درآمیختن توزیع‌های H_0 و H_a منحنی‌ها به صورت شکل الف- ۵ در می‌آیند. احتمال β خطای نوع II برای هر یک از فرضیات مخالف هم البته قابل مقایسه است. چنان که برای $H_a: \pi =$ ‎٪۵۴، برای $H_a: \pi =$ ‎٪۵۵ است و الی آخر. همه‌ی این احتمالات برای خطای نوع II را می‌توان در یک توزیع β گردآورد. البته رسم نیست که توزیع β تشکیل شود، بلکه معمولاً توزیع (β-۱) تشکیل داده می‌شود. احتمال β-۱ احتمال رد کردن به جا و درست فرض صفر است (یعنی دچار خطای پذیرفتن آن نشدن). این احتمال تشخیص است، همچنین به عنوان توان (آزمون) شناخته می‌شود، زیرا توانی که با آن فرض مخالف می‌تواند با فرض صفر رقابت کند را نشان می‌دهد. هر چه فرض مخالف از فرض صفر بیشتر باشد توان بیشتر است. همچنین هر چه نمونه بزرگتر باشد توان



شکل الف -۴

بیشتر است.اگر کسی بخواهد خطای نوع II کم باشد، نمونه مورد مطالعه را باید به اندازه کافی بزرگ بگیرد. همچنین توان آزمون یک دامنه بزرگتر از آزمون دو دامنه است، منظور این است که آزمون را

1-Likelibood of exceeding

باید در جهت صحیح اعمال کرد. علاوه بر این هر چه α بزرگتر باشد، توان آزمون بیشتر است. به عبارت دیگر بین خطای نوع I و نوع II یک داد و ستد برقرار است. اگر α بزرگتر باشد β کوچکتر می‌شود و برعکس. این وضعیت با یک محاکمه قانونی قابل مقایسه است. چهار احتمال وجود دارد: متهم کردن کسی که بی‌گناه باشد α است، بی‌گناه تلقی کردن او وقتی‌که خطاکار است β می‌شود. تبرئه شدن وقتی‌که بی‌گناه است $1-\alpha$ می‌شود، و گناهکار شدن او وقتی‌که گناهکار است $1-\beta$ است. این مطلب در شکل الف-۶ خلاصه شده است.

شرایط واقعی

		H_0 درست است	H_0 نادرست است
تصمیم	قبول فرض H_0	$1-\alpha$	β
	رد فرض H_0	α	$1-\beta$

شکل الف-۶ چهار نوع احتمال

الف-۶-۲ بسط نظریه نمونه‌گیری

در قسمت فوق کار خود را به آزمون آماری یک فرضیه‌ی یک متغیری در رابطه با یک نسبت (نسبت رأی‌دهندگان به میتران) محدود کردیم. چنین نسبتی از یک متغیر دو بخشی به دست می‌آید (آراء یک نفر با نفر مقابل). توزیع نمونه‌گیری نسبت‌ها، یک توزیع احتمالات دو جمله‌ای است که اگر حجم نمونه n بزرگ باشد و یا اگر π در حول و حوش ۵۰٪ باشد، به سمت توزیع نرمال (بهنجار) میل می‌کند در مثال ما هر دو شرایط برقرار بود.

در صورتی‌که متغیر در سطح فاصله‌ای اندازه‌گیری شده باشد، مثل سن، نسبت محاسبه نمی‌شود، بلکه میانگین محاسبه می‌شود. مثالی از آزمون یک میانگین بعداً در توضیح پیرامون توزیع نرمال ارائه خواهد شد. توزیع نمونه‌گیری در این جا یک توزیع میانگین‌ها است. اگر توزیع جمعیت نرمال باشد و یا این‌که اندازه نمونه بزرگ باشد، توزیع نمونه‌گیری نرمال است. وقتی‌که تعداد کم است یک آزمون نرمال بودن کار خردمندانه‌ای است، چیزی‌که متأسفانه اغلب اوقات عملاً نادیده گرفته می‌شود.

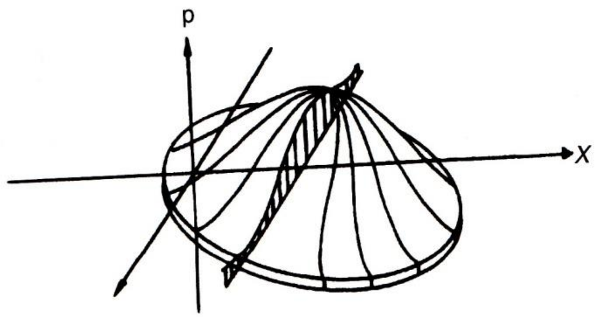
ما در این کتاب کار خود را به متغیرهای اندازه‌گیری شده در سطح سنجش فاصله‌ای و متغیرهای دوبخشی محدود می‌کنیم. حالت دوبخشی را به عنوان متغیر دامی با کدهای ۱ - ۰ می‌شناسیم. متغیرهای چند بخشی را می‌توان به یک مجموعه متغیرهای دامی تبدیل کرد (به تعداد یکی کمتر از تعداد مقوله‌ها). در نظریه نمونه‌گیری تصادفی کلاسیک به متغیرهای ترتیبی توجه کمی شده است. اگر بخواهیم این موضوع را به طور جداگانه مورد بحث قرار دهیم، خیلی از هدف اصلی خود دور

می‌شویم. اما در خلال توضیح نحوه تبدیل متغیرهای چند بخشی به دامی به اندازه‌ی کافی درباره‌ی آن‌ها بحث خواهیم کرد.

بسط دیگر نظریه نمونه‌گیری تصادفی، مرحله گذر از فرضیه‌های یک متغیره به دو و چند متغیره است. اگر بخواهیم به طور دقیق این کار را انجام دهیم، درگیر شبکه‌ای از فرمول‌ها خواهیم شد؛ طوری‌که حتی یک فرضیه دو متغیره راجع به همبستگی آماری بین متغیرهای X و Y مستلزم سه توزیع نمونه‌گیری خواهد بود؛ یکی برای X، یکی برای Y و یکی برای ترکیب X و Y. مورد آخر که گویای کفایت اندازه نمونه است، به توزیع نرمال دو متغیره معروف است و بایستی در فضای سه بعدی قرار گیرد، چنانکه در شکل الف-۷ نشان داده شده است. این در همه ابعاد به طور نرمال توزیع شده است. البته توزیع نرمال چند متغیره را دیگر نمی‌توان بطور تجسّمی نشان داد، چون مستلزم فضای چند بعدی است.

فاصله اطمینان در برآورد آماری، اینک یک بیضی اطمینان کلی در کف یک کوه توزیع‌های نرمال است. یکی از فواصل متعدد اطمینان (برای متغیر Y) در این تصویر برای یک مقدار X ترسم شده است.

ما به هرحال جهت برآورد و آزمون آماری به‌ندرت ناگزیر از به کارگیری این توزیع نرمال دو متغیره با تمام پیچیدگی‌هایش هستیم، زیرا یک توزیع نمونه‌گیری دو متغیری- البته تحت فرض توزیع نرمال دو متغیری- برای بیشتر اندازه‌های همبستگی تشکیل می‌شود که نشان‌دهنده قدرت رابطه بین X و Y است. آنگاه مثلاً از یک توزیع نمونه‌ای ضرایب همبستگی صحبت می‌کنیم که در آن ضریب همبستگی نمونه r به منظور آزمون فرض صفر $H_0 : \rho = ۰$ در نظر گرفته می‌شود. جزئیات چنین آزمونی را در هر کتاب آماری می‌توان پیدا کرد. جهت آزمون مقیاس‌های همبستگی به تاک[1] (۱۹۷۷) مراجعه کنید.



شکل الف- ۷

1. Tacq

الف-۷-۲ آزمون t تفاوت میانگین‌ها

یک نمونه از آزمون دو متغیره که ا ساس اغلب تحلیل‌های چند متغیره کلا سیک را ت شکیل می‌دهد، آزمون t تفاوت بین میانگین‌ها است. آزمون F فیشر، آزمون T هاتلینگ از تحلیل افتراقی دو گروهی و آزمون Λ ویلکز از تحلیل واریانس چندگانه و تحلیل افتراقی، نمونه‌هایی از بســـط آزمون t هســـتند. بنابراین ب سیار مهم ا ست که خواننده ن سبت به آزمون t ت سلط کافی دا شته با شد. به این دلیل در فصل۴، این آزمون به تفضیل مورد بحث قرار گرفت.

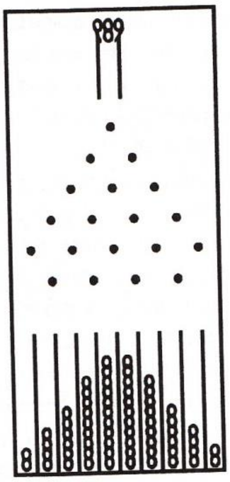
الف-۸-۲ توزیع‌های نمونه به عنوان توزیع‌های احتمالات

در بالا گفته شد که توزیع نمونه‌گیری، یک توزیع احتمالات است که به نوبه خود، یا یک توزیع نرمال، یک توزیع دوجمله‌ای یا یک توزیع t است. از این رو مطالعه توزیع‌های احتمالات موجود برای به کار گرفتن آزمون‌های آماری لازم است. به این دلیل توصیه می‌شود که خواننده اطلاعات خود به ویژه در زمینه توزیع‌های دو جمله‌ای، نرمال، t، $x^۲$ و F را تکمیل کند. بدون این‌که زیاد وارد جزئیات شویم اجازه دهید به طور خلاصه بعضی خواص اساسی مهمترین توزیع‌های احتمالات را مرور کنیم.

توزیع دو جمله‌ای همان طور که از اسم آن بر می‌آید، اشاره به یک خصیصه اسمی با دو مقوله دارد. یعنی یک متغیر دو وجهی مثل جنسیت با مقوله‌های مرد و زن. در چنین حالت دو وجهی، یک نسبت، مثلاً نسبت زنان را می‌توان محاسبه کرد. از یک جمعیت میلیونی افراد، می‌توان یک نمونه n=۲۰۰۰ بیرون کشید و در آن، جمعیتی معین، مثلاً ٪۴۵ را در نظر گرفت. البته فقط یک نمونه می‌توان انتخاب کرد که شامل ٪۴۵ زنان است. نمونه n=۲۰۰۰ نفری دیگر می‌تواند شامل یک نسبت ٪۵۳ باشد و نمونه دیگر ٪۴۹ باشد. حد نهایی این است که نمونه‌ای بگیریم که تنها زنان را شامل شود، معنای آن نسبت ٪۱۰۰ است، اما احتمال چنین نمونه‌ای مسلماً بی‌نهایت کم است. اگر کسی بخواهد تعداد بسیار زیادی نمونه بگیرد و برای هر نمونه نسبت زنان مد نظر باشد، در این صورت توزیع نمونه‌گیری جنبه فرضی دارد. این توزیع را حتی با کامپیوترهای امروزی هم نمی‌توان تلفیق کرد. ولی به صورت نظری می‌توان به آن دست یافت، البته براساس شرایطی که نسبت زنان (π) در جمعیتی از میلیون‌ها نفر فرض می‌شود. چنین پیش‌فرضی در رابطه با شهری مثل نیویورک خواهد بود که می‌دانیم در آن جمعیت کثیری از زنان ٪۵۵= π وجود دارد. حالا با یک فرض *از قبل تعیین شده* درباره π و یک حجم نمونه از قبل تعیین شده n، توزیع نمونه‌گیری نسبت‌ها به شکل یک توزیع دو جمله‌ای در می‌آید که تعداد نسبت‌های زنان روی محور X و احتمالات روی محور Y است، یعنی نسبت‌هایی از نمونه‌هایی که نسبت زنان در هر یک اتفاق می‌افتد. چنین توزیع دوجمله‌ای، یک توزیع احتمالی است که در آن احتمالات به صورت $(\frac{n}{r})\pi^r(۱-\pi)^{n-r}$ محاسبه می‌شود که r معرف تعداد زنان در نمونه است. اگر π بی‌نهایت کوچک یا بزرگ باشد و یا اگر اندازه نمونه n کوچک باشد، توزیع

خیلی چوله خواهد بود. این توزیع در حالتی‌که π نزدیک به ۵٪ و یا اندازه نمونه n بزرگ باشد، به توزیع نرمال نزدیک خواهد شد.

حالت اخیر یعنی میل کردن توزیع دوجمله‌ای به شکل نرمال، به وسیله تابلوی گالتون به خوبی ترسیم شده است (شکل الف-۸). در بالا قیفی وجود دارد که توپ‌ها داخل آن می‌افتند. در وسط، میله‌های فلزی را مشاهده می‌کنیم که به فاصله مساوی از یکدیگر قرار گرفته‌اند. در کف، حفره‌ها یا مخازنی وجود دارد. هر بار که یک توپ به یک میله برخورد می‌کند احتمال رفتن به سمت راست درست به اندازه احتمال رفتن به سمت چپ است (۵۰٪). برای این که توپی داخل حفره انتهایی سمت چپ بیافتد، بایستی هر بار که به یک میله برخورد می‌کند به سمت چپ برود. مسلماً احتمال این که چنین اتفاقی بیافتد کم است. در مورد منتهی‌الیه سمت راست هم همینطور است. احتمال سقوط توپ‌ها در حفره میانی خیلی زیاد است، چون یک توپ ابتدا ممکن است به راست و سپس به چپ بیافتد و نظیر آن. نتیجه با تعداد زیادی توپ، منحنی توزیع نرمال گوس است که در شکل الف- ۸ نشان داده شده است.



شکل الف- ۸ تابلو گالتون

با جایگزینی توپ، با یک نمونه، عوض کردن تعداد یا نسبت توپ‌ها با تعداد یا نسبت نمونه‌ها، و اینکه احتمال افتادن نیمی به چپ با احتمال از قبل تعیین شده‌ی ۵۰٪ =π یک زن بودن جایگزین کنیم و توزیع نمونه‌گیری نسبت زن‌ها را در اختیار داشته باشیم، که یک توزیع دوجمله‌ای است و در این حالت منطبق با توزیع نرمال می‌باشد، چون ۵۰٪ =π و n بزرگ است.

توزیع نرمال یک توزیع یک‌نمایی و متقارن است. قله آن در وسط است طوری که *نما، میانه و میانگین حسابی بر هم منطبق هستند.*

از نظر بعضی، نمونه‌های توزیع نرمال، نادر و از نظر بعضی دیگر بی‌شمارند. توزیع بهره هوشی مثالی از این نوع است که اتفاق صرف یا بازی شانس طبیعی، توزیع نرمال را به ارمغان می‌آورد. بسیاری مردم دارای IQ حدود ۱۰۰ می‌باشند. یک IQ معادل ۸۰ یا ۱۲۰ از فراوانی کمتری برخودار است. و IQهای ۶۰ و ۱۴۰ نادرند. اگر مثلاً انحراف معیار، معادل ۱۰ باشد آنگاه در یک توزیع نرمال ۶۸٪ جمعیت بین IQ ۹۰ و ۱۱۰ قرار می‌گیرند، به عبارت دیگر بین یک انحراف معیار به چپ و راست میانگین واقع می‌شوند. و ۹۵/۵٪ جمعیت در حد فاصل ضریب هوشی ۸۰ و ۱۲۰، یعنی دو انحراف معیار به چپ و راست میانگین قرار می‌گیرند. مطالعه دقیق توزیع نرمال مستلزم آگاهی از فرمول آن است (که در آن exp[y] معادل e^y است):

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}]$$

برای اهدافی که ما داریم تنها باید توجه داشت که این فرمول شامل سه عنصر است: اعداد ۲، π و e ثابت‌های فرمول هستند، حروف یونانی μ و σ پارامترها و X یک متغیر است. یک مقدار ثابت مقداری است که تغییر نمی‌کند، مثل ۳/۱۴= π ، و یک متغیر آزادانه تغییر می‌کند، مثلاً ضریب هوشی X برای هر یک از افراد جمعیت فرق می‌کند. از سوی دیگر یک پارامتر می‌تواند هر دو حالت را داشته باشد: برای یک توزیع معین، مقدار آن ثابت است، امّا در توزیع‌های مختلف متفاوت است. این مطلب را باید قدری توضیح دهیم. توزیع احتمالات مربوط به IQ را با میانگین ۱۰۰= π و انحراف معیار ۱۰ $=\sigma$ در نظر بگیرید. فرض کنید اندازه‌ی قد همین جمعیت نیز به شکل توزیع نرمال $=\mu$ ۱۷۰ و ۱۲ $=\sigma$ سانتی‌متر باشد. در این صورت پارامترهای μ و σ برای یک توزیع معین، ثابت هستند، اما در توزیع‌های مختلف فرق می‌کنند. به همین دلیل است که نمرات معمولاً استاندارد شده هستند. برای هر شخص نمره IQ، $X_۱$ تبدیل به ۱۰/(۱۰۰-$X_۱$) و اندازه قد $X_۲$ تبدیل به /(۱۷۰-$X_۲$) ۱۲می‌شود. آنگاه این دو توزیع نرمال قابل تطبیق دادن هستند، زیرا هر دوی آن‌ها به توزیع نرمال «استاندارد» با میانگین $\mu = 0$ و انحراف معیار $\sigma = 1$ تبدیل شده‌اند: سطح زیر منحنی توزیع نرمال استاندارد در ضمیمه کتاب‌های آماری درج شده است، چنان‌که برای هر توزیع نرمال پس از تبدیل ارزش‌های X به نمرات z می‌توان از این جدول استفاده سودمندی به عمل آورد.

کاربرد توزیع نرمال به خصوص در برآورد کردن آزمون فرضیات برای متغیرهایی که حداقل در سطح سنجش فاصله‌ای باشند، حائز اهمیت است. این کار مخصوصاً زمانی که توزیع نمونه‌گیری به شکل نرمال باشد، بسیار سودمند است. این در حالتی است که شرط توزیع نرمال برقرار است، امّا برای جمعیت‌هایی هم که دارای توزیع ناهموار هستند در شرایطی که اندازه نمونه n بزرگ باشد صادق است. یک مثال برجسته در این زمینه، آزمون یک فرض به عنوان میانگین درآمد از روی میانگین‌های یک نمونه تصادفی است (یعنی۲۰۰۰ $H_0 : \mu =$ در مقابل۲۰۰۰ $(H_a : \mu \rangle$. می‌دانیم که توزیع درآمدها در جامعه بسیار نابرابر است، چنان که بسیاری دارای درآمد خیلی کم هستند، در حالی که

عده کمی درآمدهای هنگفتی دارند. امّا اگر نمونه به اندازه کافی بزرگ باشد، n=۵۳۰ توزیع نمونه‌گیری میانگین درآمدها هنوز هم به شکل نرمال خواهد بود. در چنین توزیع نمونه‌گیری، میانگین درآمدها روی محور X و میزان احتمالات روی محور Y قرار دارد، یعنی نسبت‌های نمونه‌هایی که در هر یک از میانگین‌های درآمد واقع می‌شوند. میانگین این توزیع نمونه‌گیری میانگین‌ها که ارزش مورد انتظار $E(X)$ هم نامیده می‌شود، با میانگین جمعیت برابر است که در فرض صفر منظور شده است. انحراف معیار این توزیع نمونه‌گیری که به خطای معیار نیز معروف است، برابر با $\sigma / \sqrt{n}$ بوده و به صورت $S / \sqrt{n-۱}$ برآورد می‌شود یا به یک نسبت کوچک شده و به صورت $S / \sqrt{n}$ در می‌آید، چون $S^۲ = S^۲ [n/(n-۱)]$. چنان‌که در نمونه ما به میانگین درآمد ۲۲۰۰ با انحراف معیار S معادل ۹۲۰ دست‌یابیم، در این صورت این میانگین را در توزیع نمونه‌گیری میانگین‌ها به شکل یک نمره z وارد می‌کنیم:

$$Z = (2200 - 2000) / (920 / \sqrt{529}) = 5$$

در جدول سطح زیر منحنی توزیع نرمال استاندارد، می‌توان میزان احتمال این که تحت فرض صفر ۲۰۰۰ = μ چنین حد نهایی یا بیشتر از آن $[P(Z \geq ۵H.)]$ پیدا شود را مشاهده کرد. میزان این احتمال تنها ۰/۰۰۰۰۰۰۳ است و بنابراین آن‌قدر کوچک است که می‌توان H_0 را به نفع H_a رد کرد. همان طور که مشاهده می‌شود این واقعیت که توزیع نمونه‌گیری در نمونه‌های بزرگ به سمت توزیع نرمال میل می‌کند، جای خوشحالی است. در نمونه‌های کوچک توزیع نمونه‌گیری میانگین‌ها از توزیع نرمال پیروی نمی‌کند بلکه تابع توزیع t می‌باشد.

توزیع t استودنت در آغاز قرن بیستم توسط ویلیام گوست یکی از متخصصان کارخانه آبجوسازی گینس در دوبلین طرح شد، کسی که مقاله‌های آماری را تحت عنوان اسم مستعار استیودنت منتشر کرد. گوست طی مطالعه‌ای در زمینه رابطه بین کیفیت اجزاء آبجو مثل جو و رازک، شرایط تولید و محصول نهایی، نیاز به یک نظریه نمونه کوچک را تشخیص داد. توزیع t او از بسیاری جهات شبیه به توزیع نرمال استاندارد است و به همان اندازه تک‌نمایی و متقارن است. میانگین آن هم معادل ۰ است. امّا یک تفاوت مهم این است که پراکندگی یا خطای معیار آن مثل توزیع نرمال برابر ۱ نبوده و حتی مقدار آن هم ثابت نیست. در نمونه کوچک، این خطای معیار بسته به اندازه نمونه تغییر می‌کند. اگر d_f را درجات آزادی بنامیم (در اغلب موارد $d_f = n$-۱)، آنگاه واریانس توزیع t برای $df \rangle ۲$ معادل (d_f -۲) / d_f خواهد بود. این واریانس بزرگتر از d_f کوچکتر می‌باشد. در این صورت توزیع t در مقایسه با توزیع نرمال در بخش میانی مسطح‌تر و در کرانه‌های توزیع متراکم‌تر است. برای نمونه‌های بزرگ یعنی d_f بزرگ، واریانس (d_f -۲) / d_f به سمت ۱ میل می‌کند که واریانس توزیع نرمال استاندارد است. نتیجه همه این‌ها چنین است که نه تنها یک توزیع استاندارد t وجود دارد، چنان‌که در خانواده

توزیع‌های نرمال است، بلکه توزیع‌های t زیادی بسته به تعداد درجات آزادی هم وجود دارد. فرمول عمومی تا یک میزان ثابت به این شرح است:

$$f(t) = (1 + t^2/df)\exp[-(df+1)/2] \quad \text{با} \quad -\infty \langle t \langle \infty \quad \text{و} \quad df \rangle 0$$

نکته دیگر این که توزیع نمونه‌گیری میانگین‌ها اگر به شکل نرمال باشد، تنها از یک توزیع t پیروی می‌کند. چنان‌که بخواهید آزمون فرض صفر قبلی $H_0 : \mu = ۲۰۰۰$را با توجه به میانگین درآمد جمعیتی با نمونه n=۲۶ اجرا کنید، در این حالت مجبورید از آن صرف نظر کنید، چون σ نامعلوم، n کوچک و جمعیت دارای چولگی زیاد است. امّا تصور کنید جمعیت درآمدها را به هر دلیل بتوان نرمال در نظر گفت، به طور مثال، نمونه آزمون نرمال بودن را تحمل کند، حتی در این حالت هم شما به لحاظ آماری جریمه می‌شوید. به این دلیل که در حالتی‌که تعداد به این میزان کوچک است، توان آزمون یعنی احتمال تأیید H_a در حالت درست بودن آن، طبعتاً خیلی کوچک خواهد بود. آنگاه ما با میانگین ۲۲۰۰ و انحراف معیار ۹۲۰، دارای نمره t معادل $1/09 = (2200-222)/(920/\sqrt{25})$ خواهیم بود. احتمال این که تحت H_0 به چنین نتیجه‌ای با مقدار بزرگتر t دست‌یابیم، حتی با یک آزمون یک دامنه، از ٪۱۰ بسیار بیشتر است، زیرا با یک خطای از قبل تعیین شده ٪۱۰ نوع I، طبق جدول t، به مقدار t بحرانی۱/۳۲نیاز است. بنابراین، با چنین نمونه کوچک n=۲۶ نمی‌توان فرض صفر را رد کرد.

دو توزیع دیگری که ما از آن‌ها استفاده زیادی خواهیم کرد،$x^۲$ و F هستند. برای این توزیع‌ها هم مثل توزیع t، جداول بخش ضمیمه کتاب‌های آماری فقط نشان‌دهنده مقادیر بحرانی برای درجات آزادی مختلف و برای میزان خاصی از خطای نوع I هستند. مقادیر دقیق آن‌را می‌توان در کتاب‌های پیشرفته نظریه توزیع ملاحظه کرد. در این‌جا به طور مختصر کاربردهای$x^۲$ و F را توضیح می‌دهیم.

توزیع $x^۲$ برای زمانی‌که یک مجموعه مقادیر فرضی با یک مجموعه مقادیر واقعی مقایسه شوند مناسب است. یک مثال ساده از این مورد، آزمون فرض صفری است که ادعا می‌کند نمرات یک مجموعه از دانشجویان شکل توزیع نرمال دارد، در مقابل فرض مخالف که می‌گوید توزیع به طور معناداری از حالت نرمال انحراف دارد. اگر نمرات واقعی دانشجویان که ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ گرفته‌اند به ترتیب ۲۶، ۳۵، ۱۸، ۱۵، ۶ باشد (o_i)، در این صورت نمرات مورد انتظار تحت فرض صفر یک توزیع نرمال، به ترتیب ۶، ۲۵، ۳۸، ۲۵، می‌باشد (E_i). کمیت آماری $G = \sum (o_i - E_i)^۲ / E_i]$ مساوی ۱۵/۶۷ است. توزیع نمونه‌گیری این کمیت، توزیع $x^۲$ است که برای درجات آزادی ۴=۱- ۵ (یک درجه کمتر از فراوانی معادله) توزیع شده است. جدول $x^۲$ برای $\alpha = ۰/۰۵$ و d_f=۴ مقدار بحرانی ۹/۴۹ را به دست می‌دهد، مقدار به دست آمده بزرگتر است، بنابراین فرض صفر را با احتمال از قبل تعیین شده ۰/۹۵ می‌توان رد کرد.

مثالی از کاربرد آزمون $x^۲$ در تحلیل چند متغیره، آزمون فرض صفری است که مدعی است ماتریس‌های کوواریانس گروه‌های مختلف در تحلیل افتراقی با یکدیگر برابرند، در حالی‌که فرض مخالف می‌گوید آن‌ها با یکدیگر تفاوت معناداری دارند.

توزیع F زمانی مناسب است که نسبت واریانس‌ها یا کمیت‌های شبه واریانسی مورد بحث باشند. مثال ساده‌ای از این مورد، آزمون این مطلب است که آیا واریانس بین‌گروهی به طور معناداری از واریانس درون‌گروهی بزرگتر است یا نه. در این‌جا عقیده عمومی بر این است که تفاوت‌های بین‌فردی در درون‌گروه‌ها تنها جنبه تصادفی دارد (واریانس خطا)، امّا تفاوت‌های بین میانگین گروه‌ها این شانس را برجسته می‌سازد. نمونه‌ای از این محاسبات در بخش الف-۴-۲ قابل مشاهده است که بخش‌پذیری واریانس، مورد بحث قرار گرفته است. یک سری نمرات ۲ ۲ ۳ ۴ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ با میانگین ۵ و میزان تغییرپذیری ۵۴ در دو گروه دسته‌بندی شده‌اند. گروه ۲ ۲ ۳ ۴ ۴ دارای میانگین ۳ و تغییرپذیری۴ است. تغییرپذیری درون‌گروهی ۱۴=۱۰+۴ است. تغییرپذیری بین‌گروهی با وارسی میانگین‌های گروهی ۳ و ۷ تعریف می‌شود. میانگین آن‌ها ۵ و میزان تغییرپذیری‌شان ۸ است. میزان تغییرپذیری بین‌گروهی کلاً تعیین شده به وسیله گروه، از حاصل‌ضرب تغییرپذیری بین‌گروه‌ها در تعداد افراد گروه به دست می‌آید:۴۰=۵×۸. مشخص می‌شود که ۵۴=۴۰+۴ یا *SSt=SSB+SSW*. تقسیم‌بندی مشابهی برای درجات آزادی کل به مؤلفه بین‌گروهی و درون‌گروهی نیز می‌توان صورت داد. یک درجه آزادی از میانگین یک مجموعه از دست می‌رود. بنابراین برای کل نمره، نه درجه آزادی وجود دارد. برای مؤلفه بین‌گروهی، دو گروه محاسبه کردیم؛ بدین‌ترتیب یک درجه آزادی وجود دارد. برای مؤلفه درون‌گروهی، ۵×۲ را فرد حساب کردیم و هر بار یک درجه آزادی از میانگین گروهی از دست می‌رود، لذا ۸=(۱- ۵)۲ باقی می‌ماند. در این‌جا همچنین مشاهده می‌کنیم که بین‌گروهی + درون‌گروهی=کل، زیرا ۸+۱=۹. اکنون بایستی بخواهیم به جای میزان تغییرپذیری، واریانس‌ها را به کار بگیریم (میانگین مجذورات *MS*، به جای مجموعه مجذورات *SS*)، سپس هر یک از میزان تغییرپذیری بر درجات آزادی مربوطه تقسیم شود: $MSB = ۴۰ \div ۱$ و $MSW = ۱۴ \div ۸$. نسبت واریانس بین‌گروهی *MSB* به درون‌گروهی *MSW* یک کمیت آماری است $F = (۴۰ \div ۱)/(۱۴ \div ۸) = ۲۲/۸۶$ که توزیع نمونه‌گیری برای آن با یک درجه آزادی در صورت و ۸ درجه آزادی در مخرج، به صورت F توزیع شده است (F به خاطر طراح آن سر رونالد فیشر). مقدار F بحرانی برای مقدار α از قبل تعیین شده‌ی ۰/۰۵ با یک درجه آزادی در صورت و هشت درجه آزادی در مخرج معادل ۵/۳۲ است. مقداری که ما به دست آورده‌ایم بزرگتر است. و بنابراین حتی با این تعداد کم می‌توانیم فرض صفر را با احتمال ۹۵٪ رد کنیم! فرض صفر گویای آن است که نسبت *MSB/MSW* برابر ۱ است، به بیان دیگر، یعنی تفاوت‌های بین‌گروهی (*MSB*) از تفاوت‌های تصادفی بین افراد درون‌گروه‌ها (*MSW* = خطای واریانس) بزرگتر نیست.

در تحلیل چندمتغیره، توزیع F به دفعات و به صورت پیچیده‌تر از مثال فوق به کار می‌رود. آزمون تفاوت گروه‌ها در تحلیل واریانس، آزمون معناداری مدل رگرسیون در تحلیل رگرسیون چندگانه و آزمون تفاوت مرکزیت‌ها در تحلیل افتراقی، تنها چند نمونه از کاربردهای فراوان آن هستند. رائو ظاهراً بسیار مسحور و مجذوب توابع F شده و برای اغلب کاربردهای آن در تحلیل چندمتغیره یک قسم F طرح کرده است.

ما یک تذکر دیگر را به لحاظ جنبه‌های زیبایی‌شناسی ریاضی اضافه می‌کنیم. خواننده‌ی دقیق توجه خواهد داشت که در این مثال به جای آزمون F، می‌توانستیم به سادگی آزمون t تفاوت میانگین‌ها را از بخش الف-۷-۲ به کار ببریم. برای این کار می‌بایست تفاوت به دست آمده (۴-) بین میانگین گروه اوّل (۳) و گروه دوم (۷) را در یک توزیع نمونه‌گیری قرار دهیم که خطای معیار برآورده شده آن برابر $(S_w^۲/n_۱+S_w^۲/n_۲)^{۱/۲}$ است که در آن $S_w^۲$ معادل ۱/۷۵=((۱-۵)+(۱-۵))/ (۴+۱۰) و $n_۱ = n_۲ = ۵$ است. مقدار t به دست آمده برای تفاوت میانگین‌ها دو نمونه ما، معادل $t=(40-0)/[1.75\div 5+1.75\div 5]^{1/2}=4.78$ می‌باشد. از جدول t معناداری تفاوت بین میانگین‌های دو گروه معلوم می‌شود. در این‌جا جنبه‌های زیبایی‌شناسی ریاضی در کار است، چون مقدار F از قبل به دست آمده ۲۲/۸۶، برابر با مجذور مقدار t یافت شده ۴/۷۸ است.

از مشاهده جداول F و t می‌توان معلوم کرد که مقادیر بحرانی F برای یک درجه آزادی در صورت کسر (فقط دو گروه!) با مجذور مقادیر بحرانی t نظیر آن برابر است.

الف-۳ جبر ماتریس

در انتهای فصل ۵، در تحلیل رگرسیون و فصل‌های بعد، علائم ماتریسی مورد استفاده قرار گرفتند. در این‌جا ما کار خود را به یک مرور مختصر از مهمترین تعاریف و عملیاتی که خواننده برای خواندن آن فصول باید بداند خلاصه می‌کنیم. برای مطالعه کامل‌تر در این زمینه به کتاب گرین (۱۹۷۶) یا کتاب‌های مربوط به جبر خطی مراجعه کنید.

الف-۱-۳ بردارها

یک بردار ستونی مرتبه $m\times ۱$ یک mتایی مرتب شده از اعداد حقیقی (که اسکالر نامیده می‌شوند به معنای کمیت عددی یا نردبانی شکل) است که در یک ستون جمع شده‌اند:

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_{۱} \\ a_{۲} \\ a_{۳} \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

a_i ها عناصر یا مؤلفه‌های **a** نامیده می‌شوند. بردارهای دو ستونی چنانچه عنصر به عنصر یکسان باشند با هم برابرند. یک بردار با حروف کوچک پر رنگ (سیاه) **a**، **b**، **c** ... نشان داده می‌شود. برای ماتریس‌ها، حروف (سیاه) پر رنگ بزرگ **A**، **B**، **C** ... به کار برده می‌شوند. بردار ستونی **a** دارای m ردیف و یک ستون است. به این خاطر مرتبه آن $m\times۱$ است.

یک بردار ردیفی $۱\times m$ ترانهاده (برگردان) بردار ستونی $m\times۱$ است. ترانهش با یک علامت پریم (′) نشان داده می‌شود و میانگین‌ها در حالت افقی قرار می‌گیرند، طوری که یک ستون به شکل یک ردیف در می‌آید: $\mathbf{a}'=(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m)$. در این‌جا نیز چنان که دو بردار ردیفی عنصر به عنصر یکسان باشند، مساوی خواهند بود.

بردار ردیفی **'a** دارای ۱ ردیف و m ستون است. علت آن که آن را در مرتبه $۱\times m$ می‌دانیم همین است. اگر بردار ردیفی مجدداً ترانهاده شود، بردار ستونی **a** به دست می‌آید: $(\mathbf{a}')'=\mathbf{a}$.

یک **بردار صفر** شامل صفرهاست و با یک صفر سیاه نشان داده می‌شود، بنابراین **o** یک بردار ستونی و $\mathbf{o}'$ یک بردار ردیفی است.

بردار واحد متشکل از یک‌ها است و با یک عدد سیاه نشان داده می‌شود، بنابراین **1** بردار ستونی و **'1** بردار ردیفی است.

برای **جمع** و **تفریق** دو یا چند بردار، عناصر نظیر به نظیر آن‌ها با هم جمع (یا از هم کم) می‌شوند. مثلاً :

$$a=\underset{\boldsymbol{a}'=(2,4,3)}{\begin{bmatrix}2\\4\\3\end{bmatrix}}\quad b=\underset{\boldsymbol{b}'=(1,3,2)}{\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}}\quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\underset{\boldsymbol{a}'-\boldsymbol{b}'=(1,1,1)=1'}{\begin{bmatrix}3\\7\\5\end{bmatrix}}$$

طبعاً بردارهایی که می‌خواهیم از هم کم کنیم یا با هم جمع کنیم، بایستی هم مرتبه باشند. مثلاً جمع کردن $\boldsymbol{C}'=(۵,۲,۱)$ و $\boldsymbol{d}'=(۳,۴)$ ممکن نیست، همچنین کم کردن بردار ردیفی **'b** از بردار ستونی **a** خارج از دستورات است.

عمل جمع (یا تفریق) دارای یک مجموعه **خواص** است:

دارای خاصیت جابه‌جایی است: $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$.

شرکت پذیر است: $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$.

یک خاصیت بردار صفر این است که $\mathbf{a}+\mathbf{o}=\mathbf{o}+\mathbf{a}=\mathbf{a}$.

حاصل‌جمع یک بردار $\mathbf{a}$ و متضاد آن $-\mathbf{a}$ (که در آن تمام عناصر، رقم‌های منفی هستند) برابر با بردار صفر است: $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=(-\mathbf{a})+\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

ضرب یک بردار با یک اسکالر $\mathbf{k}$ حاصل‌ضرب هر یک از عناصر بردار با آن عدد حقیقی است:

$$k\boldsymbol{a}=\boldsymbol{k}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\\vdots\\a_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{a1}\\k_{a2}\\k_{a3}\\\vdots\\k_{am}\end{bmatrix}$$

برای مثال حاصل‌ضرب بردار ردیفی $\boldsymbol{a}'=(۲,۴,۳)$ و عدد حقیقی k=۲ برابر است با $ka'=(4,8,6)$.

ضرب اسکالر دارای **خواصی** است:

شرکت‌پذیر است: $\boldsymbol{k}_1(k_2\boldsymbol{a})=(k_1k_2)\boldsymbol{a}$

در ترکیب با جمع توزیع‌پذیر است: $k(\mathbf{a}+\mathbf{b})=k\mathbf{a}+k\mathbf{b}$ و همچنین $(k_1+k_2)\boldsymbol{a}=k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{a}$.

حاصل‌ضرب آن در ۱، خود بردار می‌شود : 1**a=a**.

حاصل‌ضرب آن در ۰، بردار صفر است: o**a=o**.

حاصل‌ضرب آن در ۱-، بردار متضاد را ایجاد می‌کند: -1**a=-a**.

جمع و ضرب اسکالر در مفهوم **ترکیب خطی**، گرد آمده‌اند، مفهومی که در تحلیل چند متغیره به دفعات با آن سر و کار داریم.

اگر $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\cdots\boldsymbol{a}_m$ ، m بردار باشند و k_1، k_2، k_3، ..... k_m ، m عدد حقیقی باشند، آنگاه بردار $\boldsymbol{y}=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+k_3\boldsymbol{a}_3+\cdots+k_m\boldsymbol{a}_m$ یک ترکیب خطی از m بردار است. بنابراین، بردار **y** یک حاصل‌جمع وزن‌یافته از بردارهاست که اسکالرها وزن‌های آن هستند. توابع تشخیصی مربوط به تحلیل افتراقی، متغیرهای کانونی تحلیل همبستگی کانونی و مؤلفه‌های اصلی در تحلیل مؤلفه‌های اصلی سه نمونه از آن‌ها هستند.

ضرب اسکالر دو **بردار a** و **b** (که گاهی حاصل‌ضرب درونی نامیده می‌شوند)، حاصل‌ضرب بردار متضاد $\mathbf{a}'$ و بردار $\mathbf{b}$ است بدین شرح:

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_mb_m$$

مثلاً:

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'\mathbf{b}=20$$

ضرب دو بردار ستونی **a** و **b** امکان‌پذیر نیست، چون ترتیب آن‌ها $(m\times ۱)$ و $(m\times ۱)$ است و این‌ها هیچ‌گونه تناظری[1] را نشان نمی‌دهند. پس از ترانهادن[2] **a** این تناظر یا تطبیق به وجود می‌آید. به این شرح: $(m\times ۱)$ و $\underbrace{(1\times m)}$. وقتی‌که ضرب ماتریس‌ها را توضیح دهیم این مطلب را بیشتر مورد بحث قرار خواهیم داد. مشاهده می‌کنیم که حاصل‌ضرب اسکالر در بردار یک عدد حقیقی تولید می‌کند.

مجذورات عناصر به دست می‌آید:

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'\mathbf{a}=29$$

حالت خاص دیگر حاصل‌ضرب اسکالر بردار واحد ۱ و بردار **a** است. از این طریق حاصل‌جمع عناصر به دست می‌آید.

$$1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad 1'\mathbf{a}=9$$

الف-۲-۳ ماتریس‌ها

ماتریس A با مرتبه $m\times n$ یک آرایه مستطیلی از اعداد حقیقی در m ردیف و n ستون است:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1-Correspondence 2-Transposing

در حالی‌که بردارها با حروف کوچک سیاه رنگ **a**، **b**،**c**، ... و ماتریس‌ها با حروف بزرگ پر رنگ A، **B**، **C** ... نشان داده می‌شوند، یک بردار، حالت خاصی از یک ماتریس است. بدین ترتیب اگر m=۱ باشد، ماتریس $m\times n$ به یک بردار $1\times m$ ردیفی تبدیل می‌شود و اگر n=۱ باشد، به یک بردار ستونی $m\times 1$ تبدیل می‌گردد.

حتی یک اسکالر در نهایت یک حالت خاص از ماتریس با m=n=۱ است. به عبارت دیگر یک عدد حقیقی یک ماتریس ۱×۱ است.

ماتریسی که تعداد ردیف‌ها (m) و ستون‌هایش (n) برابر نباشد **مستطیلی** است. از سوی دیگر اگر m=n باشد، ماتریس را **مربعی** گویند. برای مثال ماتریس‌های زیر را در نظر بگیرید. ماتریس **A**، 3×3 مربعی و ماتریس**B**، 2×3 مستطیلی است.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ 4 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}7 & 9 & 3\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

قطر اصلی یک ماتریس مربعی مجموعه‌ای از عناصر است که از گوشه بالای چپ تا گوشه پایین راست امتداد یافته‌اند. در ماتریس **A** این عناصر شامل {۱ ۳ ۲} هستند. حاصل‌جمع عناصر روی قطر اصلی یک ماتریس مربعی **A**، **اثر**[1] نامیده می‌شود: $tr(\mathbf{A}) = \sum_i a_i$.

ماتریس قطری یک ماتریس مربعی است که به غیر از عناصر قطری، سایر عناصر آن را صفرها تشکیل می‌دهند. عناصر روی قطر اصلی خودشان می‌توانند صفر یا غیر صفر باشند. برای مثال:

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

ترانهاده ماتریس **A** ماتریس $\mathbf{A}'$ با جابه‌جا کردن ردیف‌ها و ستون‌ها به دست می‌آید. مثلاً:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ 4 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{A}'=\begin{bmatrix}2 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 2\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}7 & 9 & 3\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}'=\begin{bmatrix}7 & 3\\ 9 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

اگر ماتریس ترانهاده را مجدداً ترانهاده کنیم، ماتریس اصلی به دست می‌آید. چنان که $(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$.

1-Trace

ماتریس مربعی که با ترانهاده خود برابر باشد **متقارن** است. یعنی اگر $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$ باشد. منظور این است که تصویر آینه‌وار مثلث‌های گوشه راست بالا و چپ پایین نسبت به قطر اصلی حاوی عناصر یکسانی است، به بیان دیگر $a_{ij} = a_{ji}$. ماتریس $\mathbf{E}$ زیر، نمونه‌ای از ماتریس متقارن و ماتریس $\mathbf{A}$ بالا نامتقارن است.

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۷ & ۴ \\ ۲ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

در تحلیل چندمتغیره، ماتریس‌های متقارن بسیار رایج هستند. یک مثال از این نوع ماتریس همبستگی $\mathbf{R}$ است که شامل ضرایب همبستگی مرتبه صفر خارج از قطر اصلی است، به طوری که $r_{ij} = r_{ji}$.

شرط متقارن بودن یک ماتریس، مربعی بودن آن است. بنابراین یک ماتریس مستطیلی نمی‌تواند متقارن باشد. یک ماتریس قطری همواره متقارن است.

ماتریس صفر از صفرها تشکیل می‌شود و با یک علامت فی پررنگ نشان داده می‌شود: $\boldsymbol{\varphi}$. اگر ماتریس صفر مربعی باشد، هم متقارن و هم قطری است.

دو حالت ویژه دیگر ماتریس قطری عبارتند از ماتریس اسکالر و ماتریس اتحاد.

یک **ماتریس اسکالر**، نوعی ماتریس قطری است با عناصر یکسان روی قطر اصلی آن. به طور مثال:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ماتریس اتحاد[1] همیشه با I نشان داده می‌شود، یک ماتریس مربعی است که قطر آن را ۱ها و باقی عناصر آن را ۰ها تشکیل می‌دهند. لذا این هم نوع خاصی از ماتریس اسکالر است. به طور مثال:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

به طور خلاصه یک ماتریس یا مستطیلی است یا مربعی. ماتریس مربعی می‌تواند متقارن باشد یا نباشد. یک ماتریس متقارن می‌تواند قطری باشد یا نباشد. یک ماتریس قطری می‌تواند اسکالر باشد یا نباشد. یک ماتریس اسکالر می‌تواند اتحاد I باشد یا نباشد.

1-Identity Matrix

الف-۳-۳ عملیات ماتریس‌ها

برای **جمع** (یا تفریق) کردن دو یا چند ماتریس، عناصر متناظر آن را با هم جمع (یا از هم کم) می‌شوند. برای انجام این اعمال طبیعتاً ماتریس‌ها باید هم مرتبه باشند. برای مثال:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&5\\4&3&2\\3&2&1\end{bmatrix}\quad \mathbf{E}=\begin{bmatrix}3&1&2\\1&7&4\\2&4&5\end{bmatrix}\quad \mathbf{A}+\mathbf{E}=\begin{bmatrix}5&2&7\\5&10&6\\5&6&6\end{bmatrix}$$

جمع ماتریس‌ها از همان **خواص** جمع بردارها برخوردار است:

تعویض پذیر است: **A+B=B+A**.

اشتراک پذیر است: **A+(B+C)=(A+B)+C**.

یک خاصیت ماتریس صفر این است که: $\mathbf{A}+\phi=\phi+\mathbf{A}=\mathbf{A}$.

حاصل‌جمع ماتریس **A** و متضاد آن **A-** (که در آن همه عناصر، اعداد منفی هستند) معادل ماتریس صفر است: $\mathbf{A}+(\mathbf{-A})=(\mathbf{-A})+\mathbf{A}=\phi$.

ضرب یک ماتریس در یک اسکالر k نیز مانند ضرب بردارهاست. هر عنصر در عدد حقیقی k ضرب می‌شود. مثلاً:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}7&9&3\\3&-1&1\end{bmatrix}\quad \mathbf{K}=2\quad \mathbf{KB}=\begin{bmatrix}14&18&6\\6&-2&2\end{bmatrix}$$

ضرب اسکالر نیز خواص مشابه بردارها را دارد:

شرکت‌پذیر است: $K_1(K_2\,\mathbf{A})=(K_1K_2)\mathbf{A}$.

در ترکیب با جمع توزیع‌پذیر است: $K(\mathbf{A}+\mathbf{B})=K\mathbf{A}+K\mathbf{B}$ و همچنین

$$(K_1+K_2)\,\mathbf{A}=K_1\mathbf{A}+K_2\mathbf{A}$$

حاصل‌ضرب آن در عدد ۱ خود ماتریس است: ۱**A=A**.

حاصل‌ضرب آن در عدد ۰ ماتریس ۰ است: $\mathbf{0A}=\boldsymbol{\varphi}$.

حاصل‌ضرب آن در عدد ۱- ماتریس متضاد می‌باشد: ۱-**A=-A**.

حاصل‌ضرب آن در یک اسکالر فرصت تعریف یک تفریق را برایمان فراهم می‌کند. مثلاً **A-E** به عنوان یک جمع: **A+(-E)**. در این‌جا ابتدا **E** در اسکالر ۱- ضرب و سپس **E**– با **A** جمع می‌شود:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&5\\4&3&2\\3&2&1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}3&1&2\\1&7&4\\2&4&5\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-1&0&3\\3&-4&-2\\1&-2&-4\end{bmatrix}$$

ضرب کردن در یک اسکالر همچنین وضوح بیشتر مفاهیم ماتریس اسکالر و ماتریس اتحاد را به همراه دارد.

یک ماتریس اسکالر مثل **F**، معادل حاصل‌ضرب ماتریس اتحاد و اسکالر روی قطر اصلی است:

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=3\mathbf{I}$$

تا به حال عمل جمع و ضرب در یک اسکالر با استفاده از بردارها و ماتریس‌ها مورد بحث قرار گرفتند. شباهت آن‌ها با نظریه اعداد قابل ملاحظه بود. این شباهت در مورد **ضرب ماتریس‌ها** دیگر مصداق ندارد.

برای ضرب دو ماتریس **A** و **B** بایستی یک تناظر وجود داشته باشد. به طور مثال اگر **A** یک ماتریس $m\times n$ و **B** یک ماتریس $n\times p$ باشد، در این صورت این تناظر برقرار است، چون **A** دارای n ستون و **B** دارای n ردیف است: $(m\times \underbrace{n)(n}\times p)$. بنابراین حاصل‌ضرب **C=AB** یک ماتریس $m\times p$ با همان تعداد ردیف‌های **A** و همان تعداد ستون‌های **B** است: $(\underbrace{m\times n)(n\times p}$). یک عنصر C_{ij} حاصل‌ضرب **C** به صورت $C_{ij}=\sum_K a_{ik}b_{kJ}$ محاسبه می‌شود، یعنی ضرب کردن عناصر ردیف iام **A** در عناصر متناظر ستون j ام **B** و به دست آوردن این حاصل ضرب‌ها. مثالی از این مورد حاصل‌ضرب ماتریس **B** ، 2×3 و ماتریس **H** ، 3×2 است:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\boxed{7\quad 9\quad 3}\\3\quad -1\quad 1\end{bmatrix}\quad \mathbf{H}=\begin{bmatrix}1&\boxed{\begin{matrix}5\\2\\1\end{matrix}}\\3&\\2&\end{bmatrix}\quad \mathbf{BH}=\begin{bmatrix}40&\boxed{56}\\2&14\end{bmatrix}$$

به صورت نمایشی ردیف اوّل B و ستون دوّم H در مستطیل قرار داده شده اند. حاصل این ضرب عدد ۵۶ است که از ضرب ردیف اوّل و ستون دوّم BH بدین صورت به دست می‌آید: ۵۶=۳+۱۸+۳۵=(۱)(۳)+(۲)(۱)+(۵)(۷). سه عنصر دیگر هم به همین طریق محاسبه می‌شوند.

توجه داشته باشید که حاصل‌ضرب HB مساوی BH نیست. دلیل، آن است که BH یک ماتریس ۲×۲ است در حالی که HB یک ماتریس ۳×۳ است: (۳×۲)(۲×۳).

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}1&5\\\boxed{3\quad 2}\\2&1\end{bmatrix}\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}7&9&\boxed{\begin{matrix}3\\1\end{matrix}}\\3&-1&\end{bmatrix}\quad \mathbf{HB}=\begin{bmatrix}22&4&8\\27&25&\boxed{11}\\17&17&7\end{bmatrix}$$

به صورت نمایشی: حاصل ردیف **دوّم H** و ستون **سوّم B**، عدد ۱۱ در ردیف **دوّم** ستون **سوّم HB** است، بدین صورت : ۱۱=(۱)(۲)+(۳)(۳). برای هشت عنصر دیگر نیز به همین روش است.

اکنون می‌توانیم بفهمیم که چرا یک بردار ستونی نمی‌تواند در بردار ستونی ضرب شود. در این حالت تناظری برقرار نمی‌شود: $(m\times ۱)(m\times ۱)$. این تناظر را در حاصل‌ضرب یک بردار $۱\times m$

ردیفی $\mathbf{a}'$ با یک بردار $m\times ۱$ ستونی $\mathbf{b}$ *می‌یابیم* و حاصل آن یک ماتریس ۱×۱ می‌شود که یک اسکالر است. امّا حاصل‌ضرب یک بردار ستونی $m\times 1$, $\mathbf{b}$ با یک بردار ردیفی $1\times m$, $\mathbf{a}'$ بسیار متفاوت است، نتیجه آن یک ماتریس $m\times m$ است! برای مثال:

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}2\\4\\3\end{bmatrix}\quad \mathbf{a}'=(2,4,3)\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}\quad \mathbf{a}'\mathbf{b}=20\qquad \mathbf{b}\mathbf{a}'=\begin{bmatrix}2&4&3\\6&12&9\\4&8&6\end{bmatrix}$$

مشاهده می‌شود که ضرب ماتریس عموماً **تعویض‌ناپذیر** است: $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$. ولی خواص شرکت‌پذیری برقرار است (**(AB)C=A(BC**)، چنان که در بخش‌پذیری انجام می‌شود: **A(B+C) = AB+AC**. در مورد ترانهش همراه با بسط و انتقال خواص نیز باید دقیق بود. چون گرچه در جمع کردن، ترانهاده حاصل‌جمع با حاصل‌جمع ترانهاده‌ها برابر است: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})'=\mathbf{A}'+\mathbf{B}'$ ، اما در ضرب چنین نیست.

و بالاخره، ترانهاده حاصل‌ضرب برابر است با حاصل‌ضرب ترانهاده‌ها در ترتیب معکوس: $(\mathbf{AB})'=\mathbf{B}'\mathbf{A}'$. برای مثال:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}7&9&3\\3&-1&1\end{bmatrix}\quad \mathbf{H}=\begin{bmatrix}1&5\\3&2\\2&1\end{bmatrix}\quad \mathbf{B}\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}40&56\\2&14\end{bmatrix}\quad (\mathbf{BH})'=\begin{bmatrix}40&2\\56&14\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}'=\begin{bmatrix}7&3\\9&-1\\3&1\end{bmatrix}\quad \mathbf{H}'=\begin{bmatrix}1&3&2\\5&2&1\end{bmatrix}\quad \mathbf{H}'\mathbf{B}'=\begin{bmatrix}40&2\\56&14\end{bmatrix}$$

الف-۴-۳ دترمینان یک ماتریس مجذور (مربع)

دترمینان یک ماتریس در تحلیل چند متغیره نقش مهمی را ایفا می‌کند، مثلاً در محاسبه وارون (معکوس). تنها ماتریس‌های مربع دارای دترمینان هستند.

دترمینان یک ماتریس $m\times m$ ، $\mathbf{A}$ با $\det(\mathbf{A})$ یا $|A|$ نشان داده می‌شود و عددی است که از عناصر ماتریس به شرح زیر محاسبه می‌شود.

ترکیب کردن تمام حاصل‌ضرب‌های ممکن m عنصر، طوری که تنها و تنها یک عنصر از هر ردیف و فقط و فقط یک عنصر از هر ستون به دست آید. تعداد $m!$ (m فاکتوریل) از این عناصر وجود دارد. مثلاً برای یک ماتریس ۳×۳ با عناصر a_{ij}، تعداد ۶=(۳)(۲)(۱)=!۳ حاصل‌ضرب وجود دارد. به اینها یک علامت مثبت یا منفی اختصاص می‌دهیم:

$$a_{۱۱}a_{۲۲}a_{۳۳},\ a_{۱۲}a_{۲۳}a_{۳۱},\ a_{۱۳}a_{۲۱}a_{۳۲},\ -a_{۱۳}a_{۲۲}a_{۳۱},\ a_{۱۱}a_{۲۳}a_{۳۲},\ -a_{۱۲}a_{۲۱}a_{۳۳}.$$

علامت مثبت یا منفی با تعداد وارون‌ســازی تعیین می‌شــود: + برای یک عدد زوج و − برای یک عدد فرد وارون سازی‌ها . وقتی که دو اندیس ستونی در ترتیب عادی خود قرار ندا شته با شند، می‌گوییم وارون‌سازی صورت گرفته است، مشروط به این که اندیس‌های ردیفی همگی در ترتیب طبیعی خود باشــند (i=۳،۲،۱). برای مثال در حاصــل‌ضــرب چهارم $-a_{13}a_{22}a_{31}$ اندیس‌های i به ترتیب طبیعی خود ، ۱،۲، ۳ قرار دارند و اندیس‌های ستونی به صورت ۳، ۲، ۱ ترتیب یافته‌اند. وارون‌ها عبارتند از. ۲⟨۱,۳⟨۱,۳⟨۲ تعداد آن‌ها (۳) فرد و بنابراین حا صل ضرب آن‌ها علامت منفی می‌گیرد. عدد وارون‌ها برای شش حاصل‌ضرب به ترتیب عبارتند از ۰ ، ۲، ۲، ۳، ۱، ۱، . بنابراین علامت آن‌ها به ترتیب +++-- - است. مجموع تمام حاصل‌ضرب‌های $m!$ با علامتشان دترمینان است. برای مثال:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&5\\4&3&2\\3&2&1\end{bmatrix}\quad |\mathbf{A}|=(2)(3)(1)+(1)(2)(3)+(5)(4)(2)-(2)(2)(2)-(1)(4)(1)=-5$$

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}-2&0\\0&-2\end{bmatrix}\quad |\mathbf{G}|=g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}=(-2)(-2)-(0)(0)=4$$

این شیوه برای ماتریس‌های بزرگتر بسیار پیچیده است، امّا روش‌های دیگری برای این کار وجود دارد. اکنون به بحث درباره محاسبه **دترمینان به کمک کهادها[1] و هم‌عامل‌ها[2]** می‌پردازیم.

در یک ماتریس $m\times m$ ، $\mathbf{A}$ هر عنصر a_{ij} دارای یک کهاد است. این دترمینان پاره ماتریسی است که با حذف i اُمین ردیف و j اُمین ستون ماتریس $\mathbf{A}$ به دست می‌آید. برای مثال:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\quad (a_{21})=\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{12}a_{23}-a_{13}a_{32}$$

برای هشت عنصر دیگر $\mathbf{A}$ نیز به همین طریق عمل می‌کنیم.

هم‌عامل یک کهاد با علامت مثبت یا منفی است. این‌ها به صورت زیر نسبت داده می‌شوند. ماتریس را به عنوان یک جور صفحه شطرنج یا تخته‌نرد در نظر بگیرید، به گوشه بالای سمت چپ مربع علامت مثبت داده و علامت را هر بار که در هر جهت حرکت می‌کنید عوض کنید. به این طریق یک آرایش از علائم پدید می‌آید که مبتنی بر یک الگوی متناوبی است:

1-minors 2- Cofactors

$$\begin{bmatrix} + - + - \ldots \\ - + - + \ldots \\ + - + - \ldots \\ - + - + \ldots \\ . \quad . \; . \; . \\ . \; . \; . \quad . \ldots \\ . \; . \; . \; . \end{bmatrix}$$

در قسمت قبلی، کهاد عنصر a_{21} محاسبه شد. هم‌عامل a_{21} همین کهاد است که یک علامت منفی به آن داده شده: $(a_{21}) = -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})$ هم‌عامل.

اکنون می‌توانیم دترمینان را محاسبه کنیم. یک ردیف یا ستون از ماتریس $\mathbf{A}$ را به دلخواه گرفته و هر عنصر آن را در هم عامل ضرب کنید و حاصل‌ضرب‌ها را با هم جمع کنید. حاصل همان دترمینان است.

اگر به طور مثال ردیف دوّم را از ماتریس $\mathbf{A}$ زیر در نظر بگیریم، دترمینان آن می‌شود:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad |\mathbf{A}| = -4\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -4(1-10) + 3(2-15) - 2(4-3) = -5$$

جهت کسب یک عنصر عینی از دترمینان ماتریس به کتاب گرین (۱۹۷۶ ص ۱۱۸ به بعد) مراجعه کنید که در آن دترمینان به زبان مساحت، حجم‌ها و ابر حجم‌های اشکال هندسی تفسیر شده است.

ما دو مفهوم دیگر یعنی ماتریس عادی[1](غیر ویژه) و رتبه‌بندی یک ماتریس را که در تحلیل چند متغیره نقش مهمی دارند مورد بحث قرار خواهیم داد. وقتی‌که دترمینان ماتریسی برابر ٥ باشد آن ماتریس **ویژه**[2] است. برای مثال:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad |\mathbf{J}| = 1\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1(36-36) - 2(18-18) + 3(12-12) = 0$$

مشاهده می‌کنیم که عناصر ردیف دوم $\mathbf{J}$ دو برابر عناصر ردیف اوّل و عناصر ردیف سوم، سه برابر ردیف اوّل هستند. در نظام معادلات خطی که اغلب در تحلیل چند متغیره به کار می‌رود، در این حالت از وابستگی خطی سخن به میان می‌آید. ماتریس ضرایب در این صورت ویژه است که خود یک مشکل است و معمولاً افراد مایلند غیر ویژه باشد، یعنی یک ماتریس $\mathbf{A}$ در جایی‌که $|\mathbf{A}| \neq 0$.

وابستگی خطی را می‌توان به صورت زیر توضیح داد. ردیف‌های اول و سوّم $\mathbf{J}$ به طور خطی وابسته هستند. این ردیف‌ها را می‌توان به صورت بردارهای ردیفی $\mathbf{j}_1'$ و $\mathbf{j}_3'$ نگریست. حال اگر مجموعه

1-Non-Smgular Matrix 2-Singuler 3- Rank

اسکالرهای k_1 و k_2 را نتوان پیدا کرد که هر یک صفر باشند، این بردارها به لحاظ خطی مستقل هستند، طوری که ترکیب خطی (حاصل‌جمع وزن‌یافته) این بردارها، بردار صفر است. در مثال ما $\mathbf{j}_1' = (1,2,3)$ و $\mathbf{j}_3' = (3,6,9)$ را داریم و با اطمینان می‌توان مجموعه اسکالرهای $k_1 = -3$ و $k_2 = 1$ را پیدا کرد، طوری که $K_1 j_1' + K_2 j_2' = -3(1,2,3)+1(3,6,9)=(0,0,0)$. بنابراین دو بردار ردیفی به لحاظ خطی وابسته هستند.

اکنون می‌توانیم درباره **رتبه**[3] یک ماتریس بحث کنیم. یک ماتریس خواه مستطیلی و خواه مربعی وقتی که حداکثر تعداد ردیف‌ها (یا ستون‌ها)ی آن به لحاظ خطی مستقل هستند، معادل r می‌باشد. فرمول دیگر ولی یکسان این است: رتبه $\mathbf{A}$ معادل r است در صورتی‌که هر کهاد مرتبه r+۱ برابر ۰ باشد و حداقل یک کهاد مرتبه r برابر ۰ نباشد.

به طور مثال رتبه ماتریس 3×3 ، $\mathbf{A}$ در قسمت فوق، معادل مرتبه ۳ آن است. از سوی دیگر رتبه $\mathbf{J}$ معادل ۱ است، در حالی‌که مرتبه آن ۳ می‌باشد. یک مثال حد میانی ماتریس 3×3 ، $\mathbf{K}$ زیر است با مرتبه ۳ و رتبه ۲:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad |\mathbf{k}| = 1(28-36) - 2(14-18) + 3(12-12) = 0$$

و کهاد $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 28 - 36 = -8 \neq 0$

ملاحظه می‌کنید که یک ماتریس مربع چنان که رتبه‌اش از مرتبه‌اش کوچکتر باشد، ویژه است و بالعکس.

الف-۵-۳ وارون یک ماتریس

چنان که می‌دانید برای یک عدد حقیقی k می‌توانیم عدد وارون (عکس) آن را $k^{-1} = 1/k$ پیدا کنیم به طوری که $kk^{1} = 1$ است. به همین ترتیب برای یک ماتریس مربع $\mathbf{A}$ می‌توان ماتریس وارون تعیین کرد. این ماتریس را با $\mathbf{A}^{-1}$ نشان می‌دهیم و قاعده آن چنین است که حاصل‌ضرب آن در ماتریس اصلی $\mathbf{A}$ برابر است با ماتریس اتحاد $\mathbf{I}$: $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

هر ماتریسی دارای وارون نیست. یک شرط این است که $|\mathbf{A}| \neq 0$، به عبارت دیگر ماتریس $\mathbf{A}$ غیر ویژه باشد، یا چیزی شبیه به آن، که رتبه آن با مرتبه‌اش برابر است. این شرط را گاهی «تمام رتبه[1]» یا «قطعی مثبت[2]» بودن می‌گویند.

1. full rank 2. positive definite 3. adjoint Matrix

شیوه‌های زیادی برای محاسبه وارون یک ماتریس طرح شده است، زیرا این روش برای ماتریس‌های بزرگ بسیار پیچیده است. در این‌جا ما روشی را دنبال می‌کنیم که کهادها، هم‌عامل‌ها و دترمینان را به کار می‌گیرد.

وارون ماتریس $\mathbf{A}$ ماتریس الحاقی[۴] $\text{adj}\ \mathbf{A}$ تقسیم بر دترمینان آن $|\mathbf{A}|$ است:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj}\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$$

دترمینان را از پیش می‌شناسیم. ماتریس الحاقی (الحاقی $\mathbf{A}$) به صورت زیر تشکیل می‌شود. هر عنصر a_{ij} را در ماتریس $\mathbf{A}$ با هم‌عامل آن (کهاد با یک علامت) جایگزین می‌کنیم. برای این ماتریس هم‌عامل‌ها ترانهاده به دست می‌آوریم. حاصل $\text{adj}\ \mathbf{A}$ است.

برای مثال:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(3-4) - 1(4-6) + 5(8-9) = -5$$

$$adj\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 9 & -13 \\ 9 & -13 & -1 \\ -13 & 16 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -۱ & ۹ & -۱۳ \\ ۲ & -۱۳ & ۱۶ \\ -۱ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{adj\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix} +1.5 & -9.5 & +13.5 \\ -2.5 & +13.5 & -16.2 \\ +1.5 & +1.5 & -2.5 \end{bmatrix}$$

خواننده می‌تواند بررسی کند که $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

الف-۶-۳ ساختار ویژه یک ماتریس: ارزش‌های ویژه و بردارهای ویژه

برای انجام تحلیل‌های چند متغیره پیشرفته، درک مفاهیم ارزش ویژه و بردار ویژه ضرورت دارد. ارزش ویژه معمولاً یک وضعیت بهینه را نشان می‌دهد، مثل یک واریانس حداکثر در تحلیل عامل، مجذور همبستگی حداکثر در همبستگی کانونی و نسبت واریانس بین‌گروهی و درون‌گروهی در تحلیل افتراقی.

برای درک این حالت بهینه، گوینده‌ای را در نظر بگیرید که از یک سیستم استریو صحبت می‌کند که طبق مقیاس‌های خاصی ساخته شده تا اثر موزونی حاصل شود، یا شیر آبی که با یک حالت جریان آب صدای ناهنجاری ایجاد می‌کند، امّا و قتی‌که کمی بازتر یا بسته‌تر می‌شود، آب را بدون صدا جاری می‌سازد، یا ماشینی که در سرعت ۱۲۰ کیلومتر شروع به لرزش می‌کند، اما در سرعت‌های ۱۱۰ یا ۱۳۰ کیلومتر لرزش ندارد. اگر ما بتوانیم چنین لحظه بهینه‌ای را به وجود آوریم، در آن لحظه بسامد ویژه آن به شکل یک عدد تعیین شده حاصل می‌شود، آنگاه ما یک ارزش ویژه را درخواست کرده‌ایم. کسینوس‌های هادی که نشان می‌دهند شیر در چه جهتی بایستی چرخانده شود چیزی شبیه بردارهای ویژه هستند.

مسأله ساختار ویژه به صورت زیر است. یک بردار $m\times1$ ، X در نظر گرفته می‌شود. ابتدا $\mathbf{X}$ در ماتریس $m\times m$ ،$\mathbf{M}$ ضرب می‌شود. از طریق این عملیات (معروف به تبدیل خطی)، بردار $\mathbf{X}$ به بردار $m\times m$ ، y تبدیل می‌شود:

$$\underset{(m\times m)}{\boldsymbol{M}} \quad \underset{(m\times 1)}{\boldsymbol{x}} = \underset{(m\times m)}{\boldsymbol{y}}$$

اگر این پیش‌ضرب کردن در $\mathbf{M}$ ، به یک بردار $y=\lambda X$ منجر شود که برابر با مضربی از $\mathbf{X}$ است، آنگاه خواهیم داشت:

$$\boxed{\mathbf{MX}=\lambda\mathbf{X}}$$

پیش‌ضرب در ماتریس $\mathbf{M}$ به همان نتیجه ضرب در عدد حقیقی λ منجر می‌شود. این عدد λ **ارزش‌ویژه** $\mathbf{M}$ (همچنین: ریشه‌ی مکنون با ریشه خصیصه‌ای) خوانده می‌شود. یک بردار $\mathbf{X}$ که در مورد آن $\mathbf{MX}=\lambda\mathbf{X}$ صادق است، بردار ویژه (همچنین: بردار مکنون یا بردار خصیصه‌ای) نامیده می‌شود. درباره چنین بردار ویژه‌ای گفته می‌شود که طی عملیات تبدیل، ثابت [1] است.

برای مثال:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 3 & -1\end{bmatrix}\ \mathbf{X}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\ \mathbf{X}_2=\begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}\ \mathbf{X}_3=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$$

1-Invariant

$$\boldsymbol{M}X_1\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=2\,X_1 \quad (\lambda=2)$$

$$\mathbf{M}X_2\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-20\\15\end{bmatrix}=-5\begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}-5\,X_2 \quad (\lambda=-5)$$

$$\mathbf{M}X_3\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\2\end{bmatrix}\neq\lambda\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$$

از این مثال چنین بر می‌آید که $X_۱$ یک بردار ویژه با ارزش ویژه $\lambda = ۲$ است و همچنین $X_۲$ یک بردار ویژه با ارزش $\lambda = -5$ است.

از سوی دیگر بردار $X_۳$ یک بردار ویژه نیست، زیرا پس از ضرب در $\mathbf{M}$ مضربی از خودش نیست، به عبارت دیگر تحت عملیات تبدیل، ثابت نیست.

محاسبه ارزش‌های ویژه و بردارهای ویژه به صورت زیر است. ما معادله ماتریس بالا را به کار می‌گبریم:

$$\mathbf{M}\text{X} = \lambda\,\text{X}$$
$$\mathbf{M}\text{X} - \lambda\,\text{X} = \mathbf{o}$$
$$(\mathbf{M} - \lambda\,\mathbf{I})\text{X} = \mathbf{o}$$

این معادله ماتریسی است که بردارهای ویژه از روی آن تعیین خواهند شد. چنانچه راه حل پیش پا افتاده $\text{X}=\mathbf{o}$ را انتخاب نکنیم، در این صورت به سهولت می‌توان ثابت کرد که $(\mathbf{M} - \lambda\,\mathbf{I})\text{X}$معادله بردار صفر است اگر $|\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}| = \mathbf{0}$ باشد.

این معادله اخیر معادله خصیصه‌ای خوانده می‌شود و ارزش‌های ویژه λi از روی آن محاسبه می‌شوند. پس از آن ارزش‌های ویژه در معادله ماتریس قرار داده می‌شوند تا بردارهای ویژه محاسبه شوند.

اجازه دهید برای ماتریس $\mathbf{M}$ آن را حساب کنیم:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}-2 & 4\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

معادله خصیصه عبارت است از : $|\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}| = 0$.

$$\left|\begin{bmatrix}-۲ & ۴\\ ۳ & -۱\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\right| = ۰$$

$$\left|\begin{bmatrix}-۲ & ۴\\ ۳ & -۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & ۰\\ ۰ & \lambda\end{bmatrix}\right| = ۰$$

$$\begin{vmatrix} -۲ & -\lambda & ۴ \\ ۳ & -۱ & -\lambda \end{vmatrix} = ۰$$

$$(-۲-\lambda)(-۱-\lambda)-(۳)(۴)=۰$$

$$\lambda^{۲}+۳\lambda-۱۰=۰$$

$$\lambda_{۲}+۵\lambda-۲\lambda-۱۰=۰$$

$$\lambda(\lambda+۵)-۲(\lambda+۵)=۰$$

$$(\lambda-۲)(\lambda+۵)=۰.$$

جواب: $\lambda_{۱}=۲,\quad \lambda_{۲}=۲,\quad \lambda_{۲}=-۵$

این ارزش ویژه اوّل $\lambda_{۱}=۲$ را وارد معادله ماتریس می‌کنیم:

$$(\mathbf{M}-\lambda_1\mathbf{I})\mathrm{X}=0$$

$$\left\{\begin{bmatrix} -۲ & ۴ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} - ۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} X_{۱} \\ X_{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -۲ & -۲ & ۴ \\ ۳ & -۱ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_{۱} \\ X_{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$-۴x_{۱}+۴x_{۲}=۰$$

$$۳x_{۱}-۳x_{۲}=۰$$

برای این دستگاه که راه‌حل‌های بی‌شماری وجود دارد $x_{۱}=x_{۲}$ است. نمونه‌هایی از بردار ویژه $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix},\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \end{bmatrix},\begin{bmatrix} ۳ \\ ۳ \end{bmatrix}$ و نظیر آن هستند.

سپس ارزش ویژه دوّم $\lambda_{۲}=۵$ را وارد می‌کنیم:

$$(\mathbf{M}-\lambda_2\mathbf{I})\mathrm{X}=0$$

$$\left\{\begin{bmatrix} -۲ & ۴ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} - (-۵)\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} X_{۱} \\ X_{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -۲ & +۵ & ۴ \\ ۳ & -۱ & +۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_{۱} \\ X_{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$۳x_{۱}+۴x_{۲}=۰$$

$$۳x_{۲}+۴x_{۲}=۰$$

برای این دستگاه که $x_{۱}$ و $x_{۲}$ در آن دارای نسبت ۴ به ۳- هستند، تعداد بی‌شماری جواب وجود دارد. مثال‌هایی از بردارهای ویژه عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} ۴ \\ -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۸ \\ -۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱۲ \\ -۹ \end{bmatrix}$$

و از این قبیل.

مشکل عدم قطعیت که در این‌جا به دلیل تعداد بی‌شماری جواب‌های ممکن، بروز می‌کند، به وسیله بهنجارسازی بردارهای ویژه حل می‌شود. این مطلب در فصل ۸ در قسمت تحلیل افتراقی دوگروهی مورد بحث قرار گرفته است.

بهنجارسازی به معنای تقسیم بردار بر طول آن $\|\mathbf{K}\|$ برای به دست آوردن برداری با طول واحد است. طول بردار از طریق جذر حاصل‌جمع مجذورات عناصر محاسبه می‌شود. اگر اولین بردار ویژه را $\boldsymbol{u}_۱$ بنامیم، آنگاه طول آن معادل $[u_۱^۲+u_۲^۲]^{۱/۲}$ است. این مقدار برای بردار ویژه $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ برابر $\sqrt{۲} = [۱+۱]^{۱/۲}$ است. طول بردار ویژه دوّم $\boldsymbol{u}_۲ = \begin{bmatrix} ۴ \\ -۳ \end{bmatrix}$ معادل $۵ = [۴^۲+(-۳)^۲]^{۱/۲}$ می‌باشد. در نتیجه دو بردار ویژه بهنجار شده عبارتند از:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 4.5 \\ -3.5 \end{bmatrix}$$

می‌توانیم آن‌ها را در ماتریس $\mathbf{U}$ جمع کنیم:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 4.5 \\ 1/\sqrt{2} & -3.5 \end{bmatrix}$$

ارزش‌های ویژه روی قطر اصلی ماتریس قطری $\mathbf{D}$ جمع شده‌اند:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

وارون $\mathbf{U}$ را به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} -3/5 & -1\sqrt{2} \\ -4/5 & 1\sqrt{2} \end{bmatrix}' / \left(-\frac{7}{5\sqrt{2}}\right) = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2}/7 & 4\sqrt{2}/7 \\ 5/7 & -5/7 \end{bmatrix}$$

اکنون می‌توان وارسی کرد که $\mathbf{UDU}^{-1}$ معادل ماتریس اولیه $\mathbf{M}$ است (تمرینی برای خواننده). این تجزیه که طبق آن $\mathbf{M}$ به صورت حاصل‌ضرب سه ماتریس نوشته می‌شود، تجزیه ارزش ویژه[1] (SVD) خوانده می‌شود. عملیات SVD که در این‌جا محاسبه شد $(\mathbf{M} = \mathbf{UDU}^{-1})$ در مورد ماتریس‌هایی مصداق دارد که مربع و غیر متقارن هستند. برای اطلاع از انواع دیگر ماتریس‌ها به اثر گرین (۱۹۷۶) مراجعه کنید.

پایان

1-Singular Value decomposition

جداول آماری

جدول ۱ توزیع طبیعی نمرات استاندارد

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

جدول ۲ اندازه های x^2 با توجه میزان احتمال

df	$\chi^2_{0.005}$	$\chi^2_{0.01}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.055}$	$\chi^2_{0.10}$	$\chi^2_{0.90}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.995}$
1	0.000039	0.00016	0.00098	0.0039	0.0158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
120	83.85	86.92	91.58	95.70	100.62	140.23	146.57	152.21	158.95	163.64

جدول ۳ اندازه‌های t برای درجات آزادی v و احتمال p

v \ $1-\alpha$	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.339	2.861	3.883
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

جدول ۴ اندازه های F برای α=۰/۰۵ و درجات آزادی V۱ و V۲ صورت و مخرج

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

کتابشناسی

Alschuler, L., 1976, Satellization and Stagnation in Latin America, *International Studies Quarterly*, vol. 20, no. 1, 39–82.

Ammerman, C., P. Gluchowski and P. Schmidt, 1975, Rekursive oder nicht-rekursive Modelle? Zum Problem der Testbarkeit von Feedback-Prozessen, *Zeitschrift für Soziologie*, vol. 4, no. 3, 203–220.

Bartlett, M., 1950, Tests of Significance of Factor Analysis, *British Journal of Psychology*, vol. 3, 77–85.

Bennett, S. and D. Bowers, 1976, *An Introduction to Multivariate Techniques for Social and Behavioural Sciences*, London: Macmillan.

Blalock, H., 1961, *Causal Inferences in Nonexperimental Research*, Chapel Hill: The University of North Carolina Press.

Blalock, H., 1960, *Social Statistics*, London: McGraw-Hill.

Blau, P. and O. Duncan, 1967, *The American Occupational Structure*, London: Wiley.

Bodenheimer, S., 1973, Dependency and Imperialism: The Roots of Latin American Underdevelopment, *Politics and Society*, vol. 1, no. 3, 327–357.

Boudon, R., 1965, Méthodes d'analyse causale, *Revue française de sociologie*, vol. VI, 24–43.

Boudon, R., 1967, *L'analyse mathématique des faits sociaux*, Paris: Plon.

Brownlee, K., 1965, *Statistical Theory and Methodology in Science and Engineering*, New York: John Wiley and Sons.

Cattell, R., 1966, *Handbook of Multivariate Experimental Psychology*, Chicago: Rand McNally.

Chase-Dunn, C., 1975, The effects of international economic dependence on development and inequality: a cross-national study, *American Sociological Review*, vol. 40, 720–738.

Chatterjee, S. and B. Price, 1977, *Regression Analysis by Example*, New York: John Wiley and Sons.

Coleman, J., 1964, *Introduction to Mathematical Sociology*, New York: The Free Press of Glencoe.

Colson, F., 1977, *Sociale indikatoren van enkele aspecten van bevolkingsgroei*, Leuven: dissertatie K.U.L., Departement Sociologie.

Cook, T. and T. Campbell, 1979, *Quasi-Experimentation: Design and Analysis Issues for Field Settings*, Chicago: Rand McNally.

Cooley, W. and P. Lohnes, 1971, *Multivariate Data Analysis*, New York: Wiley.

Cronbach, L., 1951, Coefficient Alpha and the Internal Structure of Tests, *Psychometrika*, vol. 16, 297–334.

Daniel, T. and J. Esser, 1980, Intrinsic Motivation as Influenced by Rewards, Task Interests and Task Structure, *Journal of Applied Psychology*, vol. 65, no. 5, 566–573.

De Finetti, B., 1964, Foresight, its Logical laws, its Subjective Sources (1937), in : H. Kyburg and H. Smokler, *Studies in Subjective Probability*, New York: Wiley.

De Jong, G. and R. Sell, 1975, Changes in Childlessness in the United States: A Demographic Path Analysis, *Population Studies*, vol. 31, no. 1, 129–141.

De Jong, M.J., 1982, *Wat hebben ze bereikt?* [What have they achieved?], Rotterdam: Rotterdamse Universitaire Pers.

Duncan, O., 1975, *Introduction to Structural Equation Models*, New York: Academic Press.

Gifi, A., 1980, *Niet-lineaire Multivariate Analyse*, Leiden.

Goldberger, A., 1970, On Boudon's Method of Linear Causal Analysis, *American Sociological Review*, vol. 35, 97–101.

Gordon, R., 1968, Issues in Multiple Regression, *American Journal of Sociology*, vol. 73, 592–616.

Green, P., 1978, *Analyzing Multivariate Data*, Illinois: Dryden.

Green, P., 1976, *Mathematical Tools for Applied Multivariate Analysis*, New York: Academic Press.

Guttman, L., 1953, Image Theory for the Structure of Quantitative Variates, *Psychometrika*, vol. 18, 227–296.

Harman, H., 1967, *Modern Factor Analysis*, Chicago: University of Chicago Press.

Harman, H. and W. Jones, 1966, Factor Analysis by minimizing residuals (Minres), *Psychometrika*, vol. 31, 351–368.

Hays, W., 1972, *Statistics for the Social Sciences*, Holt International Edition.

Hettne, B., 1982, *Development Theory and the Third World*, Stockholm: Swedish Agency for Research Co-operation with Developing Countries.

Hoge, D. and J. Carroll, 1975, Christian Beliefs, Nonreligious Factors and Anti-Semitism, *Social Forces*, vol. 53, no. 4, 581–594.

Hout, W., 1984, *Frank en Vrij in het Zuiden?* [Free as the Wind in the South?], Rotterdam, doctoraalscriptie EUR SSCW.

Houtman, D. and A. Steijn, 1990, *Verkeren niet-werkenden in een sociaal isolement? De maatschappelijke participatie van werkenden, RWW-ers en ABW-ers vergeleken*, Ongepubliceerd werkstuk, Rotterdam.

Jöreskog, K., 1967, Some Contributions to Maximum Likelihood Factor Analysis, *Psychometrika*, vol. 32, 443–482.

Jöreskog, K., 1969, A General Approach to Confirmatory Maximum Likelihood Factor Analysis, *Psychometrika*, vol. 34, no. 2, 183–201.

Jöreskog, K., 1973, A General Method for Estimating a Linear Structural Equation System, in: A. Goldberger and O. Duncan, *Structural Equation Models in the Social Sciences*, London: Seminar Press, pp. 85–112.

Kaiser, H., 1958, The Varimax Criterion for Analytic Rotation in Factor Analysis, *Psychometrika*, vol. 23, 187–200.

Kaiser, H., 1959, The Application of Electronic Computers to Factor Analysis, Symposium on the application of computers to psychological problems, *American Psychological Association*.

Kaiser, H., 1963, Image Analysis, in: C. Harris, *Problems in Measuring Change*, Madison: University of Wisconsin Press.

Kaiser, H. and J. Caffrey, 1965, Alpha Factor Analysis, *Psychometrika*, vol. 30, 1–14.

Kalleberg, A., 1977, Work Values and Job Rewards: a Theory of Job Satisfaction, *American Sociological Review*, vol. 42, 124–143.

Kendall, M. and A. Stuart, 1969, *The Advanced Theory of Statistics. Volume 2: Inference and Relationship; Volume 3: Design and Analysis, and Time Series*, London: Griffin.

Klingemann, H., 1979, Organisationsmobilität in der Großforschung. Eine Analyse inner- und außerorganisatorischer Determinanten der individuellen Bereitschaft zur Organisationsmobilität am Beispiel der Kernforschungsanlage Jülich, *Zeitschrift für Soziologie*, vol. 8, no. 3, 230–253.

Kruijt, D. and M. Vellinga, 1978, Bases sociologiques du militantisme chez les ouvriers et les dirigeants syndicaux: une analyse méthodologique de cas, *Revue française de sociologie*, pp. 125–152.

Kruskal, J. and F. Carmone, 1968, Use and Theory of MONANOVA, a Program to Analyze Factorial Experiments by Estimating Monotone Transformations of the Data, unpublished paper, Bell Laboratories.

Kruskal, J. and M. Wish, 1978, *Multidimensional Scaling*, London: Sage.

Kruskal, W. and W. Wallis, 1952, Use of ranks in one-criterion variance analysis, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 47, 583–621.

LaFree, G., 1983, Male Power and Female Victimization: Toward a Theory of Interracial Rape, *American Journal of Sociology*, vol. 88, no. 2, 311–328.

Lange, E., 1978, Determinanten der Entscheidung für das Studium der Soziologie, eine Anwendung der Pfadanalyse, *Zeitschrift für Soziologie*, vol. 8, no. 1, 72–86.

Lazarsfeld, P., 1955, Interpretation of Statistical Relationships as a Research Operation, in: P. Lazarsfeld and M. Rosenberg, *The Language of Social Research*, New York: Macmillan.

Lazarsfeld, P., 1961, The Algebra of Dichotomous Systems, in: H. Solomon, *Studies in Item Analysis and Prediction*, Stanford: Stanford University Press.

Lazarsfeld, P., 1968, The Analysis of Attribute Data, *International Encyclopedia of the Social Sciences*, vol. 15, 419–429.

Lawley, D., 1940, The Estimation of Factor Loading by the Method of Maximum Likelihood, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 60*, 64–82.

Locke, H. and R. Williamson, 1958, Marital Adjustment: a Factor Analysis Study, *American Sociological Review*, vol. 23, no. 5, 562–569.

McLaughlin, S., 1978, Occupational Sex Identification and the Assessment of Male and Female Earnings Inequality, *American Sociological Review*, vol. 43, 909–921.

Muliak, S., 1972, *The Foundations of Factor Analysis*, New York: McGraw-Hill.

Myles, J., 1978, Institutionalization and Sick Role Identification among the Elderly, *American Sociological Review*, vol. 43, 508–521.

Naroll, R., 1982, *The Moral Order*, London: Sage.

Nie, N. *et al.*, 1975, *Statistical Package for the Social Sciences*, New York: McGraw-Hill.

Norušis, M., 1978, *SPSS Statistical Algorithms*, Release 8.0.

Opp, K-D. and P. Schmidt, 1976, *Einführung in die Mehrvariablenanalyse. Grundlagen der Formulierung und Prüfung komplexer sozialwissenschaftlicher Aussagen*, Reinbek bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag.

O'Quin, K. and J. Aronoff, 1981, Humor as a Technique of Social Influence, in: *Social Psychology Quarterly*, vol. 44, no. 4, 349–357.

Pappi, F. and I. Pappi, 1978, Sozialer Status und Konsumstil, eine Fallstudie zur Wohnzimmereinrichtung, *Kölner Zeitschrift für Soziologie und Sozialpsychologie*, vol. 30, 60–86.

Philipsen, H., 1969, *Afwezigheid wegens ziekte*. Groningen: Wolters-Noordhoff.

Provoost, F., 1979, *Kansarme Buurten, een onderzoek naar territoriale concentraties van kansarme bevolkingsgroepen in het Nederlandstalig landsgedeelte en Brussel-hoofdstad*, Leuven: Federatie Buurtwerk.

Russett, B., 1969, Inequality and Instability: the Relation of Land Tenure to Politics, in: D. Rowney and J. Graham, *Quantitative History, Selected Readings in the Quantitative Analysis of Historical Data*, Illinois: The Dorsey Press, pp. 356–367.

Schuessler, K. and H. Driver, 1956, A Factor Analysis of Sixteen Primitive Societies, *American Sociological Review*, vol. 21, no. 4, 493–499.

Shingles, R., 1977, Faculty Ratings: Procedures for Interpreting Student Evaluations, *American Educational Research Journal*, vol. 14, no. 4, 459–470.

Siegrist, J. and K. Dittmann, 1981, Lebensveränderungen und Krankheitsausbruch: Methodik und Ergebnisse einer medizinsoziologischen Studie, *Kölner Zeitschrift für Soziologie und Sozialpsychologie*, vol. 33, 132–147.

Simon, H., 1954, Spurious Correlation: a Causal Interpretation, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 49, 467–479.

Somers, R., 1968, An Approach to the Multivariate Analysis of Ordinal Data, *American Sociological Review*, vol. 33, 971–977.

Stewart, D. and W. Love, 1968, A General Canonical Correlation Index, *Psychological Bulletin*, vol. 70, 160–163.

Tacq, J., 1977, *Associatiematen voor kruistabellen. Een handleiding bij het interpreteren van SPSS-output*, Leuven: Sociologisch Onderzoeksinstituut.

Tacq, J., 1984, *Causaliteit in sociologisch onderzoek. Een beoordeling van causale analysetechnieken in het licht van wijsgerige opvattingen over causaliteit*, Deventer: Van Loghum Slaterus.

Thurstone, L., 1947, *Multiple Factor Analysis*, Chicago: University of Chicago Press.

Valeriani, R., 1979, *Travels with Henry*, Boston: Houghton Mifflin.

Van de Geer, J., 1971, *Introduction to Multivariate Analysis for the Social Sciences*, San Francisco: Freeman.

Vandenberghe, R., Denoo, H. and De Roo, F. 1978, Onderzoek naar factoren die door leerkrachten basisonderwijs als beïnvloedend en remmend ervaren worden, *Pedagogisch Tijdschrift / Forum van Opvoedkunde*, vol. I: 3, no. 7, 369–385; vol. II: 3, no. 8, 429–443.

Van Raaij, W., 1968, *Geprogrammeerde instructie wiskunde ter voorbereiding voor het vak statistiek*, Voorschoten: Vam.

Wilson, K., 1980, Immigrant Enclaves: An Analysis of the Labor Market Experiences of Cubans in Miami, *American Journal of Sociology*, vol. 86, no. 2, 295–319.

Woelfel, J. and A. Haller, 1971, Significant Others, the Self-reflexive Act and the Attitude Formation Process, *American Sociological Review*, vol. 36, 74–86.

Wold, H., 1954, Causality and Econometrics, *Econometrica*, vol. 22, 162–177.

Wold, H., 1956, Causal Inference from Observational Data, *Journal of the Royal Statistical Society*, Series A, Bd 119, Part I, 28–60.

Wold, H., 1960, A Generalization of Causal Chain Models, *Econometrica*, vol. 28, 443–463.

Wright, S., 1918, On the Nature of Size Factors, *Genetics*, vol. 3, 367–374.

Wright, S., 1921, Correlation and Causation, *Journal of Agricultural Research*, vol. 20, 557–585.

Wright, S., 1934, The Method of Path Coefficients, *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 5, 161–215.

Shiraz University Press
451

Multivariate Analysis Techniques in Social Science Research

Jacques Tacq
Translated by:
Dr.Mahmood Bahrani

From Problem to analysis

برخلاف بیشتر کتاب‌های آماری، این کتاب زندگی واقعی را به تحلیل چند متغیری پیوند داده است. با یک دسته مثال‌های تحقیقی از علوم اجتماعی شروع می‌کند، که نشان می‌دهد چگونه مناسب‌ترین شیوه را انتخاب کرد. مثال‌ها از طیف گسترده‌ای از علوم شامل، جامعه‌شناسی، روان‌شناسی، اقتصاد، علوم سیاسی و تحقیقات مقایسه بین‌المللی طرح شده‌اند.

بخش اول، از نظریه تا روش‌شناسی یک مرور روشن و غیرفنی از انواع مسائل تحقیقی و یک دسته از شیوه‌های در دسترس محقق را ارائه می‌کند. بخش دوم، از روش‌شناسی به تحلیل، کاربردهای هر شیوه را با جزئیات نشان می‌دهد، دوباره از داده‌های برجسته‌ای از مطالعات تجربی منتشر شده استفاده می‌کند.

مباحث، همه شیوه‌های کلاسیک چند متغیری را پوشش می‌دهد. توضیحات قدم به قدم در هر تحلیل، هم با محاسبه دستی و هم برون‌داد SPSS صورت می‌گیرد. همچنین خلاصه مفیدی از همه مفاهیم آماری مورد نیاز برای شیوه‌های پیشرفته‌تر ارائه شده است.

این کتاب برای تمام دانشجویان و پژوهشگران علوم اجتماعی، روان‌شناسی و علوم تربیتی که از تحلیل چند متغیری برای مسائل تحقیقاتی استفاده می‌کنند و به درک چگونگی انتخاب آنها نیازمندند مناسب خواهد بود.

جیکیوس تاک در زمانی که کرسی استادی جامعه شناسی در دانشگاه کاتولیک بروسلس بلژیک برعهده داشته این کتاب را تألیف نموده است. او همچنین استاد تحلیل داده‌های علوم اجتماعی در دانشگاه ایکسس ودانشگاه اراسیوس روتردام بوده است.

ISBN:978-964-462-441-4
9 789644 624414